

2 Maticová algebra

Matematika pro ekonomy

Jaro 2012

Ivana Vaculová

Osnova

1 Matice – základní pojmy (definice, typ matice, řádkové a sloupcové vektory)

2 Druhy matic - nulová matice,

- jednotková matice,

- transponovaná matice,

- čtvercová matice - regulární, singulární,

- trojúhelníková matice.

3 Základní maticové operace – rovnost matic,

- součet matic,

- reálný násobek matice,

- součin matic.

4 Determinant

5 Inverzní matice

6 Hodnota matice

7 Soustava lineárních rovnic

1 Matice – základní pojmy

Definice 1.1:

Schéma $m.n$ reálných (komplexních) čísel

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ nazýváme maticí } A \text{ typu } (m, n).$$

Poznámky:

1. Čísla a_{ij} jsou **prvky matice**. Přitom a_{ij} značí prvek, který leží v **i -tém řádku a j -tém sloupci** matice A . Index i se proto nazývá **řádkový index** prvku a_{ij} a j **sloupcový index** prvku a_{ij} .
2. Je-li $m = n$, pak matici A nazýváme **čtvercovou maticí** řádu n .
3. Je-li A **matice řádu n** , pak aritmetický vektor (a_{11}, a_{22}, a_{nn}) se nazývá její **hlavní diagonála** a aritmetický vektor $(a_{1n}, a_{2, n-1}, \dots, a_{n1})$ její **vedlejší diagonála**.
4. Každý z **m řádků** matice A můžeme chápat jako **n -rozměrný aritmetický vektor**, každý z **n sloupců** můžeme chápat jako **m -rozměrný aritmetický vektor**.
5. Matice budeme označovat velkými písmeny A, B, \dots nebo (a_{ij}) .

2 Druhy matic

➤ **Nulová matice 0** je matice, jejíž všechny prvky jsou rovny nule.

➤ **Jednotková matice E** je čtvercová matice řádu n , jejíž všechny prvky v hlavní diagonále se rovnají **1** ($a_{ii} = 1$) a ostatní prvky jsou rovny **0** ($a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$).

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ - jednotková matice 3. řádu.}$$

➤ Maticí **transponovanou A^T** k matici A typu (m, n) rozumíme matici typu (n, m) , kterou získáme z matice A **výměnou řádků za sloupce**.

➤ Matice A se nazývá **symetrická**, platí-li $A = A^T$. Je to tedy **čtvercová matice**, jejíž **prvky symetricky** umístěné vzhledem k **hlavní diagonále** jsou **stejné**.

➤ Matice A typu (m, n) , která má **pod**, resp. **nad diagonálními prvky** a_{ii} samé **nuly**, takže $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, resp. $i < j$, se nazývá **trojúhelníková**.

3 Základní operace s maticemi

3.1 Rovnost matic

Definice 3.1

Dvě matice A, B stejného typu (m, n) považujeme za sobě **rovné** a píšeme $\mathbf{A = B}$, mají-li všechny odpovídající prvky stejné, tj. $\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}$, pro všechna $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$.

3.2 Součet matic

Definice 3.2

Nechť matice $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, jsou téhož typu (m, n) . Pak jejich **součtem** rozumíme matici $C = A + B$, kde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

3.3 Násobení matic reálným číslem

Definice 3.3

Součinem matice $A = (a_{ij})$ typu (m, n) a reálného čísla k nazýváme matici $B = k \cdot A$, kde $b_{ij} = ka_{ij}$ pro všechna $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Pravidla pro sčítání matic a násobení matice reálným číslem:

- **Komutativní zákony**

$$A + B = B + A, \quad k.A = A.k, \quad k \in \mathbf{R}.$$

- **Asociativní zákony**

$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad k.(l.A) = (k.l).A, \quad k, l \in \mathbf{R}.$$

- **Distributivní zákony**

$$k.(A + B) = k.A + k.B, \quad (k + l)A = k.A + l.A, \quad k, l \in \mathbf{R}.$$

- **Existence nulové matice**

Existuje taková matice 0 , že pro každou matici A platí:

$$A + 0 = A.$$

- **Existence opačné matice**

Ke každé matici A existuje taková matice $-A$, že

$$A + (-A) = 0.$$

Pozn.: Z uvedeného vyplývá, že množina všech matic typu (m, n) tvoří vzhledem k operacím sčítání matic a násobení matice reálným číslem **vektorový prostor**.

3.4 Součin matic

Definice 3.4

Nechť $A = (a_{ij})$ je maticí typu (m, n) a $B = (b_{jk})$ je matice typu (n, p) .

Součinem matic $A \cdot B$ (v tomto pořadí) je matice $C = A \cdot B = (c_{ik})$ typu (m, p) , kde

$$c_{ik} = a_{ij} \cdot b_{jk} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}.$$

Pravidla pro násobení matic:

- **Asociativní zákon**

$$(A.B).C = A.(B.C).$$

- **Distributivní zákony**

$$(A + B).C = A.C + B.C \text{ (pro násobení zprava),}$$

$$C.(A + B) = C.A + C.B \text{ (pro násobení zleva).}$$

- **Násobení jednotkovou maticí E**

$$A.E = E.A = A \text{ pro každou čtvercovou matici } A \text{ řádu } n.$$

- **Násobení nulovou maticí 0**

$$A.0 = 0.A = 0.$$

- **Je-li $A.B = 0$, pak nemusí být ani $A = 0$, ani $B = 0$.**

- Obecně **neplatí komutativní zákon**, tj. obecně $A.B \neq B.A$.

- Existuje-li součin matic $A.B$, pak **$(A.B)^T = B^T.A^T$** .

4 Determinanty

Definice 4.1:

Determinantem (řádu n) **čtvercové matice A** řádu n , jejímiž prvky a_{ij} jsou reálná (popř. komplexní) čísla, nazýváme **číslo**, které značíme **$\det A$** ; **$|A|$** a definujeme takto:

1. Je-li $n = 1$, pak $\det A = a_{11}$.

2. Pro $n \geq 2$ je

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} A_{1j} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}$$

kde matice A_{1j} vznikne z matice A vynecháním prvního řádku a j -tého sloupce.

4.1 Výpočet determinantu matice A řádu $n = 2$

Při výpočtu $\det A$ ($n = 2$) postupujeme tak, že od součinu prvků na hlavní diagonále odečteme součin prvků na vedlejší diagonále:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

4.2 Výpočet determinantu matice A řádu n = 3

A) Užitím definice pro výpočet det A, kde A je řádu n ≥ 2:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) - a_{12} (a_{21} a_{33} - a_{23} a_{31}) + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - (a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31}).$$

B) Pomocí tzv. Sarrusova pravidla:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - (a_{11} a_{23} a_{32} + a_{12} a_{21} a_{33} + a_{13} a_{22} a_{31}).$$

4.2 Výpočet determinantu matice A vyšších řádů

Věta (Laplaceův rozvoj)

Pro čtvercovou matici A řádu n platí:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad - \text{rozvoj determinantu podle } i\text{-tého řádku,}$$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad - \text{rozvoj determinantu podle } j\text{-tého sloupce,}$$

kde matice A_{ij} vznikne z matice A vynecháním i -tého řádku a j -tého sloupce.

Poznámky

1. Determinant matice A_{ij} nazýváme **subdeterminantem** vzhledem k prvku a_{ij} .
2. Součin $(-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij}$ nazýváme **algebraickým doplňkem prvku a_{ij}** a značíme

4.2 Pomocné věty pro výpočet determinantu

Věta 4.2.1

Vyměníme-li ve čtvercové matici A navzájem dva řádky (sloupce), pak pro takto vzniklou matici B platí: **$\det B = - \det A$** .

Věta 4.2.2

Má-li matice A dva řádky (sloupce) stejné, pak **$\det A = 0$** .

Věta 4.2.3

Nechť matice B vznikne tak, že k p -tému řádku (sloupci) čtvercové matice A řádu n přičteme k násobek, $k \in \mathbb{R}$, q -tého řádku (sloupce), $p \neq q$.

Pak platí **$\det A = \det B$** .

Poznámka

Čtvercová matice A řádu $n \geq 2$, jejíž determinant **$\det A \neq 0$** , se nazývá *regulární*. V opačném případě jí říkáme *singulární* (**$\det A = 0$**).

5 Inverzní matice

Definice 5.1

Inverzní maticí k čtvercové matici A řádu n rozumíme takovou čtvercovou matici A^{-1} řádu n , pro kterou platí:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}, \quad \text{kde } \mathbf{E} \text{ je jednotková matice řádu } n.$$

6 Hodnost matice

Definice 6.1

Nechť $A = (a_{ij})$ je matice typu (m, n) . Považujme řádky za aritmetické vektory vektorového prostoru V^n . **Hodnost matice A** je r (značíme $h(A) = r$), existuje-li r **lineárně nezávislých řádků** matice A a každých $r+1$ řádků je lineárně závislých.

Poznámka

Hodnost matice A typu (m, n) bychom mohli definovat pomocí sloupcových vektorů z vektorového prostoru V^m . Obě definice vedou k témuž výsledku $h(A) = r$.

Věta 6.1

Nechť A je libovolná matice typu (m, n) . **Hodnost matice A** se **nezmění** při kterékoliv z následujících elementárních úprav:

- a) záměně pořadí řádků (sloupců),
- b) násobení jednotlivých řádků (sloupců) čísly $k_i \neq 0$,
- c) přičtení k některému řádku (sloupci) lineární kombinace zbývajících řádků (sloupců),
- d) vynecháním řádku, který je lineární kombinací zbývajících řádků.

7 Soustava lineárních rovnic

Mějme soustavu m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned}$$

Označme:

matice soustavy

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

vektor neznámých

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

vektor pravých stran

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

rozšířená matice soustavy

$$A | b = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

Pak $A \cdot X = B$ je **maticový zápis rovnice**.

Je-li matice A regulární, pak má soustava lineárních rovnic $A \cdot X = B$ právě jedno řešení:

$$X = A^{-1}B$$

(U rozsáhlejších soustav je však řešení pomocí inverzní matice náročné, proto častěji využíváme tzv. Gaussovu eliminační metodu.)

Poznámka:

Jestliže $b_k = 0$ pro $k = 1, \dots, m$, pak soustavu (1) nazýváme soustavou **homogenních rovnic**. Jestliže je alespoň jedno $b_k \neq 0$, hovoříme o soustavě **nehomogenních rovnic**.

7.1 Gaussova eliminační metoda řešení soustav lineárních rovnic

Předpokládejme, že matice $A' | B'$ vznikne z rozšířené matice soustavy $A | B$ úpravami:

- a) výměnou dvou řádků,
- b) vynásobením řádku číslem různým od nuly,
- c) vynecháním řádků se samými nulami,
- d) přičtením k -násobku ($k \neq 0$) řádku k jinému řádku.

Pak soustavy $A \cdot X = B$ a $A' \cdot X = B'$ mají stejná řešení. Správnost úvahy vyplývá z toho, že *každý řádek rozšířené matice soustavy odpovídá příslušné rovnici*. Uvedené úpravy můžeme s rovnicemi provádět.

Úpravy a) až d) **nemění hodnost** matice A ani matice $A | B$.

Užitím úprav a) až d) budeme **postupně upravovat** rozšířenou matici soustavy **na trojúhelníkový tvar** tak, aby $a_{ij} = 0$ pro $i > j$.

Na takto upravenou soustavu rovnic poté aplikujeme **Frobeniovu větu**:

- 1) **Soustava $AX = B$ má řešení $\Leftrightarrow h(A) = h(A | b) = k$**
- 2) **Pokud $k < n$...soustava má nekonečně mnoho řešení.**
Pokud $k = n$ soustava má právě jedno řešení.

Literatura

- Kaňka M. a kol. Učebnice matematiky pro ekonomické fakulty. Praha: Victoria Publishing, 1996.
- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Kočandrlé, M. Boček, L. Matematika pro gymnázia – Analytická geometrie, Praha: Prometheus, 1995.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/08_MI_KAP%202_1.pdf