Exponenciální a logaritmické funkce a rovnice

Repetitorium z matematiky

Podzim 2011

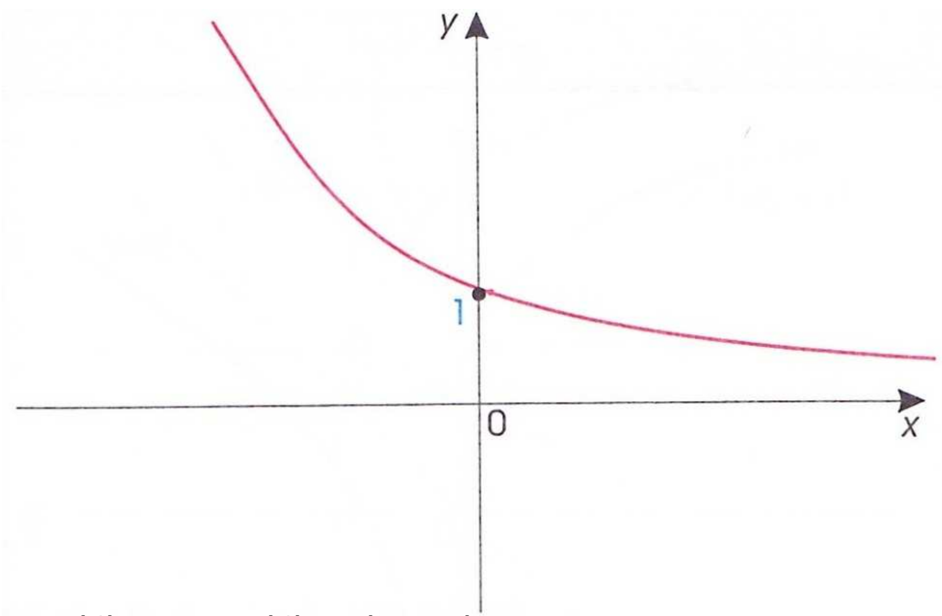
Ivana Vaculová

1 EXPONENCIÁLNÍ FUNKCE

$$f : y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1, D(f) = R$$

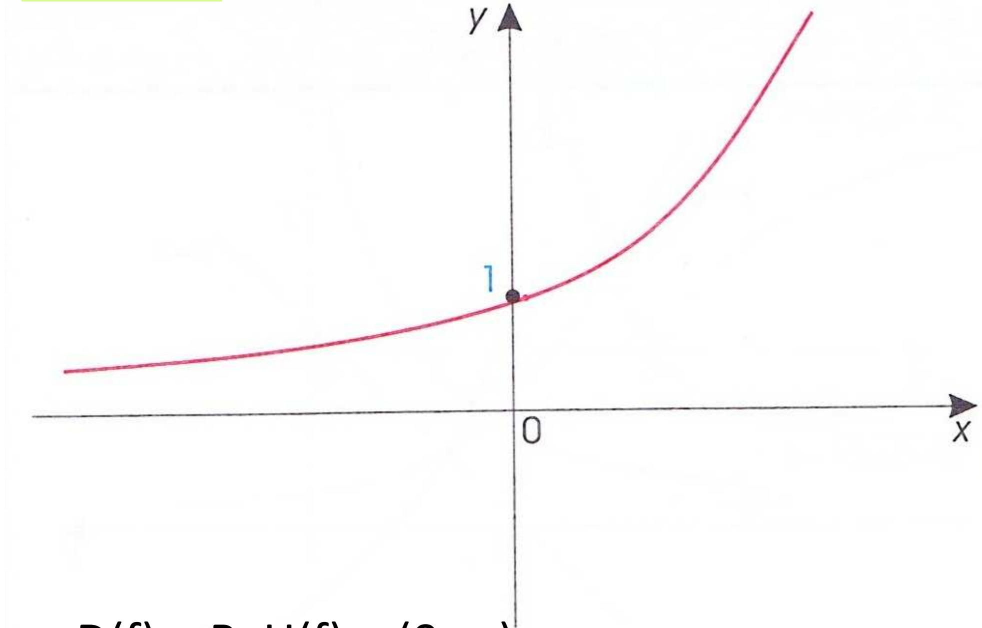
Graf: exponenciální křivka (exponenciála)

0 < a < 1



D(f) = R, H(f) = (0;∞).
Není ani sudá, ani lichá.
Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci logaritmické.
Je spojitá v R.

a > 1



D(f) = R, H(f) = (0;∞).
Není ani sudá, ani lichá.
Je omezená zdola ($a^x > 0$), není omezená shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci logaritmické.
Je spojitá v R.

Úlohy

Př.1: Na základě vlastností exponenciální funkce určete, které z následujících mocnin jsou větší než jedna, rovny jedné, menší než jedna:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{4}}, \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{7}},\ 2{,}18^{0,1},\ 0{,}45^{0,4}, \left(\frac{41}{40}\right)^{0,2}, \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\sqrt{1,001}}$$

Př.2: Rozhodněte, zda je pravdivý výrok:

$$(0{,}4)^{1,6} < (0{,}4)^{1,8}$$

Své rozhodnutí zdůvodněte. Využijte vlastností exponenciální funkce y = $(0{,}4)^x$

Př.3: Rozhodněte, který ze vztahů 0<a<1, a>1platí, je-li:

$$a^{\frac{2}{5}} < a^{\frac{7}{3}}$$

Př.4: Rozhodněte, jaký vztah platí mezi čísly p, r :

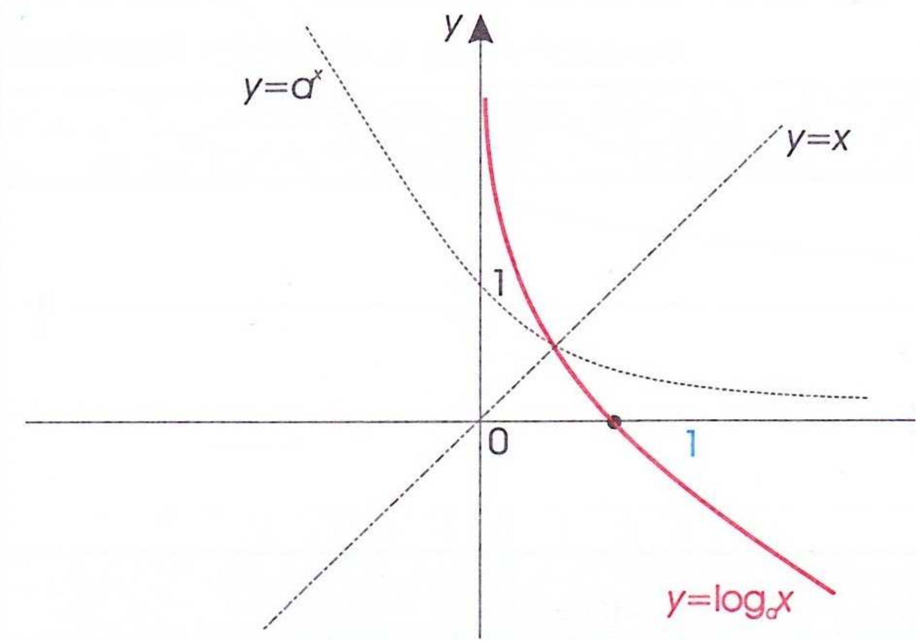
$$\left(\frac{3}{7}\right)^{p} < \left(\frac{3}{7}\right)^{r}$$

2 LOGARITMICKÁ FUNKCE

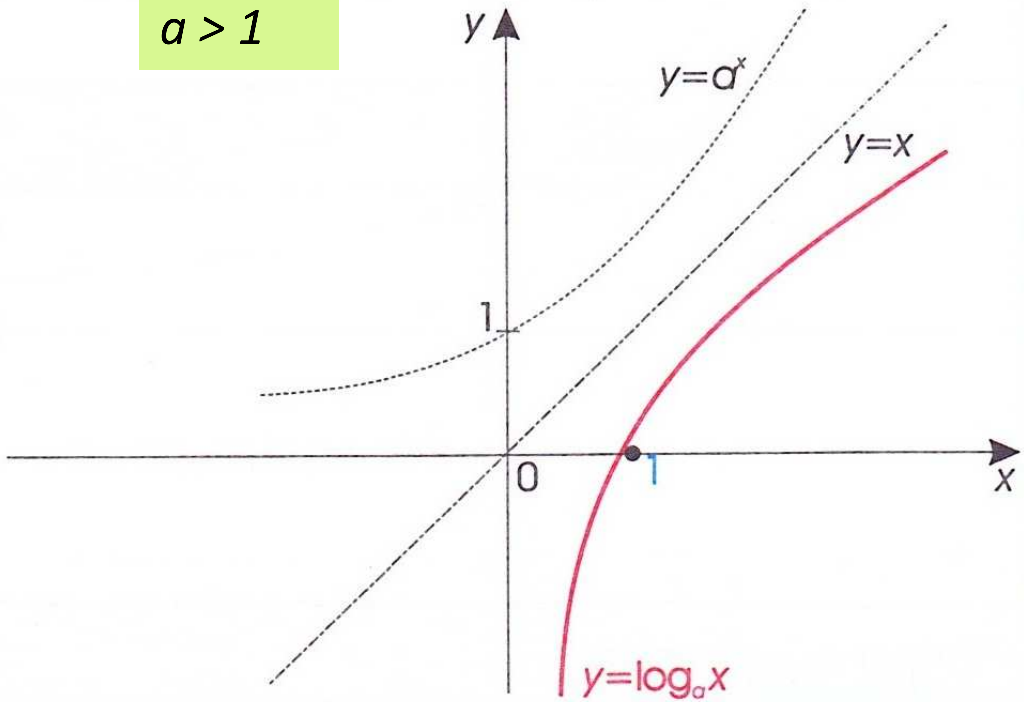
$$f : y = \log_a x, \quad a > 0, a \neq 1, D(f) = (0;\infty)$$

Graf: logaritmická křivka

0 < a < 1



a > 1



D(f) = (0;∞), H(f) = R.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je klesající, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v (0;∞).

D(f) = (0;∞), H(f) = R.
Není ani sudá, ani lichá.
Není omezená zdola, ani shora.
Je rostoucí, tedy prostá.
Nemá maximum, ani minimum.
Je inverzní k funkci exponenciální.
Je spojitá v (0;∞).

Úlohy

Př.1: Rozhodněte, který z výroků je pravdivý:

$$a)\log_5 7 < \log_5 9$$

$$b)\log_{10} 12 \leq \log_{0,3} 12$$

Využijte vlastnosti logaritmických funkcí.

3 EXPONENCIÁLNÍ ROVNICE

Při řešení **exponenciálních rovnic** využíváme pravidlo:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Př.1:

$$2^x = 8$$
$$2^x = 2^3$$
$$x = 3$$

Př.2:

$$\frac{1}{5^{2x-4}} = 125$$
$$5^{-(2x-4)} = 5^3$$
$$-(2x-4) = 3$$
$$-2x = -1$$
$$x = 0{,}5$$

Př.3: Řešíme pomocí substituce

$$4^x + 2^x - 6 = 0$$
$$\left(2^x\right)^2 + 2^x - 6 = 0$$
$$substituce\ y = 2^x$$
$$(y)^2 + y - 6 = 0$$
$$D = 1 - 4\cdot(-6) = 25$$
$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2}$$
$$y_1 = 2, y_2 = -3$$

$$2^x = 2$$
$$x = 1$$

$$2^x = -3$$

Nemá řešení

$$Zk: L(1) = 4^1 + 2^1 - 6 = 0$$
$$P(1) = 0$$
$$L(1) = P(1)$$

$$K = \{1\}$$

4 LOGARITMY A JEJICH VLASTNOSTI

Logaritmus čísla ***x*** o základu ***a*** je takové číslo ***y***, pro které platí ***a^y = x***.

$$\log_a x = y, \quad \text{právě když } a^y = x$$

Např.: log 10 = 1, neboť $10^1 = 10$
log 100 = 2, neboť $10^2 = 100$

Pro každé ***a > 0, a ≠ 1*** platí:

$$\log_a 1 = 0, \mathit{neboť}\ a^0 = 1$$
$$\log_a a = 1, \mathit{neboť}\ a^1 = a$$

Nechť ***a > 0, a ≠ 1*** a nechť x_1, x_2 jsou libovolná čísla. Potom platí:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$
$$\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$$
$$\log_a x^r = r \log_a x \ \ pro \forall r \in R$$
$$\log_a \sqrt[n]{x^r} = \frac{r}{n} \log_a x \ \ pro \forall n \in N$$

5 LOGARITMICKÉ ROVNICE

Při řešení **logaritmických rovnic** využíváme pravidlo:

$$\log_a x_1 = \log_a x_2, \quad \text{právě když } x_1 = x_2$$

Př.1:

$$2\log_{10}(x-1) = 0{,}5\left(\log_{10} x^5 - \log_{10} x\right)$$

$$2\log_{10}(x-1) = 0{,}5\left(\log_{10} \frac{x^5}{x}\right)$$

$$2\log_{10}(x-1) = 0{,}5\log_{10} x^4$$

$$2\log_{10}(x-1) = 2\log_{10} x$$

$$\log_{10}(x-1) = \log_{10} x$$

$$(x-1) = x$$

$$0x = -1$$

$$K = \{\ \}$$

Podmínka:
x-1>0 , x>0
$\Rightarrow$D = (1;∞)

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Funkce. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1996.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.