

# 9. Derivace funkce

Repetitorium z matematiky

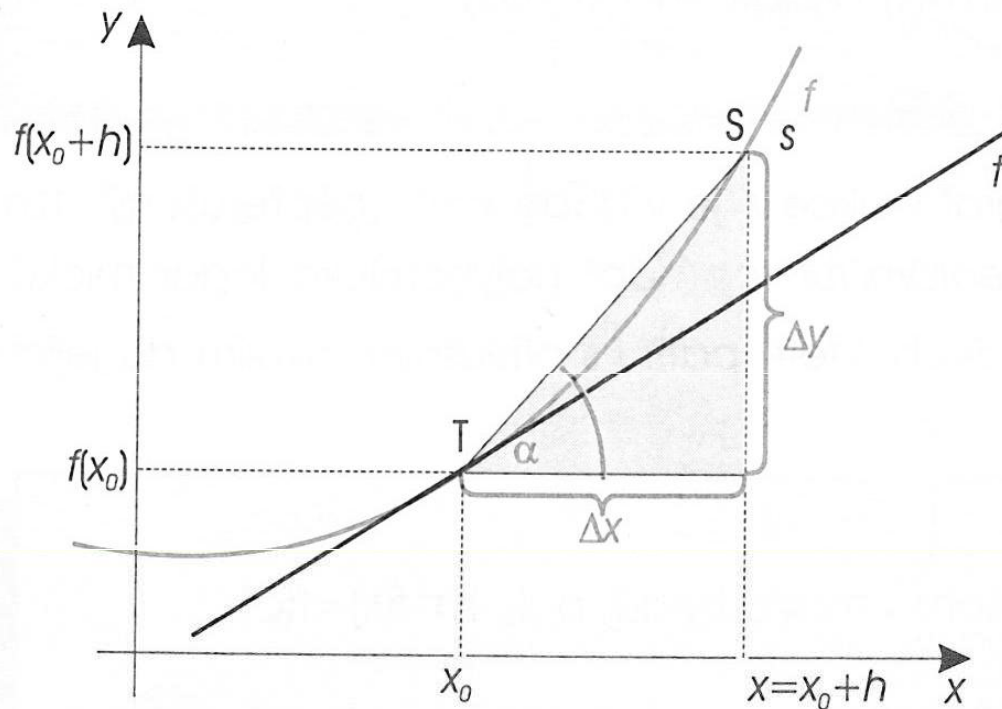
Podzim 2012

Ivana Medková

# Osnova:

- 1 Pojem derivace
- 2 Geometrický význam derivace funkce
- 3 Derivace základních funkcí
- 4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí
- 5 Vzorce pro derivaci složené funkce
- 6 Aplikace – vyšetřování průběhu funkce
  6. 1 Vyšetřování monotónnosti funkce užitím derivací
  6. 2 Vyšetřování lokálních extrémů funkce užitím derivací

# 1 Pojem derivace



Je-li funkce  $f$  definována v okolí bodu  $x_0$  a existuje-li limita

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

potom tuto limitu označujeme  $f'(x_0)$  a nazýváme ji **derivací funkce  $f$  v bodě  $x_0$** .

**Derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0$  je tedy číslo:**

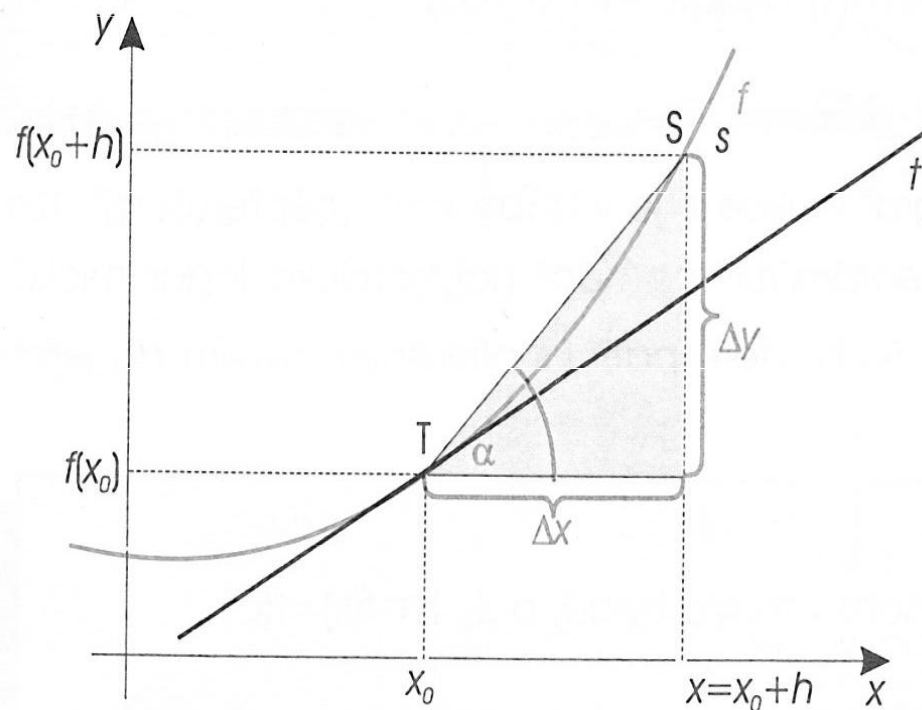
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pozn.: Při označení  $x = x_0 + h$  a  $x - x_0 = h$ :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

## 2 Geometrický význam derivace funkce

Pro směrnici tečny  $k_T$  ke grafu funkce  $f$  v bodě T  $[x_0, y_0]$  platí:  $k_T = f'(x_0)$



Platí totiž: směrnice sečny ST je

$$k_S = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Pokud se bude bod S přibližovat k bodu T, bude se poloha sečny „blížit“ poloze tečny v bodě T  $[x_0, y_0]$ .

Pro směrnici tečny tedy dostaneme:

$$k_T = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

Rovnici tečny pak můžeme psát ve tvaru:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

# 3 Derivace základních funkcí

Funkce $f: y = f(x)$	Vzorce pro derivaci funkce $f$	Podmínky platnosti vzorce ( $x \in D(f')$ )
$y = c (c \in \mathbb{R})$	$y' = 0$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^n, n \in \mathbb{N}$	$y' = nx^{n-1}$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = x^k, k \in \mathbb{Z}$	$y' = kx^{k-1}$	$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$y = x^r, r \in \mathbb{R}$	$y' = rx^{r-1}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = a^x (a > 0, a \neq 1)$	$y' = a^x \ln a$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \log_a x (a > 0)$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$	$x \in (0, +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in (-\infty, +\infty)$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( (2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2} \right)$
$y = \operatorname{cotg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi, (k+1)\pi)$

# 4 Vzorce pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu funkcí

Jestliže funkce  $f: u = f(x)$ ,  $g: v = g(x)$  mají derivaci v každém bodě  $x \in M$ , pak pro derivaci součtu, rozdílu, součinu a podílu těchto funkcí platí pro všechna  $x \in M$  ( $u$  podílu  $g(x) \neq 0$ ) následující vzorce:

$$\text{a) } (u + v)' = u' + v',$$

$$\text{b) } (u - v)' = u' - v',$$

$$\text{c) } (uv)' = u'v + uv',$$

$$\text{d) } (cu)' = cu', \quad c \in \mathbb{R},$$

$$\text{e) } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad v \neq 0.$$

## Úlohy:

Vypočtěte v přípustných bodech derivace funkcí daných funkčními předpisy:

$$\text{a) } y = x^5 + x^3$$

$$\text{b) } y = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$$

$$\text{c) } y = x^3 + \ln x - \sin x$$

$$\text{d) } y = x^2 \sin x$$

$$\text{e) } y = (x - 1) / (x + 1)$$

$$\text{f) } y = (1/x^2) e^x$$

# 5 Vzorce pro derivaci složené funkce

Jestliže je dána složená funkce  $F: y = f(g(x))$ , přičemž vnitřní funkce  $g$  má derivaci v každém bodě  $x \in M$  a vnější funkce  $f$  má derivaci  $f'$  v každém odpovídajícím bodě  $u = g(x)$ , pak složená funkce  $F = f \circ g$  má derivaci  $F'$  v každém bodě  $x \in M$ , pro niž platí:

$$F'(x) = f'(u) g'(x)$$

## Úlohy:

Vypočtete derivaci složené funkce:

a)  $y = \sin(7x)$

b)  $y = (3x^2 - 2)^4$

c)  $y = 5 \sin^2 x$

d)  $y = \cos(1 - 2x)$

# 6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

## 6. 1 Monotónnost funkce

Nechť funkce  $f$  je spojitá na intervalu  $\langle a, b \rangle$  a má v každém bodě  $x \in (a; b)$  derivaci  $f'(x_0)$ . Pak platí:

- Je-li  $f'(x_0) > 0$  pro každé  $x \in (a; b)$   $\Rightarrow$   $f$  je **rostoucí** na  $\langle a, b \rangle$  .
- Je-li  $f'(x_0) < 0$  pro každé  $x \in (a; b)$   $\Rightarrow$   $f$  je **klesající** na  $\langle a, b \rangle$  .

### Úlohy:

Určete intervaly, v nichž jsou rostoucí, resp. klesající funkce

a)  $f : y = x^3 - 5x^2 + 3x$

b)  $f : y = x^3 - 12x$

c)  $f : y = x^2 + 4x - 5$



# 6 Aplikace: vyšetřování průběhu funkce

## 6. 2 Extrémy funkce

Má-li funkce  $f$  v bodě  $x_0$  derivaci a je-li  $f'(x_0) = 0$ , pak  $x_0$  nazýváme **stacionárním bodem**. V tomto bodě  $x_0$  může, ale nemusí mít funkce lokální extrém – jedná se o bod „podezřelý“ z extrému.

Nechť  $f'(x_0) = 0$  a necht' existuje v bodě  $x_0$  druhá derivace. Pak:

- Je-li  $f''(x_0) < 0$  → má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré **lokální maximum**.
- Je-li  $f''(x_0) > 0$  → má funkce  $f$  v bodě  $x_0$  ostré **lokální minimum**.

### Úloha:

Vyšetřete průběh funkce  $f : y = x^3 - 3x^2$  a načrtněte její graf.

# Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Hrubý, D., Kubát, J. Matematika pro gymnázia – Diferenciální a integrální počet. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.