

# Teoretická mechanika

Jiří Langer a Jiří Podolský

Studijní text k přednášce NOFY003  
„Teoretická mechanika“

Ústav teoretické fyziky  
Matematicko-fyzikální fakulta  
Univerzita Karlova v Praze

listopad 2013

# Obsah

<b>1</b>	<b>Rovnice struny a její řešení</b>	<b>2</b>
1.1	Odvození rovnice pro příčné kmity struny . . . . .	2
1.2	Lagrangeova funkce struny . . . . .	3
1.3	Řešení rovnice struny . . . . .	4
1.3.1	Metoda d'Alembertova . . . . .	4
1.3.2	Metoda Bernoulliova–Fourierova . . . . .	5
1.3.3	Příklad na Fourierovy řady . . . . .	6
1.4	Další okrajové podmínky: volný konec, tření . . . . .	7
<b>2</b>	<b>Mechanika kontinua</b>	<b>9</b>
2.1	Lagrangeův a Eulerův popis . . . . .	9
2.2	Tekutý objem . . . . .	11
2.3	Síly objemové a plošné, podmínky rovnováhy . . . . .	12
2.4	Rovnice kontinuity a pohybová rovnice . . . . .	13
2.5	Newtonovská a dokonalá tekutina . . . . .	14
2.6	Nevířivé proudění dokonalé tekutiny a Bernoulliho rovnice . . . . .	14
2.7	Vlny v dokonalé tekutině . . . . .	15
2.8	Proudění vazké tekutiny, Navierova–Stokesova rovnice . . . . .	16
2.9	Geometricky podobná proudění . . . . .	16

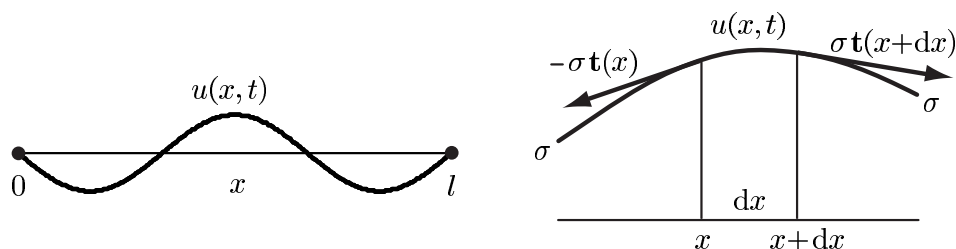
# Kapitola 1

## Rovnice struny a její řešení

V této kapitole prostudujeme příčný pohyb struny, jednorozměrného spojitého útvaru, na který působí vnitřní síly napětí. Nejprve odvodíme parciální diferenciální pohybovou rovnici struny a potom uvedeme dvě obecné metody jejího řešení, d'Alembertovu a Bernoulliovu–Fourierovu. Rozbor struny představuje důležitý přechod od mechaniky diskrétních hmotných bodů k mechanice spojitého kontinua, které se budeme věnovat v následující kapitole 2.

### 1.1 Odvození rovnice pro příčné kmity struny

Uvažujme strunu, jejíž konce jsou upevněny v bodech 0 a  $l$  na ose  $x$ . Předpokládejme, že struna je napjatá vnitřním napětím  $\sigma$  a její hmotnost je ve směru  $x$  rozložena s konstantní lineární hustotou  $\rho$ .



Nechť struna koná jen příčné kmity. Její výchylku z rovnovážné polohy popíšeme funkcí  $u(x, t)$ . Souřadnice  $x$  představuje vlastně spojitý index, který označuje jednotlivé body struny. Předpokládejme dále, že výchylky jsou malé ve smyslu, který vyplyne z přiblížení, jež v dalším použijeme. Při kmitech se sice mění délka struny a podle Hookova zákona i napětí v ní. Budeme však předpokládat, že tato změna napětí  $\sigma$  je zanedbatelná, což bude splněno například tehdy, když struna má velké základní předpětí.

Protože struna kmitá jen kolmo na osu  $x$ , je její zrychlení v příčném směru dáno veličinou  $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t)$ . Newtonova pohybová rovnice úseku struny délky  $dx$  o hmotnosti  $\rho dx$  proto je

$$\rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_y. \quad (1.1)$$

Nyní musíme odvodit velikost kolmé síly  $F_y$  působící na daný úsek struny v důsledku napětí  $\sigma$ . Uvažme tedy obecnou výchylku struny popsanou v daném okamžiku funkcí  $y(x) \equiv u(x, t = konst.)$ . To je rovinná křivka  $x = x, y = y(x)$  s jednotkovým tečným vektorem  $\mathbf{t}(x) = k(1, \frac{dy}{dx})$ , kde normalizační faktor je  $k = 1/\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$ . Předpokládáme-li, že úhly, jež struna svírá s osou  $x$ , jsou malé, bude  $k \doteq 1$ . Na úsek struny mezi  $x$  a  $x + dx$  tedy působí výsledná síla  $\mathbf{F} = \sigma \mathbf{t}(x + dx) - \sigma \mathbf{t}(x)$ , neboť směry napětí velikosti  $\sigma$  působící na obou koncích jsou dány příslušnými tečnými vektory.

Pro složku výsledné síly do příčného směru  $y$  můžeme tedy s užitím Taylorova rozvoje psát

$$F_y = \sigma \left[ \frac{dy}{dx}(x + dx) - \frac{dy}{dx}(x) \right] \doteq \sigma \frac{d^2y}{dx^2}(x) dx. \quad (1.2)$$

Protože v libovolném fixním okamžiku  $t$  platí  $y(x) = u(x, t)$ , dostáváme z (1.1) a (1.2) na každém úseku  $dx$  pohybovou rovnici příčných kmitů struny

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Tuto rovnici struny snadno upravíme do tvaru

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}, \quad (1.3)$$

což je jednorozměrná vlňová rovnice pro funkci  $u(x, t)$ , přičemž  $\boxed{c = \sqrt{\sigma/\rho}}$  je, jak uvidíme, rychlost šíření vlny.

## 1.2 Lagrangeova funkce struny

Pohybovou rovnici struny (1.3) nyní odvodíme jiným způsobem, totiž z *Hamiltonova principu* zobecněného na spojitě rozloženou hmotnost. Abychom získali příslušnou akci  $S$ , musíme nejprve sestavit příslušnou Lagrangeovu funkci  $L$ .

Protože struna kmitá jen kolmo na osu  $x$ , je její rychlost  $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ . *Kinetická energie* úseku struny délky  $dx$  je  $\frac{1}{2}\rho dx \left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]^2$ , takže celková kinetická energie je

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right]^2 dx. \quad (1.4)$$

K nalezení *potenciální energie* musíme vyintegrovat příčnou sílu  $F_y$  působící na úsek struny  $dx$ , jež je dána vztahem (1.2). Práce vynaložená na její překonání při vychylování struny z rovnovážné polohy  $u = 0$  do okamžité výchylky  $u = u(x, t)$  v daném čase  $t$  je hledaná potenciální energie:

$$dV = \int_0^u F_y dy = \sigma dx \int_0^u \frac{d^2y}{dx^2} dy.$$

Zavedeme-li nyní pomocnou funkci  $z(y)$  vztahem  $\frac{dy}{dx}(x) \equiv z(y(x))$ , platí  $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx} = z \frac{dz}{dy}$ , takže

$$dV = \sigma dx \int_0^u z \frac{dz}{dy} dy = \sigma dx \int_0^{z(u)} z dz = \sigma dx \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{z(u)} = \frac{1}{2} \sigma z(u)^2 dx.$$

Protože  $z(u(x)) = \frac{du}{dx}(x)$ , je  $z(u) = \frac{\partial u}{\partial x} u(x, t)$  a integrací přes celou délku dostáváme celkovou potenciální energii

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} \sigma \left[ \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \right]^2 dx. \quad (1.5)$$

Lagrangeova funkce  $L = T - V$  struny je proto díky (1.4), (1.5) dána výrazem

$$L = \int_0^l \left( \frac{1}{2} \rho (u_{,t})^2 - \frac{1}{2} \sigma (u_{,x})^2 \right) dx,$$

kde jsme zavedli  $u_{,t} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$  a  $u_{,x} \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$  coby vhodné zkratky pro parciální derivace funkce  $u(x, t)$ . Je tudíž přirozené zavést funkci  $\mathcal{L}(u_{,x}, u_{,t})$  zvanou hustota Lagrangeovy funkce struny

$$\boxed{\mathcal{L} \equiv \frac{1}{2} \rho (u_{,t})^2 - \frac{1}{2} \sigma (u_{,x})^2}. \quad (1.6)$$

Příslušný *funkcionál akce* pro příčné kmity struny je

$$S \equiv \int_{t_1}^{t_2} L dt = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \mathcal{L}(u, u_x, u_t) dx dt,$$

Rovnice pohybu se nyní získá z *Hamiltonova principu*  $\boxed{\delta S = 0}$ . Připomeňme známý matematický výsledek variačního počtu: mějme obecný funkcionál dvou proměnných  $x$  a  $t$  tvaru

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \mathcal{L}(u, u_x, u_t, x, t) dx dt,$$

přičemž funkce  $u(x, t)$  nabývá na hranici integrační oblasti pevných hodnot. Pak extrémála tohoto funkcionálu, pro níž  $\delta S = 0$ , musí řešit Eulerovu-Lagrangeovu rovnici

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} \right) = 0}. \quad (1.7)$$

Aplikujeme-li podmínku (1.7) na hustotu Lagrangeovy funkce struny (1.6), dostaneme ihned

$$\sigma u_{,xx} - \rho u_{,tt} = 0,$$

což je rovnice struny (1.3).

## 1.3 Řešení rovnice struny

Nyní ukážeme dvě základní metody řešení jednorozměrné vlnové rovnice, tedy rovnice struny.

### 1.3.1 Metoda d'Alembertova

Transformace

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= x - ct, \\ \eta &= x + ct, \end{aligned}} \quad (1.8)$$

převeď rovnici (1.3) užitím relací  $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta}$  a  $\frac{\partial}{\partial t} = -c \frac{\partial}{\partial \xi} + c \frac{\partial}{\partial \eta}$  na tvar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Integrací podle  $\xi$  dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(\eta),$$

kde  $g(\eta)$  je libovolná funkce  $\eta$ . Další integrace dá

$$u(\xi, \eta) = \int g(\eta) d\eta + F(\xi) = F(\xi) + G(\eta), \quad (1.9)$$

kde  $F(\xi)$ ,  $G(\eta)$  jsou libovolné funkce. Dosazením příslušných proměnných ze (1.8) dostaneme tedy obecné řešení ve tvaru

$$\boxed{u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)}, \quad (1.10)$$

přičemž  $F$  reprezentuje *profil vlny* šířící se rychlostí  $c$  směrem doprava, zatímco  $G$  profil vlny putující doleva. Konkrétní tvar řešení určují počáteční podmínky, které klademe na řešení. Všimneme si, jak dostaneme funkce  $F$  a  $G$  z počátečních podmínek v případě *nekonečné* struny.

Předpokládejme, že v čase  $t = 0$  je zadána funkce  $u$  i její časová derivace,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x), \\ u_{,t}(x, 0) &= v_0(x). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Podle (1.10) tedy platí

$$F(x) + G(x) = u_0(x), \quad (1.12)$$

$$-cF'(x) + cG'(x) = v_0(x). \quad (1.13)$$

Integrací (1.13) dostaneme

$$-F(x) + G(x) = \frac{1}{c}V_0(x), \quad (1.14)$$

kde  $V_0(x) = \int v_0(x) dx$  je primitivní funkce k  $v_0(x)$  (s libovolnou integrační konstantou). Z (1.12) a (1.14) pak vypočteme  $F(x)$  a  $G(x)$ . Dosazením proměnných  $\xi = x - ct$  do argumentu  $F$  a  $\eta = x + ct$  do argumentu  $G$  dostaneme řešení vyhovující uvedeným počátečním podmínkám,

$$\boxed{u(x, t) = \frac{1}{2} \left[ u_0(x - ct) - \frac{1}{c}V_0(x - ct) + u_0(x + ct) + \frac{1}{c}V_0(x + ct) \right]}. \quad (1.15)$$

Je vidět, že konstrukce řešení je jednoznačná (primitivní funkce  $V_0$  je určena až na aditivní konstantu, která z výsledného řešení vypadne). Vskutku platí *věta o jednoznačnosti*, podle které je řešení vlnové rovnice jednoznačně určeno zadáním počátečních podmínek (1.11). Uvedené řešení se nazývá d'Alembertovo.

### 1.3.2 Metoda Bernoulliova–Fourierova

V principu lze výše uvedeného d'Alembertovo postupu užít i pro hledání řešení *konečné struny*, například s pevnými konci, které je navíc v každém okamžiku  $t$  omezeno okrajovou podmínkou

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0, \\ u(l, t) &= 0, \end{aligned} \quad (1.16)$$

viz závěr části 1.4 textu. Výhodnější je však užít postupu Bernoulliova. Při něm se hledá řešení rovnice (1.3) v separovaném tvaru  $\boxed{u(x, t) = X(x)T(t)}$ . Dosazením do (1.3) a úpravou dostaneme

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad (1.17)$$

kde čárka označuje derivaci podle  $x$  a tečka derivaci podle  $t$ . Vztah vyjadřuje rovnost mezi dvěma funkcemi *různých proměnných*, která má být splněna pro *všechny* hodnoty  $x$  a  $t$ . To nastává jen tehdy, rovnají-li se obě strany téže separační konstantě  $-\omega^2$ , kde  $\omega$  je reálné. (Pro nulové nebo imaginární  $\omega$  nelze dané okrajové podmínky netriviálně splnit.)

Vztah (1.17) proto představuje dvě obyčejné lineární diferenciální rovnice pro  $X(x)$  a  $T(t)$ . Rovnice pro  $X$  má obecné řešení

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right),$$

kde  $C_1, C_2$  jsou konstanty. Z okrajových podmínek (1.16) implikujících  $X(0) = 0 = X(l)$  plyne

$$C_1 = 0, \quad \omega_n = n\pi \frac{c}{l}, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots$$

Obdobně vyřešíme rovnici (1.17) pro  $T(t)$ , což dává  $T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ , kde integrační konstanty  $A, B$  jsou zatím neurčené. Tedy

$$u_n(x, t) = \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)]$$

je partikulárním řešením rovnice (1.3), které vyhovuje okrajovým podmínkám (1.16).

Protože rovnice (1.3) je lineární, řeší ji i libovolná konečná superpozice funkcí  $u_n$ . Bude ji řešit i nekonečná řada

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \left[ a_n \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi\frac{ct}{l}\right) \right], \quad (1.18)$$

pokud stejnoměrně konverguje a lze ji tedy derivovat člen po členu. To samozřejmě závisí na hodnotách koeficientů  $a_n, b_n$ , které určíme z počátečních podmínek (1.11)

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = u_0(x), \quad (1.19)$$

$$u_{,t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi\frac{c}{l} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = v_0(x); \quad (1.20)$$

$u_0(x)$  je spojitá funkce, která vymizí v koncových bodech a  $v_0(x)$  je po částech spojitá funkce.

Z teorie Fourierových řad plyne, že koeficienty jsou určeny vztahy

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx, \\ b_n &= \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx, \end{aligned} \quad (1.21)$$

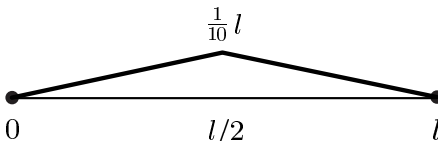
a s takto určenými koeficienty řada (1.18) stejnoměrně konverguje. Výrazy pro  $a_n, b_n$  se získají tak, že řada (1.19) resp. (1.20) se vynásobí funkcí  $\sin(m\pi\frac{x}{l})$  a integruje přes  $x$ . Užitím identity  $\sin(m\pi\frac{x}{l}) \sin(n\pi\frac{x}{l}) = \frac{1}{2} \cos((m-n)\pi\frac{x}{l}) - \frac{1}{2} \cos((m+n)\pi\frac{x}{l})$  se snadno zjistí, že platí

$$\int_0^l \sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad (1.22)$$

takže po integraci řady člen po členu zůstane na levé straně pouze koeficient  $a_m$  resp.  $b_m$  vynásobený konstantou  $l/2$  resp.  $m\pi c/2$ , načež stačí jen přeznačit  $m$  za  $n$ . Systém funkcí  $\{\sin(n\pi\frac{x}{l})\}$  je navíc příkladem úplného ortogonálního systému funkcí s pevnými konci (1.16) na intervalu  $(0, l)$  (připomeňme, že levá strana vztahu (1.22) představuje skalární součin  $m$ -tého a  $n$ -tého členu systému). Oprávněnost operací a důkaz úplnosti však vyžadují pečlivější matematické zkoumání.

### 1.3.3 Příklad na Fourierovy řady

Užitečnost a smysl právě odvozeného postupu řešení nyní ilustrujeme na konkrétním příkladě kmitů struny s pevnými konci. Uvažujme počáteční podmínky (1.11), kdy strunu uprostřed vychýlíme z rovnovážné polohy do vzdálenosti  $\frac{1}{10}l$  a pak z klidu vypustíme, neboli počáteční poloha je

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{1}{5}x && \text{pro } x \in [0, l/2], \\ u_0(x) &= \frac{1}{5}(l-x) && \text{pro } x \in [l/2, l], \end{aligned}$$


zatímco počáteční rychlost vymizí,  $v_0(x) = 0$ . Z (1.21) ihned plyne, že  $b_n = 0$  pro všechna  $n$  a

$$a_n = \frac{2}{5l} \int_0^{l/2} x \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx + \frac{2}{5l} \int_{l/2}^l (l-x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx.$$

Integrály spočítáme metodou *per partes*,

$$a_n = \frac{2}{5n\pi} \left( \left[ -x \cos\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \right]_0^{l/2} + \int_0^{l/2} \cos\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx - \left[ (l-x) \cos\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \right]_{l/2}^l - \int_{l/2}^l \cos\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx \right),$$

kde členy v hranatých závorkách se navzájem odečtou, takže

$$a_n = \frac{2l}{5n^2\pi^2} \left( \left[ \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \right]_0^{l/2} - \left[ \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \right]_{l/2}^l \right) = \frac{4l}{5n^2\pi^2} \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Pro všechna sudá  $n$  jsou tedy koeficienty  $a_n$  nulové, zatímco pro lichá  $n$  platí  $\sin(n\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ . Kompletní řešení (1.18), tedy

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) \cos\left(n\pi\frac{ct}{l}\right),$$

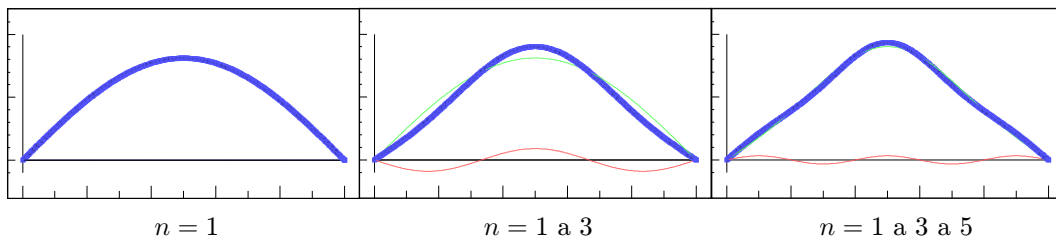
proto můžeme zapsat ve tvaru

$$u(x, t) = \frac{4l}{5\pi^2} \left[ \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right) \cos\left(\pi\frac{ct}{l}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(3\pi\frac{x}{l}\right) \cos\left(3\pi\frac{ct}{l}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(5\pi\frac{x}{l}\right) \cos\left(5\pi\frac{ct}{l}\right) - \dots \right]. \quad (1.23)$$

Jedná se vlastně o rozklad řešení do Fourierovy řady složené z „lichých harmonických módů“. Speciálně v počátečním čase  $t = 0$  dostáváme rozklad „pilovité“ funkce  $u_0(x)$  určující počáteční polohu do řady harmonických funkcí, jejichž amplituda s rostoucím  $n$  klesá jako  $\sim 1/n^2$ ,

$$u_0(x) = \frac{4l}{5\pi^2} \left[ \sin\left(\pi\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{9} \sin\left(3\pi\frac{x}{l}\right) + \frac{1}{25} \sin\left(5\pi\frac{x}{l}\right) - \dots \right]. \quad (1.24)$$

S přičtením každého dalšího členu této řady se základní mód daný hladkou funkcí  $\sin(\pi\frac{x}{l})$  stále více blíží funkci  $u_0(x)$ , která má v bodě  $x = l/2$  maximum  $\frac{1}{10}l$  ve tvaru „špičky“:



## 1.4 Další okrajové podmínky: volný konec, tření

V předchozí části jsme vyřešili rovnici konečné struny délky  $l$  s pevnými konci, jež jsou dány okrajovou podmínkou (1.16), tedy

$$u(0, t) = 0, \quad \text{resp.} \quad u(l, t) = 0. \quad (1.25)$$

Nyní odvodíme okrajovou podmínku, jež naopak popisuje *volné konce* struny a situaci, kdy na konce působí *třecí síla úměrná rychlosti*.

K tomu je vhodné si představit, že na konec struny například v místě  $x = l$  je připevněn malý *nehmotný kroužek* navlečený na rovné tyčce kolmé k ose  $x$ . V souladu s příčným pohybem celé struny se tedy i její konec může pohybovat pouze v příčném směru. Nyní napíšeme Newtonovu pohybovou rovnici pro kroužek obecné hmotnosti  $m$  a uvážíme obě síly na něj působící:  $m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_y^l + F_{\text{tření}}$ , kde  $F_y^l$  je příčná složka síly vnitřního napětí struny na konci  $x = l$  daná vektorem  $\mathbf{F} = -\sigma \mathbf{t}$ , přičemž  $\mathbf{t} \doteq (1, \frac{dy}{dx})$  je jednotkový tečný vektor (viz část 1.1 textu). Protože  $y(x) \equiv u(x, t = \text{konst.})$ , dostáváme  $F_y^l = -\sigma \frac{\partial u}{\partial x}$ . Třecí síla mezi kroužkem a tyčkou je úměrná rychlosti pohybu kroužku,  $F_{\text{tření}} = -b \frac{\partial u}{\partial t}$ , kde  $b > 0$  je konstantní parametr tření, takže

$$m\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\sigma \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial t},$$



Protože koncový kroužek je ve skutečnosti *nehmotný*, uvažujeme limitu  $m \rightarrow 0$  a ihned dostáváme příslušnou okrajovou podmínku na konci  $x = l$

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = -b \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.26)$$

Na druhém konci  $x = 0$  je působící síla vnitřního napětí struny  $\mathbf{F} = +\sigma \mathbf{t}$ , což dává podmínku

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial x} = b \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (1.27)$$

V případě, že na koncích struny žádné tření nepůsobí, je  $b = 0$  a z (1.26), (1.27) okamžitě dostáváme okrajovou podmínku na *volné konce*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \text{resp.} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (1.28)$$

Při *Bernoulliově řešení* rovnice struny metodou separace pak namísto řady (1.18) dostaneme

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[ a_n \cos\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) \right]. \quad (1.29)$$

Na závěr ještě ukážeme, jaké důsledky má obecná okrajová podmínka (1.26) v kontextu *d'Alembertova řešení* (1.10), kdy  $u(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)$ . Dosazením do (1.26) dostaneme vztah  $\sigma(F' + G') = bc(F' - G')$ , kde  $F' \equiv \frac{dF}{d\xi}$  a  $G' \equiv \frac{dG}{d\eta}$ , neboli po jednoduché úpravě

$$(\sigma + bc)G' = -(\sigma - bc)F'.$$

Na konci struny, kde je  $x = l$ , však platí

$$G' = \frac{1}{c} \frac{dG}{dt} \Big|_{x=l}, \quad F' = -\frac{1}{c} \frac{dF}{dt} \Big|_{x=l}.$$

Dosazením a časovou integrací tedy dostaneme vztah

$$G = \frac{\sigma - bc}{\sigma + bc} F. \quad (1.30)$$

Analogicky pro odraz na konci  $x = 0$  dostáváme z podmínky (1.27) vztah

$$F = \frac{\sigma - bc}{\sigma + bc} G. \quad (1.31)$$

Připomeňme, že funkce  $F$  představuje profil vlny šířící se *doprava*, zatímco  $G$  popisuje vlnu putující *doleva*. Vzorce tedy popisují, co se děje s profilem vlny při odrazu na příslušném konci. Existují následující tři speciální případy v závislosti na velikosti tření popsaného parametrem  $b$ :

- pevný konec je popsán  $b \rightarrow \infty$   $G = -F$  odražená vlna má stejný profil jako vlna dopadající, ale je převrácená
- volný konec je popsán  $b = 0$   $G = +F$  profil odražené vlny je úplně stejný
- speciální hodnota tření  $b = \sigma/c$   $G = 0$  na  $x = l$  žádná vlna se neodráží, dopadající vlna  $F = 0$  na  $x = 0$  je zcela absorbována! <sup>1</sup>

<sup>1</sup>Podobná situace může nastat i v případě elektromagnetických vln. Jsou-li vhodnou volbou materiálu splněny speciální okrajové podmínky, elektromagnetická vlna se neodráží, ale absorbuje. To je podstatou technologií letadel typu *stealth*, například F-117, F-22 anebo B-2, které jsou pro radary „neviditelné“.

## Kapitola 2

# Mechanika kontinua

V této kapitole zavedeme základní pojmy a odvodíme hlavní rovnice určující kinematiku tekutin, a to dokonalých i vazkých.

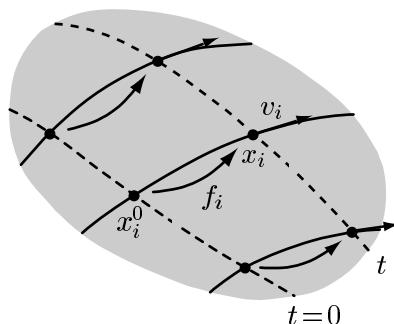
### 2.1 Lagrangeův a Eulerův popis

Tekutina se modeluje jako složená z infinitesimálních objemů, „částic“, které v daném okamžiku spojitě vyplňují danou oblast v  $E_3$ . Tyto „částice“ se pohybují v každém okamžiku určitou rychlostí, která se bod od bodu spojitě mění, a proto je nelze ztotožnit s molekulami tekutiny, konajícími chaotický tepelný pohyb. Rychlost fiktivních „částic“ je ve fenomenologické teorii kontinua dána střední rychlostí molekul v určitém infinitesimálním objemu, přičemž molekulární pohyb je zahrnut v termodynamických veličinách. V následujícím výkladu ale zahrneme termodynamické aspekty pouze do stavové rovnice, určující vztah mezi tlakem a hustotou.

Pohyb tekutiny je formálně popsán trajektorií „částic“ kontinua, což je spojitá transformace

$$x_i = f_i(x_k^0, t), \quad (2.1)$$

kteřá závisí na čase jako na parametru, přičemž  $f_i(x_k^0, t = 0) = x_i^0$  je počáteční poloha. Transformace přiřazuje každému bodu o souřadnicích  $x_i^0$ , kde se „částice“ nacházela v čase  $t = 0$ , bod  $x_i$  neboli její polohu v libovolném čase  $t$ . Parametry  $x_i^0$  tedy identifikují příslušnou „částici“ tekutiny, neboť přiřazení souřadnic  $x_i^0$  lze chápat jakožto „pojmenování“ všech „částic“ v počátečním čase.



Rychlost dané „částice“ určené „jménem“  $x_i^0$  je pak přirozeně

$$v_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \frac{df_i(x_k^0, t)}{dt} = v_i(x_k^0, t). \quad (2.2)$$

Píšeme zde obyčejnou derivaci podle času, přestože funkce  $f_i(x_k^0, t)$  závisí též parametricky na souřadnicích  $x_k^0$  (později podle nich budeme parciálně derivovat). Tomuto popisu kontinua říkáme Lagrangeův.

Vypočteme-li však z (2.1) inverzí  $x_k^0$  jako funkce  $x_j$  a  $t$ , dosazením do (2.2) dostaneme rychlost proudění jako funkci *okamžité polohy* „částic”,

$$v_i = v_i(x_k^0(x_j, t), t) \equiv v_i(x_j, t). \quad (2.3)$$

Tomuto popisu pohybu kontinua pomocí *pole rychlostí* říkáme *Eulerův*. Zatímco rychlost určenou (2.2) měří pozorovatelé, kteří sledují individuální „částici”, rychlost (2.3) zjišťují pozorovatelé, stojící v pevném místě prostoru a měřící rychlost té „částice”, která je právě míjí. Vztah  $x_k^0(x_j, t)$  lze tedy chápat jako „identifikační funkci“, která přiřazuje „původní jméno“  $x_k^0$  (zavedené v  $t = 0$ ) té „částici”, která v  $t$  právě prochází bodem  $x_j$ . Při Eulerově popisu tedy představuje rychlost vektorové pole  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  v prostoru.

S Eulerovým popisem souvisí pojem *proudnice*. To jsou křivky, jejichž *tečny* jsou v každém bodě a v každém okamžiku *rovný vektoru rychlosti* kontinua (podobně jako tečny siločar vyjadřují směr a velikost elektrického nebo magnetického pole). Proudnice jsou tedy obrazem proudění tekutiny v daný okamžik, přičemž tento obraz se s časem může měnit. V případě časově neproměnného *stacionárního proudění* popsaného rychlostním polem  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ , pro nějž  $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0$ , je obraz neměnný a proudnice splývají s trajektoriemi „částic” tekutiny. Popíšeme-li proudnice parametrickými křivkami  $\mathbf{r}(\lambda)$ , pak jejich formální definicí je, že tečny k nim všude splňují podmínku

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\lambda} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t). \quad (2.4)$$

Integrací této rovnice získáme soustavu proudnic ve zvolený okamžik  $t$ . Označíme-li elementy křivek  $d\mathbf{r} = (dx_1, dx_2, dx_3)$ , pak (2.4) můžeme ve složkách přepsat do podoby  $dx_i = v_i d\lambda$ , neboli vyloučením parametru  $\lambda$

$$\frac{dx_1}{v_1(x_j, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_j, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_j, t)}.$$

Integrací této trojice diferenciálních rovnic nezávislých na parametru  $\lambda$  pak dostaneme vyjádření soustavy proudnic v čase  $t$ .

Nyní ještě určíme *zrychlení*  $a_i$  „částic“ v Eulerově popisu. K tomu stačí veličiny  $x_j$  v (2.3) vzít jako funkce času určené (2.1), takže

$$a_i \equiv \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad (2.5)$$

což v přehlednějším vektorovém zápisu je

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v}. \quad (2.6)$$

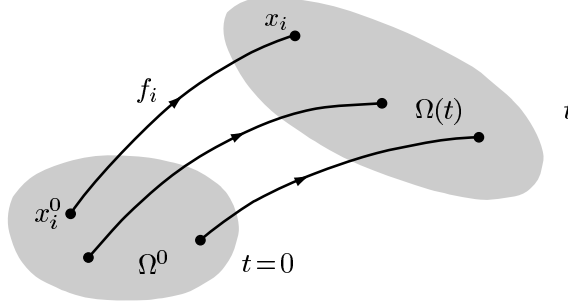
*Drobná ilustrace:* Pro pochopení rozdílu mezi Lagrangeovým a Eulerovým popisem je užitečné uvést jednoduchý konkrétní příklad. Necht' jednorozměrný pohyb tekutiny (2.1) je dán vztahem  $x = f(x^0, t) = x^0 + \alpha x^0 t^2$ , kde  $\alpha$  je konstanta. Pak Lagrangeova rychlost a zrychlení jsou pouhými derivacemi  $f$  podle času, tedy  $v_L = 2\alpha x^0 t$  a  $a_L = 2\alpha x^0$ . Při Eulerově popisu musíme vyloučit „jména částic“  $x^0$  a vyjádřit je pomocí okamžitých poloh  $x$  v daném čase, proto použijeme vztahu  $x^0 = \frac{x}{1+\alpha t^2}$ . Dosazením do  $v_L$  a  $a_L$  dostaneme Eulerovu rychlost  $v_E = \frac{2\alpha x t}{1+\alpha t^2}$  a zrychlení  $a_E = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2}$ . Snadno ověříme, že  $a_E$  lze opravdu spočítat z  $v_E$  užitím vztahu (2.5):  $a_E = \frac{\partial v_E}{\partial t} + v_E \frac{\partial v_E}{\partial x} = \frac{2\alpha x(1-\alpha t^2)}{(1+\alpha t^2)^2} + \frac{4x\alpha^2 t^2}{(1+\alpha t^2)^2} = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2}$ . Všimněme si, že zatímco zrychlení každé individuální částice zůstává v Lagrangeově popisu konstantní s časem,  $a_L = 2\alpha x^0$ , Eulerovo zrychlení v daném místě  $x$  klesá,  $a_E = \frac{2\alpha x}{1+\alpha t^2} \rightarrow 0$  pro  $t \rightarrow \infty$ , protože s rostoucím  $t$  procházejí místem  $x$  částice vyslané v  $t = 0$  z čím dál bližšího okolí počátku,  $x_0 \rightarrow 0$ .

## 2.2 Tekutý objem

Uvažujme množinu „bodových částic“, které v počátečním okamžiku  $t = 0$  vyplňují oblast  $\Omega^0$ . Objem  $\Delta V^0$  oblasti  $\Omega^0$  je dán

$$\Delta V^0 = \int_{\Omega^0} d^3 x^0.$$

V čase  $t$  „částice“ z  $\Omega^0$  zaplní oblast  $\Omega(t)$ , na kterou transformace (2.1) zobrazí  $\Omega^0$ .



Velikost „tekutého objemu  $\Delta V(t)$ “, tedy objemu oblasti  $\Omega(t)$ , je podle věty o substituci

$$\Delta V(t) = \int_{\Omega(t)} d^3 x = \int_{\Omega^0} |J| d^3 x^0, \quad (2.7)$$

kde  $J$  je jakobián transformace (2.1). Derivací (2.7) podle času dostáváme

$$\frac{d}{dt} \Delta V(t) = \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega^0} |J| d^3 x^0 \right) = \int_{\Omega^0} \frac{d|J|}{dt} d^3 x^0. \quad (2.8)$$

Rozvinutím funkce  $f_i$  v (2.1) do Taylorovy řady podle  $t$ ,  $x_i = x_i^0 + v_i(x_k^0) t + \frac{1}{2} a_i(x_k^0) t^2 + \dots$ , získáme prvky transformační matice

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_k^0} = \delta_{ik} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k^0} t + \dots. \quad (2.9)$$

Determinant matice (2.9), což je jakobián  $J$ , bude proto mít tvar <sup>1</sup>

$$J = 1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0} t + \dots. \quad (2.10)$$

Dosadíme-li  $J$  z (2.10) do (2.8) a použijeme-li větu o střední hodnotě, dostaneme pro  $t \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dt} \Delta V(t) = \int_{\Omega^0} \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0} d^3 x^0 = \operatorname{div} \mathbf{v} \int_{\Omega^0} d^3 x^0 = \operatorname{div} \mathbf{v} \Delta V^0,$$

kde veličina  $\operatorname{div} \mathbf{v}$  je vzata v určitém *vnitřním* bodě tekutého objemu. V infinitesimální limitě  $\Delta V(t \rightarrow 0) = \Delta V^0$  odtud dostáváme důležitý vztah

$$\boxed{\frac{d}{dt} \Delta V = \operatorname{div} \mathbf{v} \Delta V}, \quad (2.11)$$

platný v každém okamžiku a v každém místě.

<sup>1</sup>Z definice spočteme, že  $J \equiv \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_1}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_2}{\partial x_j^0} \frac{\partial x_3}{\partial x_k^0} = \varepsilon_{ijk} \left[ \delta_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} + (\delta_{1i} \delta_{2j} \frac{\partial v_3}{\partial x_k^0} + \delta_{2j} \delta_{3k} \frac{\partial v_1}{\partial x_i^0} + \delta_{3k} \delta_{1i} \frac{\partial v_2}{\partial x_j^0}) t + \dots \right] = \varepsilon_{123} + (\varepsilon_{12k} \frac{\partial v_3}{\partial x_k^0} + \varepsilon_{i23} \frac{\partial v_1}{\partial x_i^0} + \varepsilon_{1j3} \frac{\partial v_2}{\partial x_j^0}) t + \dots = 1 + \frac{\partial v_i}{\partial x_i^0} t + \dots$

## 2.3 Síly objemové a plošné, podmínky rovnováhy

*Síly objemovými* se rozumí síly, rozložené v prostředí s určitou objemovou hustotou. Nejdůležitějším příkladem je gravitace: síla na objemový element  $dV$  látky o hustotě  $\rho$  v gravitačním poli o intenzitě  $\mathbf{g}$  je dána výrazem  $d\mathbf{F}^{\text{obj}} = \rho \mathbf{g} dV$ . Hustota objemové síly tedy je  $\rho \mathbf{g}$ , neboli ve složkách  $F_i = \rho g_i$ .

*Síly plošné* jsou charakterizovány svým účinkem na plošku určité orientace. Je-li orientace plošky určena jednotkovým vektorem vnější normály  $\mathbf{n}$ , pak na tuto plošku velikosti  $d\Sigma$  působí plošná síla  $d\mathbf{F}^{\text{plo}} = \mathbf{T}^{(\mathbf{n})} d\Sigma$ , přičemž příslušný vektor napětí  $\mathbf{T}^{(\mathbf{n})}$  má složky

$$\boxed{T_i^{(\mathbf{n})} = \tau_{ji} n_j}, \quad (2.12)$$

kde  $\tau_{ij}$  jsou složky *tenzoru napětí*.

Ukážeme, že rozlišení mezi objemovými a plošnými silami je do určité míry formální.

Nejdříve intergrací spočteme *výslednou sílu*, působící na oblast  $\Omega$ , pokud je uvnitř ní rozložena objemová síla  $d\mathbf{F}^{\text{obj}}$  s hustotou  $F_i$  a na hranici  $\partial\Omega$  působí plošná síla  $d\mathbf{F}^{\text{plo}}$  s  $T_i^{(\mathbf{n})}$  daným (2.12):

$$F_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} F_i dV + \int_{\partial\Omega} T_i^{(\mathbf{n})} d\Sigma = \int_{\Omega} F_i dV + \int_{\partial\Omega} \tau_{ji} n_j d\Sigma = \int_{\Omega} \left( F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) dV, \quad (2.13)$$

kde jsme k úpravě nakonec užili Gaussovu větu. Vidíme, že výslednice plošné síly je formálně stejná, jako kdyby v oblasti byla rozložena objemová síla s hustotou  $\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}$ .

*Výsledný moment sil* působících na oblast  $\Omega$  bude integrálem  $\mathbf{r} \times d\mathbf{F}^{\text{obj}} + \mathbf{r} \times d\mathbf{F}^{\text{plo}}$ , tedy

$$M_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j T_k^{(\mathbf{n})} d\Sigma = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j F_k dV + \int_{\partial\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j \tau_{lk} n_l d\Sigma.$$

Plošný integrál opět převedeme pomocí Gaussovy věty na objemový, takže

$$M_i^{\text{celk}} = \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} \left( x_j F_k + \frac{\partial (x_j \tau_{lk})}{\partial x_l} \right) dV = \int_{\Omega} \left[ \varepsilon_{ijk} x_j \left( F_k + \frac{\partial \tau_{lk}}{\partial x_l} \right) + \varepsilon_{ijk} \tau_{jk} \right] dV. \quad (2.14)$$

Má-li být kontinuum v rovnováze, musí být výsledná síla i výsledný moment na každou oblast nulové, tedy integrály (2.13) a (2.14) musí vymizet při libovolné volbě  $\Omega$ . To nastane právě tehdy, platí-li podmínky rovnováhy kontinua

$$\boxed{\begin{aligned} F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} &= 0, \\ \tau_{ij} &= \tau_{ji}. \end{aligned}} \quad (2.15)$$

kde druhá rovnice plyne z podmínek  $\varepsilon_{ijk} \tau_{jk} = 0$ . Tenzor napětí tedy musí být *symetrický*.

Zkusme nyní formálně nahradit klasickou *objemovou gravitační sílu silou plošnou*. Výsledná gravitační síla na hmotnost rozloženou s hustotou  $\rho$  v oblasti  $\Omega$  je

$$\mathbf{F}^{\text{grav}} = \int_{\Omega} \rho \mathbf{g} dV, \quad (2.16)$$

kde  $\mathbf{g}$  je intenzita gravitačního pole. Newtonovská teorie gravitace se v polním tvaru vyjádří rovnicemi obdobnými s rovnicemi elektrostatiky, tedy

$$\text{div } \mathbf{g} = -4\pi G \rho, \quad (2.17)$$

$$\text{rot } \mathbf{g} = 0. \quad (2.18)$$

Z (2.17) dosadíme do rovnice (2.16), zapíšeme ji ve složkách a postupně upravíme:

$$F_i^{\text{grav}} = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial g_j}{\partial x_j} \right) g_i dV = -\frac{1}{4\pi G} \int_{\Omega} \left( \frac{\partial (g_j g_i)}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) dV. \quad (2.19)$$

S užitím (2.18) však můžeme vyjádřit

$$g_j \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = g_j \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial (g_j g_j)}{\partial x_i},$$

takže (2.19) lze po přeznačení sčítacích indexů psát

$$F_i^{\text{grav}} = \int_{\Omega} \frac{\partial T_{ji}^{\text{grav}}}{\partial x_j} dV,$$

kde

$$T_{ij}^{\text{grav}} = -\frac{1}{4\pi G} (g_i g_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} g_k g_k). \quad (2.20)$$

Veličinu  $T_{ij}$  lze tedy interpretovat jako symetrický tenzor napětí gravitačního pole a výslednou gravitační sílu na oblast  $\Omega$  vyjádřit naopak pomocí plošné síly s vektorem napětí  $T_i^{(n)} = T_{ji}^{\text{grav}} n_j$  působící na hranici oblasti  $\Omega$ .

V elektrodynamice hraje obdobnou úlohu tzv. Maxwellův tenzor napětí elektromagnetického pole definovaný vztahem

$$T_{ij}^{\text{elmag}} = - (D_i E_j + B_i H_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} (D_k E_k + B_k H_k)), \quad (2.21)$$

který má v elektrostatickém případě (při standardní identifikaci  $D_i = \varepsilon E_i$ ,  $4\pi\varepsilon \leftrightarrow 1/G$ ,  $E_i \leftrightarrow g_i$ ) stejný tvar jako (2.20). V 19. století byla skutečně snaha interpretovat elektromagnetické pole jako mechanická napětí v éteru. I z dnešního hlediska však vidíme, že plošné a objemové síly můžeme chápat jako dvojí možná matematická vyjádření téže entity.

## 2.4 Rovnice kontinuity a pohybové rovnice

Proudění tekutiny je určeno parciálními diferenciálními rovnicemi, které jsou důsledkem zákona zachování hmotnosti a 1. impulsové věty. Obě rovnice nyní odvodíme. Hmotnost  $M = \rho \Delta V$  tekutého objemu musí být zachovávající se veličina, a proto s využitím (2.11) dostáváme

$$0 = \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho \Delta V)}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \Delta V + \rho \frac{d}{dt} \Delta V = \left( \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right) \Delta V, \quad (2.22)$$

kde veličiny v závorce před  $\Delta V$  jsou opět určeny v určitých vnitřních bodech tekutého objemu. Vztah musí platit pro libovolně malý objem, takže v každém bodě je

$$\boxed{\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0}, \quad (2.23)$$

což lze užitím  $\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$  a  $\operatorname{div} \rho \mathbf{v} = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$  přepsat

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{v} = 0}. \quad (2.24)$$

Tato rovnice se nazývá rovnice kontinuity a vyjadřuje zákon zachování hmotnosti.

Podobně hybnost  $\mathbf{P}$  tekutého objemu je  $M \mathbf{v}$ , takže

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{dM}{dt} \mathbf{v} + M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \Delta V,$$

protože první člen vymizí v důsledku (2.22). Změna hybnosti je podle 1. impulsové věty rovna výslednici sil na tekutý objem, jejíž  $i$ -tou složkou, jak bylo ukázáno při odvození podmínek rovnováhy (2.13), můžeme psát jako  $(F_i + \partial \tau_{ji} / \partial x_j) \Delta V$ , kde první člen představuje hustotu objemových sil a druhý odpovídá plošným silám na hranici objemu (výrazy jsou opět určeny v určitém vnitřním bodě tekutého objemu). Obdobnou úvahou jako u rovnice kontinuity s užitím (2.5) pak dospějeme k vektorové pohybové rovnici

$$\boxed{\rho \frac{dv_i}{dt} \equiv \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}}. \quad (2.25)$$

## 2.5 Newtonovská a dokonalá tekutina

Aby rovnice (2.24) a (2.25) určovaly veličiny  $\rho$  a  $\mathbf{v}$ , potřebujeme navíc znát vztah mezi tenzorem napětí  $\tau_{ij}$  a složkami rychlosti  $v_i$ , respektive jejich derivacemi. U takzvané newtonovské tekutiny se předpokládá lineární vztah

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij} + \lambda \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.26)$$

Je to nejobecnější tenzor 2. řádu, který se dá vytvořit lineárně z prostorových derivací rychlosti.

Pokud je  $\lambda = 0 = \mu$ , mluvíme o dokonalé tekutině,

$$\tau_{ij} = -p \delta_{ij}. \quad (2.27)$$

Chybí smyková napětí a plošné síly se uplatňují pouze jako izotropní tlak. Pohybová rovnice (2.25) pak má jednoduchý tvar

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = G_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad (2.28)$$

kde jsme zavedli hustotu síly na jednotku hmotnosti vztahem  $G_i = F_i/\rho$ . Tuto tzv. Eulerovu rovnici lze psát též ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \text{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.29)$$

Předpokládáme-li dále navíc, že tlak  $p$  je určen stavovou rovnicí jako funkce hustoty  $p = p(\rho)$  (barotropní tekutina), máme celkem 4 parciální diferenciální rovnice (2.24) a (2.29) pro 4 neznámé, totiž hustotu  $\rho$  a 3 složky rychlosti  $\mathbf{v}$ . K jednoznačnému určení řešení musíme položit okražovou podmínku na hranici oblasti zaujímané tekutinou, která v případě dokonalé tekutiny zní  $v_n = 0$ , kde  $v_n$  značí složku rychlosti kolmou k hranici (např. stěnám trubice, kterou tekutina protéká).

## 2.6 Nevířivé proudění dokonalé tekutiny a Bernoulliho rovnice

Rovnici (2.29) je možno identicky přepsat<sup>2</sup> do tzv. Gromekaova–Lambova tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p. \quad (2.30)$$

Předpokládejme, že proudění tekutiny je navíc nevířivé, tedy

$$\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}. \quad (2.31)$$

Pak existuje skalární funkce  $\phi$ , zvaná potenciál rychlosti taková, že  $\mathbf{v} = \text{grad } \phi$  (viz podobný vztah z elektrostatiky). Předpokládejme dále, že objemová síla má potenciál,  $\mathbf{G} = -\text{grad } U$ , a zavedme tlakovou funkci  $P$  vztahem

$$P(\mathbf{r}) = \int_0^{p(\mathbf{r})} \frac{d\lambda}{\rho(\lambda)}, \quad (2.32)$$

takže  $\text{grad } P = \rho^{-1} \text{grad } p$ . Pak rovnice (2.30) nabude tvaru

$$\text{grad} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P \right) = \mathbf{0},$$

<sup>2</sup>Platí  $\left( \text{grad} \left( \frac{v^2}{2} \right) - \mathbf{v} \times \text{rot } \mathbf{v} \right)_i = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j v_j) - \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} v_j \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) v_j \frac{\partial v_m}{\partial x_l} = v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ .

takže

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + U + P = f(t)}. \quad (2.33)$$

Integrační funkce  $f$  na pravé straně je pouze funkcí času. To je tzv. Bernoulliho rovnice pro nestacionární nevířivé proudění dokonalé tekutiny. V případě stacionárního nevířivého proudění je člen  $\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$  a  $f$  je konstanta.

Pokud je nevířivá tekutina navíc nestlačitelná, takže podle (2.23)

$$\boxed{\operatorname{div} \mathbf{v} = 0}, \quad (2.34)$$

splňuje potenciál rychlosti rovnici  $\operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = 0$ , tedy

$$\boxed{\Delta \phi = 0}. \quad (2.35)$$

Pole rychlosti lze pak určit jednoduše řešením Laplaceovy rovnice pro potenciál  $\phi$  při okrajové podmínce  $(\operatorname{grad} \phi)_n = 0$  na hranici. Je to úloha zcela analogická úloze pro elektrostatický potenciál a výsledky elektrostatiky lze snadno „přeložit“ do řeči hydrodynamiky. Analogie kladného bodového náboje se nazývá elementární zdroj, záporného propad (nora, výtok), analogie dipólu dublet atd. Z pole rychlostí pak lze určit pomocí Bernoulliho rovnice pole tlaku.

## 2.7 Vlny v dokonalé tekutině

Předpokládejme, že tekutina v rovnovážném stavu má hustotu  $\rho_0 = \text{konst.}$  Uvažujme nyní malé poruchy hustoty  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  takové, že  $\rho_1 \ll \rho_0$ , které vyvolají malé změny pole rychlosti v tom smyslu, že  $v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \ll \frac{\partial v_i}{\partial t}$ . Předpokládejme dále, že objemové síly  $\mathbf{G}$  vymizí. Pak pohybová rovnice (2.29) má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \doteq -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p \quad (2.36)$$

a rovnice kontinuity (2.24) je

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v} \doteq 0, \quad (2.37)$$

když zanedbáme malé veličiny. Tlak  $p(\rho)$  rozvineme podle Taylorovy věty kolem  $\rho_0$ ,

$$p(\rho) = p(\rho_0 + \rho_1) = p(\rho_0) + \left. \frac{dp}{d\rho} \right|_{\rho_0} \rho_1 + \dots$$

a dosadíme do (2.36). Pak na tuto rovnici aplikujeme operaci  $\operatorname{div}$ , zatímco rovnici (2.37) derivujeme parciálně podle času a dosadíme z jedné do druhé. Zjistíme, že porucha hustoty  $\rho_1$  musí být řešením vlnové rovnice

$$\boxed{\Delta \rho_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2} = 0}, \quad (2.38)$$

kde  $c^2 = (dp/d\rho)|_{\rho_0}$ . Rovnice připouští řešení ve tvaru rovinné vlny. Dosazením tohoto řešení do (2.36) a užitím vztahu  $\operatorname{grad} p(\rho) = (dp/d\rho) \operatorname{grad} \rho$  zjistíme, že vektor  $\mathbf{v}$  je rovnoběžný s vlnovým vektorem. Jde tedy o zvukovou podélnou vlnu šířící se rychlostí  $c$ .



## 2.8 Proudění vazké tekutiny, Navierova–Stokesova rovnice

Pokud je tekutina vazká, jsou koeficienty  $\lambda$  a  $\mu$  v (2.26) nenulové. Je-li však *nestlačitelná*, je

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0,$$

takže člen u  $\lambda$  vymizí a podle (2.23) je  $\rho = \textit{konst.}$  Ze stejných důvodů vymizí i člen  $\partial^2 v_j / \partial x_j \partial x_i$ , takže pohybová rovnice (2.25) má tvar

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{v} = \mathbf{G} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{v}}, \quad (2.39)$$

kde  $\nu = \mu/\rho$  je tzv. *kinematická viskozita*. Toto je *Navierova–Stokesova rovnice* pro nestlačitelnou vazkou tekutinu. Okrajová podmínka pro vazkou tekutinu se klade  $\mathbf{v} = 0$  na hranici. V jejím důsledku je proudění kromě triviálních případů vířivé a nelze proto zavést rychlostní potenciál.

## 2.9 Geometricky podobná proudění

Uvažujme stacionární ( $\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = 0$ ) proudění nestlačitelné ( $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ ) vazké tekutiny v homogenním gravitačním poli intenzity  $\mathbf{g}$ . Rovnice (2.39) zapsaná ve složkách má v tomto případě tvar

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = g_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}. \quad (2.40)$$

Napišme nyní

$$v_i \equiv v_0 w_i, \quad x_i \equiv a \xi_i, \quad g_i \equiv g \chi_i,$$

kde  $v_0$  je kladná konstanta s rozměrem rychlosti,  $a$  je konstanta s rozměrem délky,  $g$  je velikost gravitačního zrychlení a  $w_i, \chi_i, \xi_i$  jsou příslušné *bezrozměrné veličiny*. Dosazením do (2.40) a úpravou dostaneme

$$\boxed{w_j \frac{\partial w_i}{\partial \xi_j} = \frac{1}{F} \chi_i - \frac{\partial \Pi}{\partial \xi_i} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_i}{\partial \xi_j \partial \xi_j}}, \quad (2.41)$$

kde

$$F \equiv \frac{v_0^2}{ag}, \quad \Pi \equiv \frac{p}{\rho v_0^2}, \quad R \equiv \frac{av_0}{\nu}. \quad (2.42)$$

Všechny veličiny v rovnici (2.41) jsou bezrozměrné. Konstanta  $R$  se nazývá *Reynoldsovo číslo*, zatímco  $F$  je *Froudeovo číslo*.

Předpokládejme, že najdeme řešení této rovnice při určitých hodnotách číselných parametrů  $R$  a  $F$  a okrajové podmínce  $\mathbf{w} = 0$  na hranici určité oblasti popsané bezrozměrnými souřadnicemi  $\xi_i$ . Pokud pak zvolíme veličinu  $a$  určující geometrické rozměry skutečné oblasti, z  $F$  pak dostaneme odpovídající hodnotu veličiny  $v_0 = \sqrt{agF}$  určující velikost rychlosti, z  $R$  kinematickou viskozitu  $\nu = av_0/R$ , a z veličiny  $\Pi$  dostaneme odpovídající hodnotu pole tlaku  $p = \Pi \rho v_0^2 = \Pi F \rho ag$ . Řešení odpovídající různým hodnotám  $a$  při stejných parametrech  $R$  a  $F$  se označují jako *geometricky podobná*. Tato skutečnost má praktický význam například při empirickém testování na zmenšených modelech. Všimněme si například, že chceme-li použít měření na zmenšeném hydrodynamickém modelu získané při stejném  $g$ , musíme užít tekutiny s jinou viskozitou (určenou  $R$ , protože z  $F$  je už jednoznačně určena hodnota  $v_0$ ).

V řadě úloh nemá člen odpovídající vnější objemové síle podstatný vliv, kupříkladu při proudění vazké tekutiny dlouhou vodorovnou trubicí. Zkušenost ukazuje, že pro každou geometrickou konfiguraci je pro  $R \leq R_{\text{krit}}$  proudění laminární, pro  $R$  větší, než *Reynoldsovo kritické číslo* je proudění turbulentní.