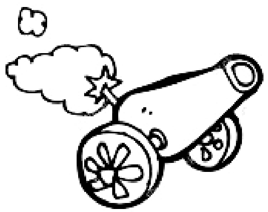
Pády a výstupy na rotující Zemi

Jan Novotný

KFCHOV Masarykova univerzita

Osnova

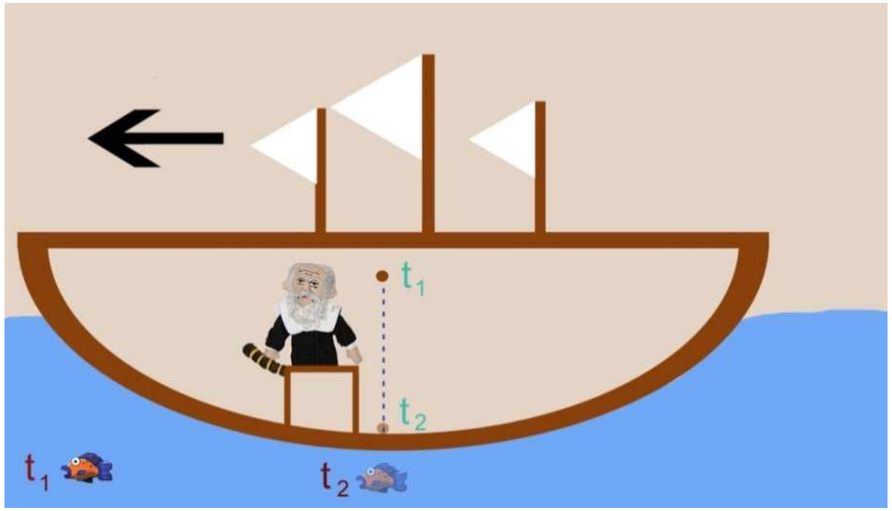
- Historie
- Literatura
- Rovnice
- Iterační metoda
- Omyly
- Kosmický výtah
- Závěr



Historie

Vztah k principu relativity (Galileo, Dialog)

Vejděte do podpalubí lodi, zavěste nahoru vědro, z něhož bude kapat voda do dole stojící nádoby s úzkým hrdlem.
Uveďte loď do pohybu libovolnou rychlostí.
Bude-li její pohyb rovnoměrný, kapky padnou jako předtím do spodní nádoby



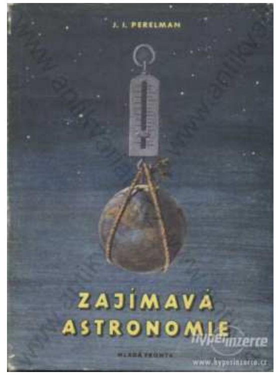
Je tento pokus přesnou ilustrací principu relativity?

Bude těleso či kapka na rotující Zemi padat přesně po svislici?

Zůstane jeho pohyb zcela nezměněn při pohybu lodi?

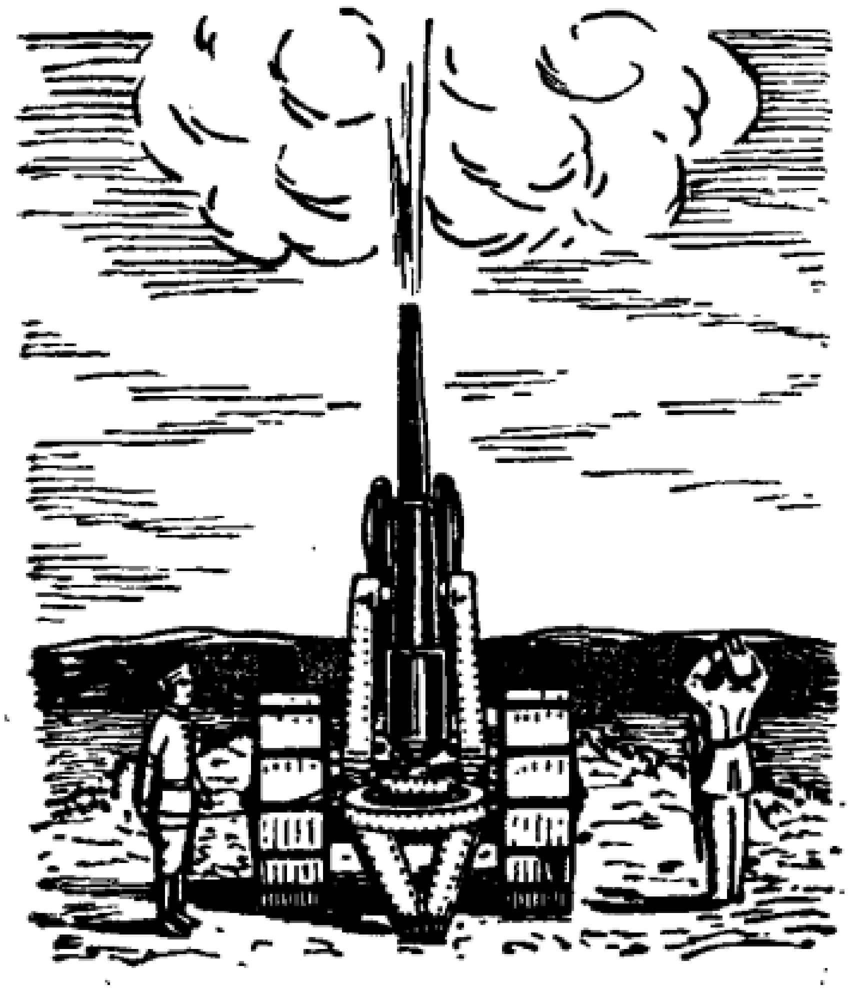
Záludná otázka z astronomie ...

Spadne kolmo vzhůru vypálená střela zpět do hlavně? J. I. *PERELMAN - ZAJÍMAVÁ ASTRONOMIE*.



Odpověď 1:
Ne, při startovní rychlosti 8000 m/s spadne střela za 140 minut o 4000 km na západ

Odpověď 2:
Ano, říká Flammarion na základě Principu relativity



Odpověď 3: Oba se mýlí, ale Flammarion je pravdě mnohem blíže

Pohyb v rotující soustavě

Rovnice:

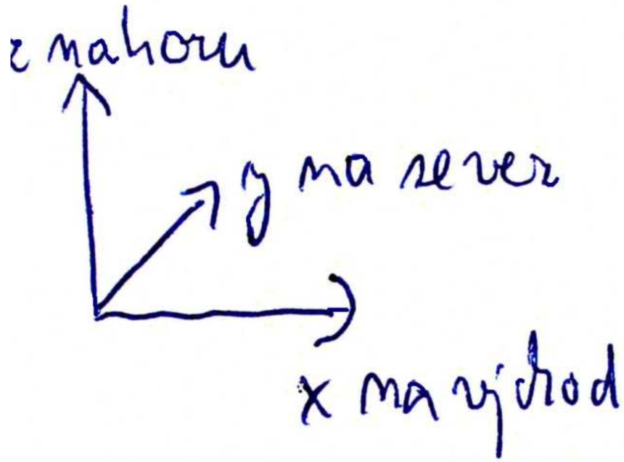
$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt}$$

ω $-$*úhlová rychlost*

g $-$*tíhové zrychlení*

počáteční podmínky

$$\vec{r}(0) = \vec{r}_0 \,, \vec{v}(0) = \vec{v}_0$$



Integrací pohybových rovnic dostaneme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_0 + \vec{g}t - 2\vec{\omega}\times(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Nultá aproximace řešení je pohyb bez vlivu Coriolisovy síly

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2$$

První aproximaci dostaneme dosazením a integrací

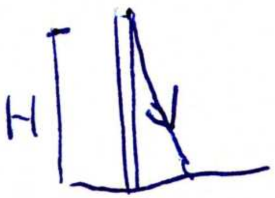
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{g}t^2 - \vec{\omega}t\times\left(\vec{v}_0 t + \tfrac{1}{3}\vec{g}t^2\right)$$

Takto lze pokračovat do stále vyšších aproximací

Srovnání pádu a vrhu v 1.aprox.

Pád

$$\vec{r}_0 = (0,0,H)$$
$$\vec{v}_0 = (0,0,0)$$



$$x = \tfrac{1}{3} g\omega t^3 \cos\varphi$$
$$y = 0$$
$$z = H - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$V_P = g\frac{T_V}{2} = \sqrt{2gH}$$

$$x_P = \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\omega\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi$$

odchylka při dopadu směřuje na východ

$$\vec{\omega} = (0, \omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$$
$$\vec{g} = (0,0,-g)$$
$$\vec{r} = (x,y,z)$$

Vrh

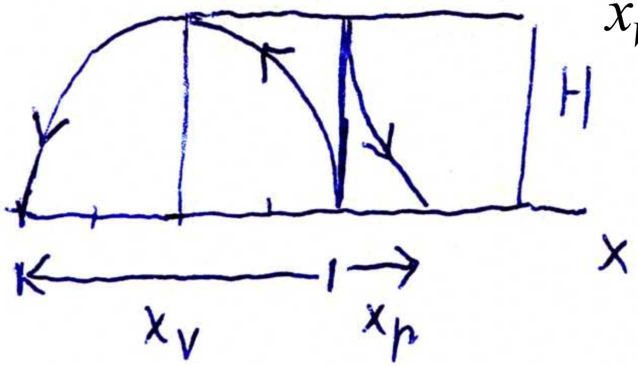
$$\vec{r}_0 = (0,0,0)$$
$$\vec{v}_0 = (0,0,V)$$

$$x = -\omega\cos\varphi\left(Vt^2 - \tfrac{1}{3} g t^3\right)$$
$$y = 0$$
$$z = Vt - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$T_V = \frac{2V}{g} = 2T_P$$

$$x_V = -\tfrac{8}{3}\sqrt{2}\,\omega\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi$$

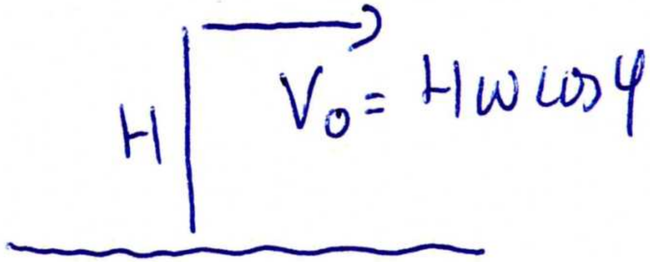
odchylka při dopadu směřuje na západ



při stejné výšce je tedy v první aproximaci $x_V = -4x_P$

Chybná řešení

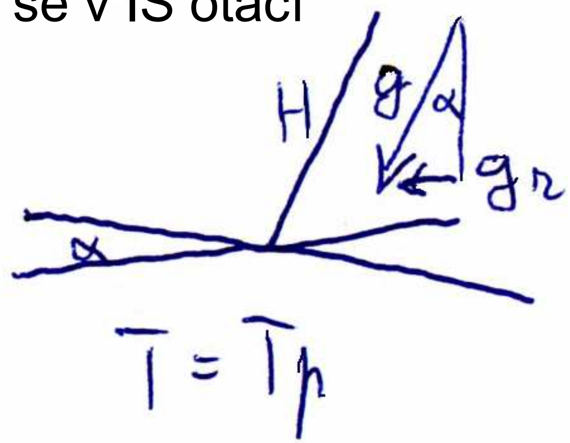
A, řešení se snahou vyhnout se integraci
V inerciální soustavě, v níž je na počátku v klidu pata věže,jde o vodorovný vrh s počáteční rychlostí v_o.
Východní odchylka se počítá jako



$$\tilde{x}_P = H\omega T_P \cos\varphi = H\omega\sqrt{\frac{2H}{g}}\cos\varphi = \sqrt{2}\,\omega\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi$$

Potíž je v tom, že pak $\tilde{x}_P = \frac{3}{2}x_P$ výsledek zřejmě nesprávný. V čem je chyba?

Odpověď:
Ani v naší IS nelze zanedbat pohyb vrcholu věže. Spolu s věží se v IS otáčí vodorovná rovina a tedy i vektor **tíhového** zrychlení $\boldsymbol{g}$.



Srovnejme situace v časech $t = 0,\ t = T_p$

$$g_r = -g\omega t\cos\varphi$$

$$v_r = -g\omega\frac{t^2}{2}\cos\varphi$$

$$x_r = -g\omega\frac{t^3}{6}\cos\varphi = -\frac{1}{3}\omega\sqrt{2}\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi \qquad x_P = \tilde{x}_p + x_r = \frac{2}{3}\omega\sqrt{2}\sqrt{\frac{H^3}{g}}\cos\varphi$$

Chybná řešení:

B, Počítá se v NIS následovně (rovník)

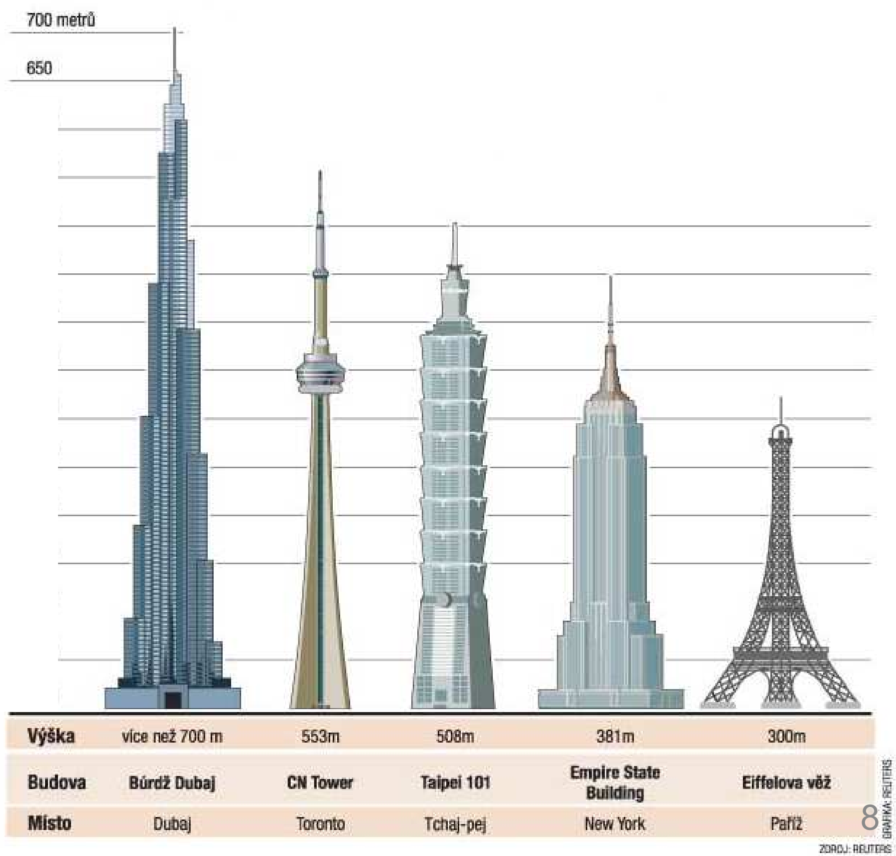
$$\tilde{x}_P = \int_0^{T_P} v_x dt = \int_0^{T_P} a_c t dt = \int_0^{T_P} 2\omega g t^2 dt = 4\frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{\frac{H^3}{g}} = \frac{3}{2}x_P$$

Správně je $$x_P = \int_0^{T_P}\left(\int_0^{t} a_c d\tau\right)dt = \int_0^{T_P} \omega g t^2 dt$$

Porovnání odchylka (80 m vysoká věž) - nesprávně 2,3 cm, správně 1,53 cm

$$x_{\mathrm{d}} = \frac{1}{3}\omega g\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}\cos\varphi.$$

budova	h	φ	x_{d}
mrakodrap Tchaj-pej 101	508 m	25°	22,7 cm
Eiffelova věž	300 m	48°	7,6 cm
Petřínská rozhledna	60 m	50°	6,5 mm



Přesné řešení rovnic pro pohyb rotující soustavy

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{g} - 2\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dx} \qquad \vec{g} = konst,\ \vec{\omega} = konst.$$ po rozepsání do složek :

$$\vec{g} = (0,0,-g),\ \vec{\omega} = (0,\omega cos\,\varphi,\omega sin\,\varphi).$$

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}\,sin\,\varphi - 2\omega\dot{z}\,cos\,\varphi$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\,sin\,\varphi$$

$$\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\,cos\,\varphi$$

Zderivováním první rce dostaneme

$$\dddot{x} = 2\omega\ddot{y}\,sin\,\varphi - 2\omega\ddot{z}\,cos\,\varphi = 2\omega g\,cos\,\varphi - 4\omega^2\dot{x}$$

lze řešit substitucí $\dot{x} = \xi$

pro případ volného pádu dostaneme

$$x = \frac{g\,cos\,\varphi}{2\omega^2}\left(\omega t - sin\,\omega t\,cos\,\omega t\right)$$

$$y = -\frac{g\,sin\,\varphi\,cos\,\varphi}{2}\left(t^2 - \frac{sin^2\,\omega t}{\omega^2}\right)$$

$$z = H - \frac{g}{2}\left(t^2\,sin^2\,\varphi + cos^2\,\varphi\cdot\frac{sin^2\,\omega t}{\omega^2}\right)$$

Geostacionární objekt - orbita leží v rovině rovníku a úhl.rychlost je 2pi/den.
Hledáme výšku orbity *R* nad povrchem Země – výpočet z rovnosti odstředivé a gravitační síly.

$$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2} \qquad \Rightarrow \qquad R = \sqrt[3]{\frac{GM}{\omega^2}}\,, \qquad R = 35\,800\,\mathrm{km}$$

Pro kosmický výtah – délka lana, které nespadne

$$\mathrm{d}F_\mathrm{o} - \mathrm{d}F_\mathrm{g} = \mathrm{d}mr\omega^2 - G\,\frac{\mathrm{d}mM}{r^2} \qquad \mathrm{d}m = \sigma\,\mathrm{d}r$$

hustota lana

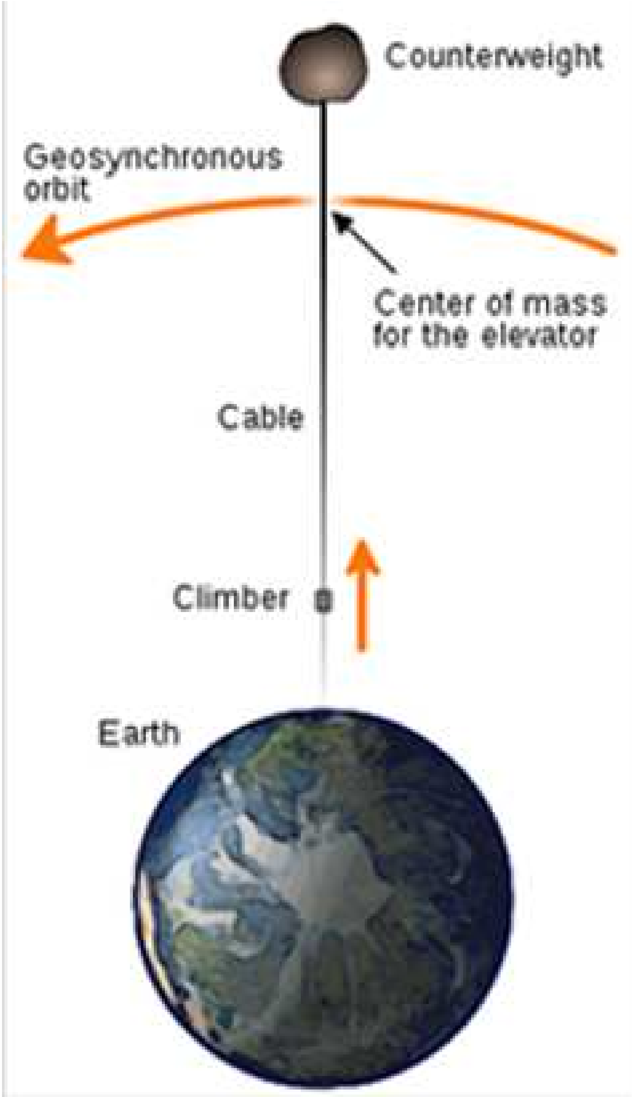
$$\int_{R_\mathrm{Z}}^{H}\left(G\frac{\sigma M}{r^2} - \sigma\omega^2 r\right)\mathrm{d}r = 0\,,$$

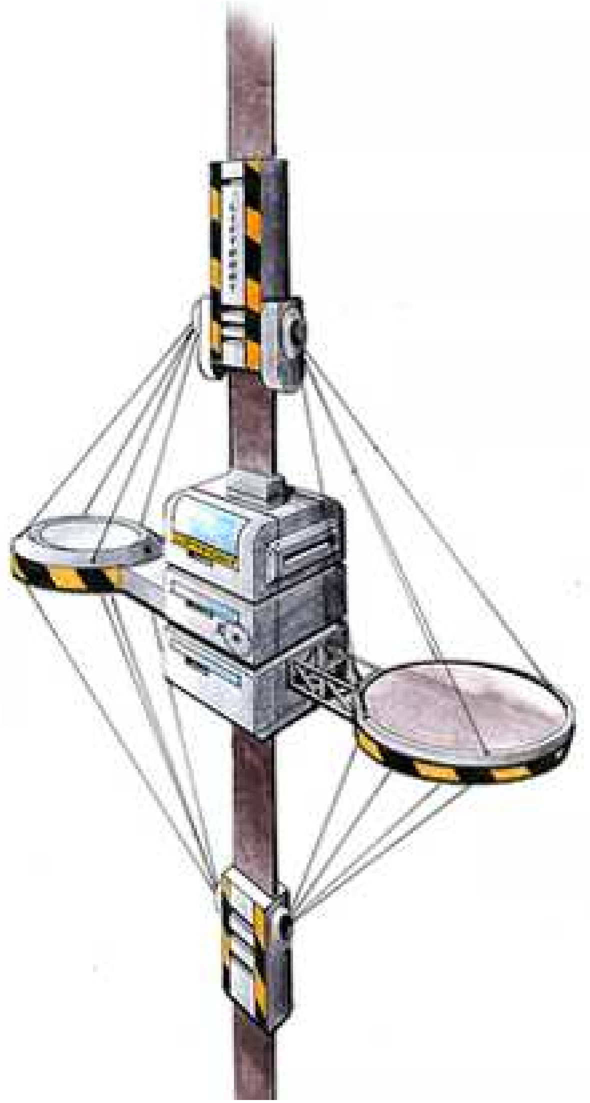
$$G\sigma M\left(-\frac{1}{H} + \frac{1}{R_\mathrm{Z}}\right) - \frac{\sigma\omega^2}{2}\left(H^2 - R_\mathrm{Z}^2\right) = 0\,.$$

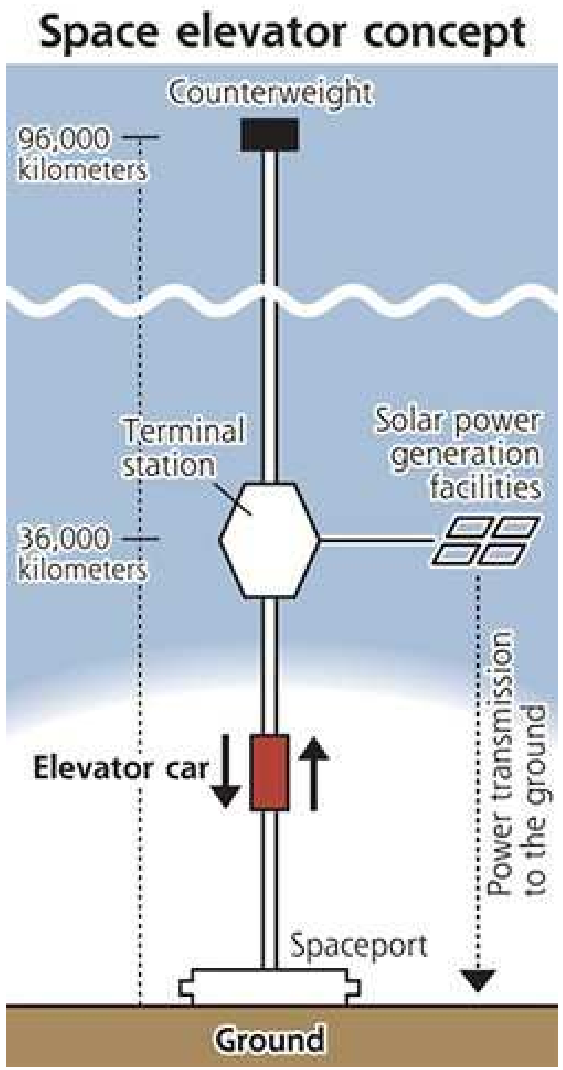
$$H = \frac{1}{2}\left(\sqrt{R_\mathrm{Z}^2 + \frac{8R^3}{R_\mathrm{Z}}} - R_\mathrm{Z}\right)\,.$$

Po dosazení vyjde velmi velmi dlouhé lano asi 150 10^3 km ☺

Kosmický výtah







Zdroje:

Fyzweb: fyzweb.cz/materialy/srazky_a_rotace/

Fyzikální korespondenční seminář: http://fykos.cz/zadani

Wikipedie: Orbitální výtah

Červenka,M.: 195 problémů z mechaniky,elektřiny a magnetismu,

*fyzika.feld.cvut.cz/~**cervenka**/vyuka/psfkyr/priklady.pdf*