MASARYKOVA UNIVERZITA

Stanovení vzdálenosti na Zemi

cv. č. 4

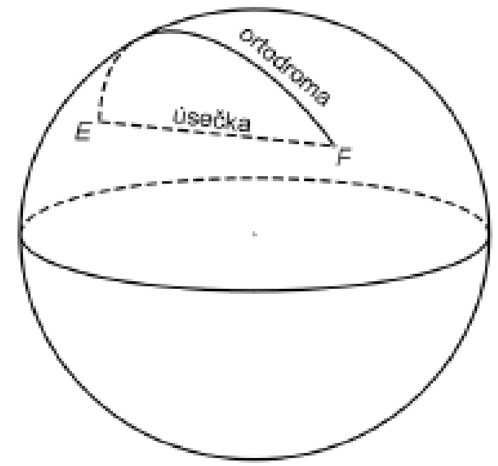
Základní pojmy

- Vzdálenost na Zemi.
- Ortodroma.
- Loxodroma.

Ortodroma I.

- z řeckého *ortos* – přímý a *dromos* – cesta.
- V klasické euklidovské geometrii: nejkratší vzdálenost dvou bodů EF je úsečka – technicky nepoužitelná.
- Nejkratší vzdálenost dvou bodů na zemském povrchu – na povrchu referenční koule.
- Ortodroma na rozdíl od loxodromy protíná poledníky pod různými azimuty.
- Vrací se do bodu, ze kterého vychází.
- Poledník je ortodroma, rovnoběžka s výjimkou rovníku není ortodromou.

Ortodroma II.



- *Synonyma:* geodetika, geodetická křivka.

- Představuje hlavní kružnici, tj. průsečnici roviny procházející středem koule a koule.
- V kartografických zobrazeních se zobrazuje jako obecná křivka.
- V gnomonické projekci se zobrazí jako úsečka.
- Její délka je vždy konečná.

- *Použití:* geodézie, letecká či námořní doprava.

Využití

- Výpočty základních geodetických úloh.

I. (základní) geodetická úloha

– ze souřadnic počátečního bodu *E*, počátečního azimutu ortodromy a délky ortodromy určete souřadnice koncového bodu *F* a koncový azimut ortodromy.

II. (základní) geodetická úloha – ze souřadnic bodů *E*, *F* určete délku ortodromy a její počáteční i koncový azimut.

Možnosti řešení

1. Dvojice bodů na rovníku (na stejné rovnoběžce).
2. Dvojice bodů na stejném poledníku.
3. Dvojice bodů v obecné poloze.

Dvojice bodů v obecné poloze I.

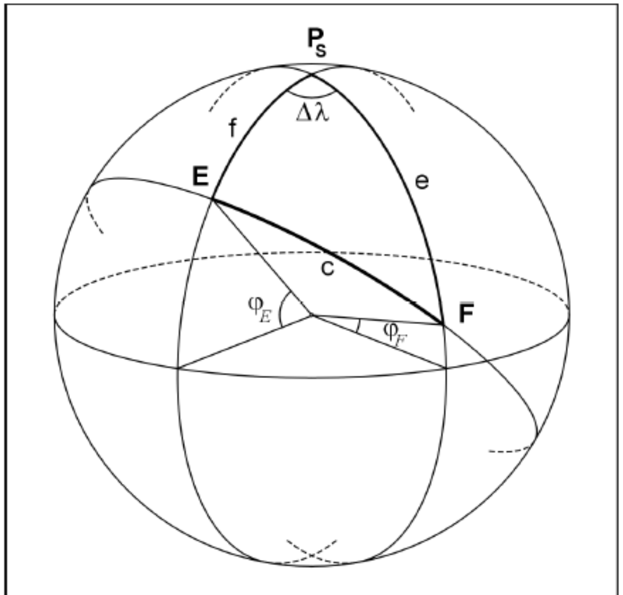
- Využití sférické trigonometrie:
  - řeší vztahy uvnitř sférického trojúhelníka – daného třemi body a tvořeného oblouky hlavních kružnic.
- Oba body E a F tvoří společně se severním pólem Ps snadno řešitelný sférický trojúhelník.
- Pro strany platí:

  $e = 90° - \varphi_F$

  $f = 90° - \varphi_E$

  c ... hledaná ortodroma.

  $\gamma \equiv \Delta\lambda = |\lambda_F - \lambda_E|$



Azimut

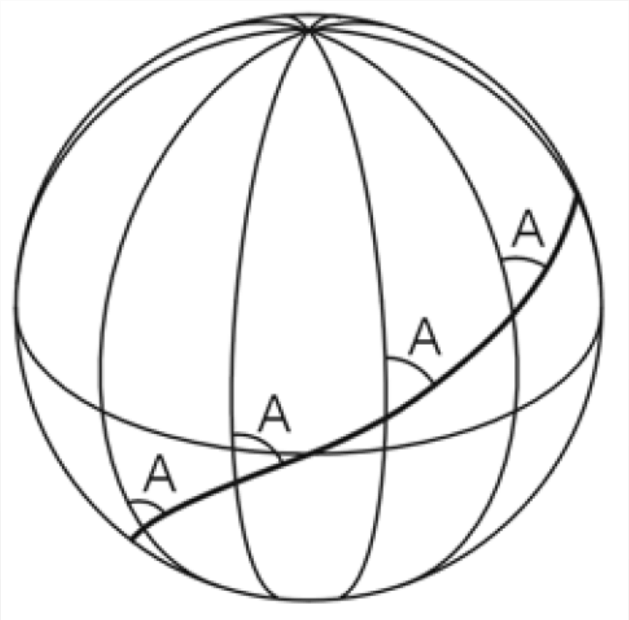
- Úhel mezi ortodromou a poledníkem, měří se od severu ve směru chodu hodinových ručiček.
- Azimut ortodromy se plynule mění z počáteční do koncové hodnoty je nutné při přesunu hodnoty neustále přepočítávat.
- Je třeba dbát na pořadí míst E, F, dosazujeme souřadnice včetně znamének (j.š. a z.d. jsou záporné!!!).
- Pro snadnější navigaci se určuje konstantní úhel pod kterým lze z místa E dorazit do místa F.
- Dráhu pohybu pod tímto konstantním kurzem označujeme jako **loxodromu**.

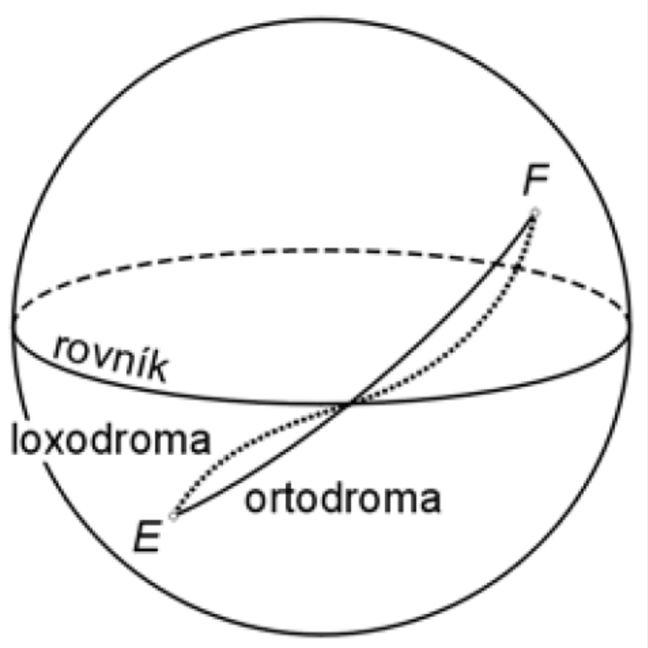
Loxodroma I.

- Z řeckého *loxos* – šikmý a *dromos* – cesta.
- Čára spojující dvě místa na glóbu a protínající všechny poledníky pod týmž úhlem (azimutem *A*).
- Délka l=∞.
- Není nejkratší spojnicí dvou bodů na referenční ploše (s výjimkou rovníku).
- Spirálovitě se blíží k severnímu/jižnímu pólu, kterého však nikdy nedosáhne.
- V Mercatorově zobrazení se zobrazí jako úsečka => použití pro námořní navigaci.
- Využití: letecká, námořní doprava (dnes při navigaci používán GPS).

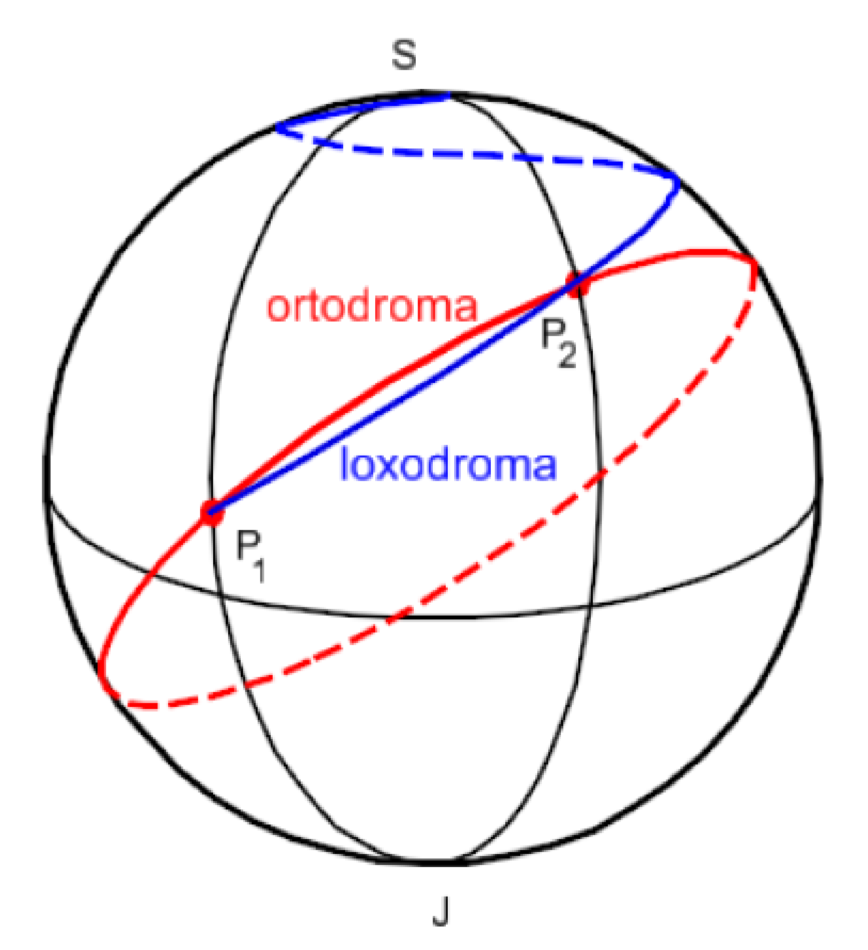
Loxodroma II.

- A=0 ->loxodroma splývá s poledníkem.
- A=90 ->loxodroma splývá s rovnoběžkou.





Ortodroma x loxodroma



Zadání cvičení

- Téma cvičení – Vzdálenost na Zemi
- Zadání: ***Chystáte se na letní olympiádu v Riu de Janeiru v roce 2016?***

a) Nakreslete orientační náčrt vzájemné polohy míst E a F a spojte je úsečkou znázorňující loxodromu. Hledáte nejkratší vzdálenost, přitom však dávejte pozor na přechod rovníku!

b) Vypočtěte a zapište azimut loxodromy pro směr cesty z místa E –> F.

c) Vypočtěte délku ortodromy mezi Brnem (E) a Riem de Janeirem (F). Zapište přitom její úhlovou velikost (c) i délku d_{EF} v kilometrech.

d) Vypočtěte délku loxodromy I_{EF} mezi Brnem (E) a Riem de Janeirem (F) a porovnejte s výsledkem s d_{EF}. Zapište, která z tras je kratší a uveďte i rozdíl obou vzdáleností v km.

Jak na výpočet – ortodroma? I.

- Pro určení nejkratší vzdálenosti bodů E, F budeme řešit II. geodetickou úlohu. Stačí přitom zjistit délku ortodromy.
- Nejjednodušší je, když místa leží na stejném rovníku, či poledníku.
- Ale co když ne? Pak jde o obecnou polohu, kterou budeme řešit.

Jak na výpočet – ortodroma? II.

- Za ortodromu volíme vždy nejkratší oblouk hlavní kružnice, proto musí být splněno $\Delta\lambda \leq 180°$.
- Pokud vychází $|\lambda_F - \lambda_E| > 180°$, použije se doplněk do plného úhlu $\Delta\lambda = 360° - |\lambda_F - \lambda_E|$.
- Pamatujete na trigonometrické věty (sinova a kosinova věta)?
- Kosinova věta pro stranu c sférického trojúhelníku:

$$\cos c = \cos e * \cos f + \sin e * \sin f * \cos \gamma$$

Jak na výpočet – ortodroma? III.

- Odtud dosazením získáte:

$$\cos c = \cos(90° - \varphi_F) * \cos(90° - \varphi_E) + \sin(90° - \varphi_E) * \sin(90° - \varphi_F) * \cos \Delta\lambda$$

- Pozor na znaménka zeměpisných šířek a vyčíslení goniometrických funkcí!

- Získaná hodnota c určuje velikost oblouku EF v úhlové míře (°), je nutné ji ještě upravit na délku v kilometrech. Jde přitom o oblouk hlavní kružnice o poloměru shodném s poloměrem referenční koule (r_z), proto:

$$d_{EF} = 2\pi r_Z \frac{c}{360°}$$

Jak na výpočet – loxodroma? I.

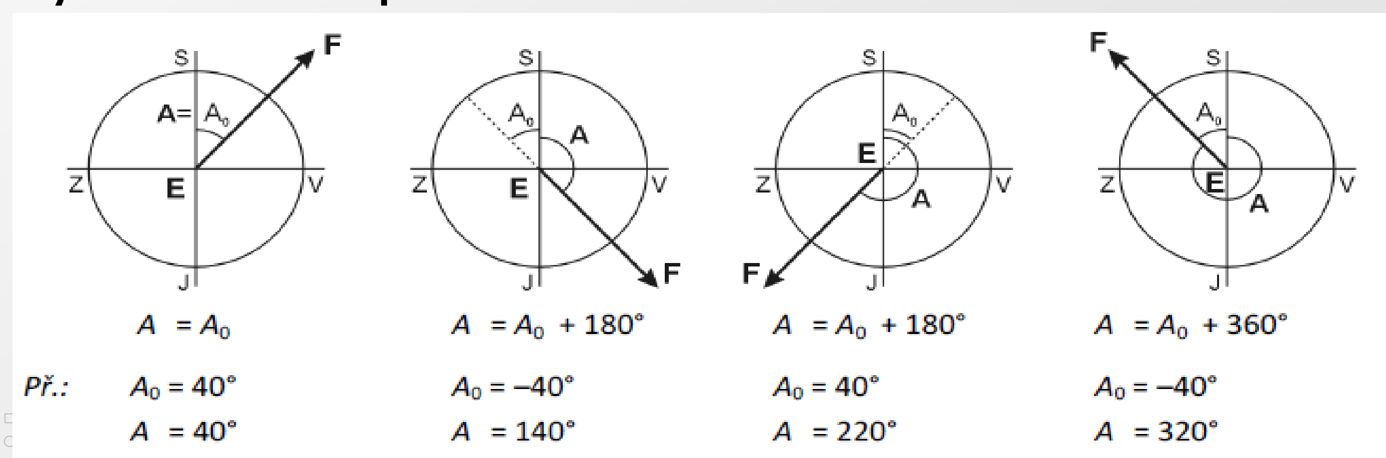
- Loxodroma je v optimálním případě spirála na kulové ploše, blíží se v nekonečně mnoha závitech k oběma pólům.
- Pro správné určení azimutu loxodromy je nutné určení správného pořadí bodů (počáteční a koncový). Délka je potom v obou případech stejná!
- Platí stejné podmínky jako v případě ortodromy.
- Nejprve se ručí azimut A ze vztahu:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\lambda_F - \lambda_E}{\ln\left(\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\varphi_F}{2} + 45°\right)}{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\varphi_E}{2} + 45°\right)}\right)} * \frac{\pi}{180°}$$

Jak na výpočet – loxodroma? II.

- Platí stejné podmínky jako v případě ortodromy.

- Z hodnoty tg A lze matematicky vyčíslit pouze úhel A_0, který leží v intervalu základní periody funkce tangens (-90°;+ 90°). Protože ale azimut A se měří v intervalu (0°, 360°), je nutné opravit hodnotu A_0 podle vzájemné polohy měst do správného kvadrantu.



Jak na výpočet – loxodroma? III.

- Délka loxodromy se následně určí podle vzorce:

$$l_{EF} = \frac{r_Z}{\cos A} * (\varphi_F - \varphi_E) * \frac{\pi}{180°}$$

- Pro nejkratší možnou loxodromu je nutné opět splnit podmínku $\Delta\lambda \leq 180°$.
- Pro nejkratší možnou loxodromu je nutné opět splnit podmínku $\Delta\lambda \leq 180°$.
- Pokud vychází $|\lambda_F - \lambda_E| > 180°$, použije se doplněk do plného úhlu $\Delta\lambda = 360° - |\lambda_F - \lambda_E|$.
- Protože se tentokráte ve výpočtu nepoužívá absolutní hodnota, dosazuje se doplněk s opačným znaménkem než původní rozdíl $|\lambda_F - \lambda_E|$, (např. místo 290° se dosazuje –70°, místo –190° se dosazuje 170°)

Pro dnešek vše!!!

Pokračování ve čtvrtek 28. dubna 2016