

# Teoretická mechanika

Jiří Langer a Jiří Podolský

Studijní text k přednášce NOFY003  
„Teoretická mechanika“

Ústav teoretické fyziky  
Matematicko-fyzikální fakulta  
Univerzita Karlova v Praze

říjen 2015

# Obsah

<b>1</b>	<b>Kinematika tuhého tělesa</b>	<b>2</b>
1.1	Vektory a tenzory . . . . .	2
1.2	Relativita otáčivého pohybu . . . . .	4
1.3	Zavedení úhlové rychlosti . . . . .	4
1.4	Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice . . . . .	7
1.5	Zrychlení v neinerciální soustavě . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Dynamika tuhého tělesa</b>	<b>9</b>
2.1	Tenzor setrvačnosti . . . . .	9
2.2	Eulerovy dynamické rovnice . . . . .	12
2.3	Odvození pomocí Lagrangeova formalizmu . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Aplikace: setrvačníky</b>	<b>15</b>
3.1	Volný setrvačník (bezsilový) . . . . .	15
3.2	Těžký symetrický setrvačník s pevným bodem . . . . .	17

# Kapitola 1

## Kinematika tuhého tělesa

V Newtonově mechanice se *tuhým tělesem* rozumí soustava hmotných bodů navzájem pevně spojených: je tedy tvořeno body, jejichž relativní vzdálenosti se nemění. Tuhé těleso dobře aproximuje skutečný makroskopický objekt, jehož deformaci lze v průběhu děje zanedbat. Můžeme jej chápat jako soustavu vázanou holonomními skleronomními vazbami a tedy užívat obvyklou teorii soustavy hmotných bodů.

Obecný pohyb tuhého tělesa má *šest stupňů volnosti*, z nichž *tři reprezentují translační pohyb* jistého bodu, například těžiště, a *tři popisují rotaci* tělesa (tzv. *Chaslesova věta*).

Úkolem kinematiky tuhého tělesa je nalézt vhodný popis otáčení. Jak uvidíme, opírá se tento popis o matematický formalismus vektorového a tenzorového počtu. Předpokládáme, že čtenář jej dobře zná z lineární algebry. Přesto však považujeme za užitečné připomenout na tomto místě základní pojmy, symboly a vztahy, které budeme dále v textu používat.

### 1.1 Vektory a tenzory

- **vektor**  $\mathbf{w}$ : prvek vektorového prostoru  $V$  (zde  $\dim V = 3$ ), je definováno  $\alpha\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{v} + \mathbf{w}$
- **báze**  $\{\mathbf{e}_i\}$ : pro  $\forall \mathbf{w} \in V$  je  $\mathbf{w} = w_i \mathbf{e}_i$ , kde  $w_i$  jsou *složky*  $\mathbf{w}$  v dané bázi (užíváme Einsteinovu sumační konvenci pro  $i = 1, 2, 3$ )
- **skalární součin**:  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \equiv v_i w_i = \delta_{ij} v_i w_j$ , kde  $\delta_{ij}$  je *Kroneckerův symbol*
- **vektorový součin**:  $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$  definován  $(\mathbf{v} \times \mathbf{w})_i \equiv \varepsilon_{ijk} v_j w_k$ , kde  $\varepsilon_{ijk}$  je *Levi-Civitův symbol*  
 $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$ , při prohození sousedních indexů je hodnota  $-1$ , jinak rovno 0 (hlavní užitečné identity:  $\delta_{ii} = 3$ ,  $\delta_{ij} \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{iik} = 0$ ,  $\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$ )
- **ortonormální báze**:  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  (tedy 3 kolmé jednotkové vektory)
- **rotace kolem počátku** je speciální transformace mezi ortonormálními bázemi  $\{\mathbf{e}_i\}$  a  $\{\mathbf{e}'_i\}$  daná  $\mathbf{e}'_i = A_{ik} \mathbf{e}_k$ , kde  $A_{ik}$  jsou prvky *transformační matice*  $A$ , jež je *ortogonální*,  $A^t = A^{-1}$ , neboli vyjádřeno po složkách platí *relace ortogonality*  $A_{ik} A_{jk} = \delta_{ij}$  a  $A_{ki} A_{kj} = \delta_{ij}$  (Důkaz:  $\delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}'_j = A_{ik} \mathbf{e}_k \cdot A_{jl} \mathbf{e}_l = A_{ik} A_{jl} \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_l = A_{ik} A_{jl} \delta_{kl} = A_{ik} A_{jk}$ .  
Druhá část:  $\delta_{ji} = \delta_{ij}^t = (A_{ik} A_{jk})^t = A_{jk}^t A_{ik}^t = A_{kj} A_{ki}$ )
- **některé důsledky**:  
 $\det A = \pm 1$ , neboť  $(\det A)^2 = (\det A)(\det A^t) = \det(AA^t) = \det(AA^{-1}) = \det E = 1$   
(volíme matice s  $\det A = +1$ , neboť pak obsahují identitu a soubor těchto matic tvoří grupu)  
 $\mathbf{e}_j = A_{ij} \mathbf{e}'_i$ , neboť  $A_{ij} \mathbf{e}'_i = A_{ji}^t \mathbf{e}'_i = A_{ji}^{-1} A_{ik} \mathbf{e}_k = \delta_{jk} \mathbf{e}_k = \mathbf{e}_j$   
 $w'_i = A_{ik} w_k$ , neboť  $w'_i \mathbf{e}'_i = \mathbf{w} = w_k \mathbf{e}_k = w_k A_{ik} \mathbf{e}'_i$   
 $w_j = A_{ij} w'_i$ , neboť  $w_j \mathbf{e}_j = \mathbf{w} = w'_i \mathbf{e}'_i = w'_i A_{ij} \mathbf{e}_j$

- tenzor (2. řádu, v euklidovském prostoru):

klasické „fyzikální“ zavedení (pomocí transformačních vlastností):

„veličina s více složkami“ (pro 2 indexy je to matice  $T$ ), které se při rotaci báze  $\mathbf{e}'_i = A_{ik}\mathbf{e}_k$  transformují lineárně (jako vektor) v každém indexu:

$$T'_{ij} = A_{ik}A_{jl}T_{kl}$$

moderní abstraktní zavedení (elegantní, nezávislé na souřadnicích):

tenzor (2. řádu)  $T$  je bilineární zobrazení z  $V \times V \rightarrow R$ , tj.

$$T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \text{reálné číslo}$$

souvislost: zjevně platí  $T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = T(v_i\mathbf{e}_i, w_j\mathbf{e}_j) = v_iw_jT(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$

Definujeme-li tedy složky tenzoru  $T$  vůči bázi  $\{\mathbf{e}_i\}$  jako matici čísel  $T_{ij} \equiv T(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ ,

pak  $T(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = v_iw_jT_{ij}$ . Ihned též dostáváme transformační vlastnosti složek:

$$T'_{ij} \equiv T(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_j) = T(A_{ik}\mathbf{e}_k, A_{jl}\mathbf{e}_l) = A_{ik}A_{jl}T(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l) = A_{ik}A_{jl}T_{kl}$$

zobecnění je přímočaré: tenzor  $n$ . řádu je multilineární zobrazení  $T : V \times \dots \times V \rightarrow R$ , jež implikuje  $T'_{i_1i_2\dots i_n} = A_{i_1j_1}A_{i_2j_2}\dots A_{i_nj_n}T_{j_1j_2\dots j_n}$

- operace s tenzory:

sčítání: ve složkách přirozeně:  $T_{ij} + U_{ij}$

úženy: vysčítání přes dva indexy:  $T_{ii}$  = skalár, neboť  $T'_{kk} = A_{ki}A_{kj}T_{ij} = \delta_{ij}T_{ij} = T_{ii}$

rozklad na symetrickou a antisymetrickou část (je invariantní):

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) \equiv T_{(ij)} + T_{[ij]} = s_{ij} + a_{ij}$$

symetrický tenzor  $s_{ij} = s_{ji}$  má 6 nezávislých složek

antisymetrický tenzor  $a_{ij} = -a_{ji}$  má 3 nezávislé složky:

pomocí Levi-Civitova symbolu lze antisymetrickému tenzoru přiřadit (pseudo)vektor

$$a_i \equiv \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}a_{jk} \quad \text{a naopak} \quad a_{ij} \equiv \varepsilon_{ijk}a_k \quad \text{tj.} \quad a_1 = a_{23}, a_2 = a_{31} = -a_{13}, a_3 = a_{12},$$

$$\text{tedy} \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{23} \\ -a_{13} \\ a_{12} \end{pmatrix} \quad \text{neboli} \quad \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Jako důležitou aplikaci můžeme nyní například elegantně dokázat d'Alembertovu–Eulerovu větu: Otočení tuhého tělesa kolem bodu lze nahradit otočením kolem osy procházející tímto bodem.

**Důkaz:** Každé otočení kolem bodu je popsáno transformací  $x'_i = A_{ik}x_k$ , kde  $x_k$  jsou souřadnice „původní“ polohy,  $x'_i$  jsou souřadnice „otočené“ polohy se společným počátkem a  $A$  je ortogonální matice, t.j.  $A^t = A^{-1}$  neboli  $AA^t = E$ . Stačí ukázat, že existuje invariantní směr určený  $x_i$ , který transformace zachovává, tedy že  $x_i = x'_i = A_{ik}x_k$ . Z lineární algebry je známo, že homogenní rovnice  $A_{ik}x_k = x_i$  má netriviální řešení  $x_i$ , pokud je nulový determinant  $\det(A - E)$ . Pro každou ortogonální matici  $A$  však je  $\det(A - E) = \det(A - AA^t) = \det(A(E - A^t)) = \det A \det(E - A^t) = 1 \cdot \det((E - A)^t) = \det(E - A) = -\det(A - E)$ , takže opravdu platí, že  $\det(A - E) = 0$ .

⊠

Pro úplnost ještě učinme následující dvě poznámky ohledně zde použité konvence:

1. Protože se omezíme výhradně jen na kartézské báze v plochem prostoru, kde má metrika triviální tvar  $g_{ij} \equiv g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{ij}$ , nemusíme rozlišovat „dolní a horní indexy“ veličin, protože příslušné kovariantní a kontravariantní složky tenzorů jsou číselně stejné. Pro zjednodušení zápisu tedy všechny indexy budeme psát dole. Einsteinova sumační konvence pro skalární součin pak je  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = g(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = g_{ij}v_iw_j = v_iw_i \equiv \sum_{i=1}^3 v_iw_i = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3$ , atd.
2. V lineární algebře se někdy zavádí transformační vztah mezi otočenými ortonormálními bázemi ve formě  $\mathbf{e}'_i = \mathcal{A}_{ki}\mathbf{e}_k$ , kde  $\mathcal{A}_{ki}$  jsou prvky ortogonální matice přechodu  $\mathcal{A}$ . To je opačný vztah než naše konvence  $\mathbf{e}'_i = A_{ik}\mathbf{e}_k$ , kde  $A_{ik}$  jsou prvky ortogonální transformační matice  $A$ . Zjevně ale stačí identifikovat  $A = \mathcal{A}^t$ .

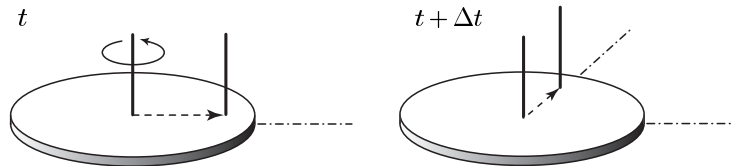
## 1.2 Relativita otáčivého pohybu

Nejenom v teorii relativity ale již v newtonovské mechanice nemá smysl mluvit o pohybu vzhledem k prázdnému „absolutnímu prostoru“: vždy musíme hovořit jen o pohybu *vzhledem k vztažnému systému*. V newtonovské mechanice je výhodné představit si vztažný systém jako „mříž“ tvořenou tuhými tyčemi jednotkové délky, která nám zároveň realizuje kartézský systém souřadnic. Trojice kolmých tyčí v každém bodě realizuje ortonormální bázi, tzn. že každý vektor lze psát jako lineární kombinaci těchto vektorů báze.

Vztažných systémů, které se vůči sobě navzájem pohybují, můžeme ovšem vytvořit nekonečně mnoho. Newtonovská dynamika mezi nimi vybírá speciální třídu tzv. *inerciálních systémů*, ve kterých pohybové zákony mají privilegovaně jednoduchý tvar.

Popis otáčivého pohybu tuhého tělesa omezíme zde na případ, kdy s tělesem lze spojit pevný bod, který splývá s počátkem některého inerciálního systému. Ortonormální bázi  $\{\mathbf{e}_i\}$  v počátku tohoto inerciálního systému budeme v souladu s tradicí označovat jako „bázi pevnou v prostoru“. S tělesem samým současně spojíme obecně jinou trojici ortonormálních vektorů  $\{\mathbf{e}'_i\}$ , které určují pevné směry vzhledem k tělesu — ty tvoří tzv. „korotující bázi“. Poloha tělesa pak bude jednoznačně určena, bude-li určeno natočení korotující báze vzhledem k bázi pevné v prostoru. Jak jsme již uvedli, obě báze musí být navzájem spojeny ortogonální transformací, tj. poloha korotující báze vzhledem k pevné je v daném okamžiku určena ortogonální maticí  $A$  reprezentující zmíněnou transformaci. Každá ortogonální matice je přitom určena třemi parametry (neboť 9 prvků matice je svázáno 6 nezávislými relacemi ortogonality), například Eulerovými úhly, jež zavedeme v části 1.4. Vzájemné natočení bází se však mění, takže prvky matice  $A$  jsou funkcemi času.

Každý vektor  $\mathbf{w}$  lze vyjádřit v obou bázích, přičemž složky daného vektoru budou v obou bázích samozřejmě různé. Podobně jako nemůžeme mluvit o pohybu bodu aniž řekneme, vzhledem k čemu tento pohyb vztahujeme, nemůžeme hovořit ani o časové změně vektoru, aniž řekneme, vzhledem ke kterému vztažnému systému se změna odehrává. Například polohový vektor určitého bodu tělesa se *nemění* vzhledem ke korotující bázi, *mění* se ale vzhledem k bázi pevné v prostoru. Naopak bod v klidu vzhledem k bázi pevné k prostoru se vzhledem ke korotující bázi pohybuje:



*Rychlost bodu vzhledem k inerciálnímu systému a jeho rychlost vzhledem k rotujícímu tělesu jsou tedy dva různé vektory*, nikoli tentýž vektor ve dvou různých bázích! Každý z obou vektorů však můžeme vyjádřit *v obou bázích*. Totéž platí i pro obecné časové změny libovolného vektoru  $\mathbf{w}$ .

## 1.3 Zavedení úhlové rychlosti

Uvažujme nyní libovolný časově závislý vektor  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ . Tento vektor lze vyjádřit v obou již zmíněných přirozených ortonormálních bázích:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{e}_i\} & \dots \text{ báze pevná v prostoru} \\ \{\mathbf{e}'_i(t)\} & \dots \text{ báze spojená s tělesem (korotující)} \end{aligned}$$

Je tedy  $\mathbf{w}(t) = w_i(t) \mathbf{e}_i = w'_i(t) \mathbf{e}'_i(t)$ , přičemž obě ortonormální báze jsou navzájem jen pootočené, takže platí  $\mathbf{e}'_i(t) = A_{ik}(t) \mathbf{e}_k$ , resp.  $\mathbf{e}_k = A_{jk}(t) \mathbf{e}'_j(t)$ . Zde  $A_{ij}$  jsou prvky ortogonální matice  $A$ , takže  $A^t = A^{-1}$ , což ve složkách dává relace ortogonality  $A_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}$ . Časová derivace vektoru  $\mathbf{w}(t)$  vzhledem k inerciálnímu systému — vyjádřená však v korotující bázi  $\mathbf{e}'_i(t)$  — je potom vektor

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \frac{d\mathbf{e}'_i}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \frac{dA_{ik}}{dt} \mathbf{e}_k = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk} \mathbf{e}'_j. \quad (1.1)$$

Je proto přirozené a výhodné definovat matici

$$\boxed{\Omega = \frac{dA}{dt} A^t} \quad \text{s prvky} \quad \boxed{\Omega_{ij} \equiv \frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk}}, \quad (1.2)$$

takže

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + w'_i \Omega_{ij} \mathbf{e}'_j. \quad (1.3)$$

Protože na levé straně tohoto vztahu je vektor, musí být i napravo, takže matice  $\Omega$  s prvky  $\Omega_{ij}$  je tenzor 2. řádu: nazýváme ho tenzor úhlové rychlosti.

Derivováním relací ortogonality dostáváme vztah  $\frac{dA_{ik}}{dt} A_{jk} = -\frac{dA_{jk}}{dt} A_{ik}$ , takže  $\boxed{\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}}$ . Matice  $\Omega$  je tudíž *antisymetrická*, má *jen tři nezávislé složky*, a proto k ní lze standardním způsobem přiřadit duálně sdružený (pseudo)vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  zvaný vektor úhlové rychlosti předpisem

$$\boxed{\Omega_k \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{kij} \Omega_{ij}}, \quad (1.4)$$

neboli  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3) \equiv (\Omega_{23}, \Omega_{31}, \Omega_{12})$ . Vztah opačný k (1.4) evidentně je  $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \Omega_k$ .

Takto definované veličiny  $\Omega_k$  jsou *složky vektoru  $\boldsymbol{\Omega}$  vůči výchozí bázi  $\mathbf{e}_k$*  pevné v prostoru. Pro tenzor i vektor úhlové rychlosti ale platí další pozoruhodná věc: Při otočení daném ortogonální maticí  $A(t)$  *mají stejné složky* jak vůči korotující bázi  $\mathbf{e}'_k$ , tak vůči pevné bázi  $\mathbf{e}_k$ !

**Důkaz:** Uvažme tenzor úhlové rychlosti příslušející *inverznímu otočení* danému maticí  $A^{-1} = A^t$ . Podle definice (1.2) tedy je

$$\Omega^{(A^{-1})} = \frac{d(A^{-1})}{dt} (A^{-1})^t = \frac{dA^t}{dt} (A^t)^t = \frac{dA^t}{dt} A = -A^t \frac{dA}{dt}, \quad (1.5)$$

kde poslední rovnost je důsledkem časové derivace relací ortogonality  $A^t A = E$ . Nyní využijeme faktu, že tenzor úhlové rychlosti  $\Omega^{(A^{-1})}$  je *opačný* k tenzoru  $\Omega^A$ , jenž přísluší matici  $A$ , neboli  $\Omega^A = -\Omega^{(A^{-1})}$ . Dosazením z (1.5) dostaneme vztah  $\Omega^A = A^t \frac{dA}{dt}$ , který zleva vynásobíme maticí  $A$  a zprava maticí  $A^t$ , takže  $A \Omega^A A^t = A A^t \frac{dA}{dt} A^t = \frac{dA}{dt} A^t = \Omega^A$ . Protože výraz  $A \Omega^A A^t$  není nic jiného než transformace složek tenzoru  $\Omega^A$  z pevné báze  $\mathbf{e}_k$  do korotující báze  $\mathbf{e}'_k$  (ve složkách  $\Omega^{A'}_{ij} = A_{ik} A_{jl} \Omega_{kl}$ ), dokázali jsme, že opravdu platí  $\Omega^{A'} = \Omega^A$  neboli  $\Omega^{A'}_{ij} = \Omega^A_{ij}$ , tedy  $\Omega'_{ij} = \Omega_{ij}$ .  $\square$

Protože  $\Omega'_{ij} = \Omega_{ij}$ , z definice (1.4) ihned užitím faktu, že Levi-Civitův symbol je (pseudo)tenzor, který má stejné složky v obou bázích ( $\varepsilon'_{kij} = \varepsilon_{kij}$ ), dostáváme

$$\boxed{\Omega'_k = \Omega_k}. \quad (1.6)$$

Složky (pseudo)vektoru  $\boldsymbol{\Omega}$  vůči korotující bázi  $\mathbf{e}'_k$  jsou shodné s jeho složkami vůči pevné bázi  $\mathbf{e}_k$ . Z toho plyne, že vektor úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\Omega}$  definovaný (1.4) a (1.2) míří do invariantní osy otáčení.

Užitím vztahu  $\Omega_{ij} = \varepsilon_{ijk} \Omega_k = \varepsilon'_{ijk} \Omega'_k$  a identity  $\varepsilon'_{ijk} = \varepsilon'_{jki}$  lze nyní výraz (1.3) přepsat

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + \varepsilon'_{jki} \Omega'_k w'_i \mathbf{e}'_j = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{w})'_j \mathbf{e}'_j,$$

jenž explicitně vyjadřuje časovou derivaci libovolného vektoru  $\mathbf{w}$  vzhledem k pevnému inerciálnímu systému prostoru, vyjádřenou ovšem v bázi  $\mathbf{e}'_i(t)$  pevně spojené s tělesem pomocí složek  $\mathbf{w}$  v téže bázi a pomocí vektoru úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\Omega}$ . Platí-li však vztah mezi určitými vektory v jedné bázi, platí v každé bázi, a proto můžeme psát důležitý vektorový vztah

$$\boxed{\left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_{\text{prostor}} = \left. \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{w}}, \quad (1.7)$$

bez reference k určité bázi. Znovu ale zdůrazněme, že  $\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{prostor}}$  a  $\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{těleso}}$  jsou *dva různé vektory*, nikoli tentýž vektor ve dvou bázích. (Tento fakt lze opět demonstrovat na triviálním případě, kdy  $\mathbf{w} = \mathbf{r}$ , tj. poloha pevného bodu v tělese; pak  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{\text{těleso}} = 0$ , zatímco  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}|_{\text{prostor}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ .) Oba tyto vektory lze ovšem vyjádřit v obou bázích: první vektor se samozřejmě nejpřirozeněji vyjadřuje v pevné bázi ( $\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{prostor}} = \frac{dw_i}{dt} \mathbf{e}_i$ ), zatímco druhý vektor je naopak snadné vyjádřit v korotující bázi ( $\frac{d\mathbf{w}}{dt}|_{\text{těleso}} = \frac{dw'_i}{dt} \mathbf{e}'_i$ ).

### Příklady:

Geometrický význam vektoru úhlové rychlosti je dobře vidět z následující jednoduché ilustrace: je-li  $x_3$  osa otáčení a  $\varphi(t)$  příslušný úhel otočení v daném čase, pak

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{dA}{dt} = \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ -\cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\varphi} & 0 \\ -\dot{\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

takže  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \dot{\varphi})$ , což je zcela v souladu s intuitivní představou.

Méně elementárním příkladem je otáčení o úhel  $\varphi(t)$  podél osy  $x_1 = x_2, x_3 = 0$ , pro které je

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \cos \varphi & 1 - \cos \varphi & -\sqrt{2} \sin \varphi \\ 1 - \cos \varphi & 1 + \cos \varphi & \sqrt{2} \sin \varphi \\ \sqrt{2} \sin \varphi & -\sqrt{2} \sin \varphi & 2 \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \begin{pmatrix} -\sin \varphi & \sin \varphi & -\sqrt{2} \cos \varphi \\ \sin \varphi & -\sin \varphi & \sqrt{2} \cos \varphi \\ \sqrt{2} \cos \varphi & -\sqrt{2} \cos \varphi & -2 \sin \varphi \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\dot{\varphi} \\ 0 & 0 & \dot{\varphi} \\ \dot{\varphi} & -\dot{\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{což dává} \quad \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\dot{\varphi}, \dot{\varphi}, 0). \quad (1.9)$$

Vektor úhlové rychlosti tedy i v tomto případě míří do invariantní osy otáčení, zde  $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ , a jeho velikost je  $|\boldsymbol{\Omega}| = |\dot{\varphi}|$ .

Pro další diskuzi je nutno ještě uvážit pravidla pro *skládání rotací a vektorů úhlových rychlostí*. Uvažujme dvě otočení: první je dáno ortogonální maticí  $A$  představující transformaci  $\mathbf{e}'_i = A_{ik} \mathbf{e}_k$ , druhé je dáno ortogonální maticí  $B$  a určuje transformaci  $\mathbf{e}''_j = B_{ji} \mathbf{e}'_i$ . *Složení* obou těchto otočení je dáno ortogonální maticí  $C = BA$ , neboť  $\mathbf{e}''_j = B_{ji} A_{ik} \mathbf{e}_k = C_{jk} \mathbf{e}_k$ . Nechť  $\boldsymbol{\Omega}^A$  je vektor úhlové rychlosti příslušející první transformaci  $A$ , zatímco  $\boldsymbol{\Omega}^B$  je vektor úhlové rychlosti příslušející druhé transformaci  $B$ . Vektor úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\Omega}^C$  výsledného otočení  $C = BA$  je dán prostým vztahem

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega}^C = \boldsymbol{\Omega}^B + \boldsymbol{\Omega}^A}. \quad (1.10)$$

**Důkaz:** Podle definice (1.2) je matice  $\Omega^C$  dána

$$\Omega^C = \frac{dC}{dt} C^t = \frac{d(BA)}{dt} (BA)^t = \left( \frac{dB}{dt} A + B \frac{dA}{dt} \right) A^t B^t = \frac{dB}{dt} B^t + B \frac{dA}{dt} A^t B^t = \Omega^B + B \Omega^A B^t,$$

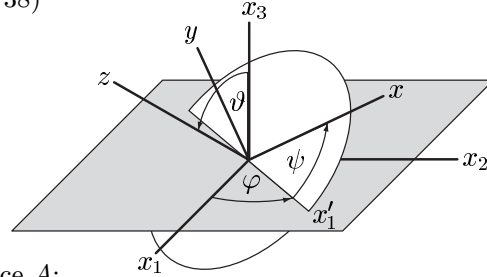
neboli ve složkách  $\Omega^{C''}_{jk} = \Omega^{B''}_{jk} + B_{jl} B_{kn} \Omega^{A'}_{ln}$ . Prvky  $\Omega^{A'}_{ln}$  jsou složky matice vůči bázi  $\mathbf{e}'_i$  a  $B_{jl} B_{kn} \Omega^{A'}_{ln}$  představuje transformaci těchto složek do báze  $\mathbf{e}''_j$  ( $B_{jl} B_{kn} \Omega^{A'}_{ln} = \Omega^{A''}_{jk}$ ), v níž jsou vyjádřeny složky  $\Omega^{C''}_{jk}$  a  $\Omega^{B''}_{jk}$ . Ve výsledné bázi tedy platí  $\Omega^C = \Omega^B + \Omega^A$ , což jsme měli dokázat.

☒

## 1.4 Eulerovy úhly a Eulerovy kinematické rovnice

Ortogonální matice  $A$  jednoznačně určující vztah mezi dvěma libovolně natočenými bázemi je určena pouhými 3 nezávislými parametry (matice  $3 \times 3$  obsahuje obecně 9 prvků, relace ortogonalitativ však představují 6 vazeb). Libovolnou rotaci kolem počátku můžeme přitom realizovat třemi po sobě jdoucími jednoduchými rotacemi kolem vhodné pevné osy. Za úhlové parametry zmíněných tří jednoduchých rotací zvolil Euler (1738)

$\varphi$  ... precesní úhel  
 $\vartheta$  ... nutační úhel  
 $\psi$  ... rotační úhel



Jejich význam plyne z následující konstrukce matice  $A$ :

1. Vyjdeme z báze  $\mathbf{e}_i$  pevné v prostoru a provedeme otočení kolem osy  $x_3$  o úhel  $\varphi$ . Otočení je dáno maticí (1.8)

$$D = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Následně provedeme otočení kolem osy  $x'_1$  o úhel  $\vartheta$  dané maticí

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ 0 & -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

3. Nakonec provedeme otočení kolem osy  $x''_3$  o úhel  $\psi$  dané maticí

$$B = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Výsledná matice  $A$  transformace od báze pevné v prostoru do báze korotující s tělesem je pak samozřejmě dána maticovým součinem  $A = BCD$ . Její tvar explicitně neuvádíme, neboť naším hlavním záměrem zde je vyjádřit celkový vektor úhlové rychlosti  $\boldsymbol{\Omega}$  odpovídající transformaci  $A$ . Protože jsme dokázali vztah (1.10) o skládání vektorů úhlových rychlostí, je výsledný vektor  $\boldsymbol{\Omega}$  dán součtem dílčích vektorů úhlových rychlostí odpovídajících transformacím  $D$ ,  $C$  a  $B$ , přičemž z (1.8) je zřejmé, že  $\boldsymbol{\Omega}^D = (0, 0, \dot{\varphi})$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^C = (\dot{\vartheta}, 0, 0)$ ,  $\boldsymbol{\Omega}^B = (0, 0, \dot{\psi})$ . Nesmíme ovšem zapomenout, že složky uvedených vektorů se vztahují vždy k příslušné výsledné bázi. Abychom tedy dostali všechny složky vyjádřené ve výsledné bázi korotující s tělesem (v níž je již vyjádřen vektor  $\boldsymbol{\Omega}^B$ ), musíme přetransformovat složky vektoru  $\boldsymbol{\Omega}^C$  maticí  $B$  a složky vektoru  $\boldsymbol{\Omega}^D$  dokonce maticí  $BC$ , t.j.  $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Omega}^B + B\boldsymbol{\Omega}^C + BC\boldsymbol{\Omega}^D$ . Explicitním výpočtem dostáváme nyní již snadno tzv. Eulerovy kinematické rovnice (1760)

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \sin \psi + \dot{\vartheta} \cos \psi, \\ \Omega_y &= \dot{\varphi} \sin \vartheta \cos \psi - \dot{\vartheta} \sin \psi, \\ \Omega_z &= \dot{\varphi} \cos \vartheta + \dot{\psi}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

kde jsme označili osy výsledného systému korotujícího s tělesem jako  $(x, y, z)$ .

Zavedení Eulerových úhlů je velmi přirozené, protože jejich geometrický význam, zřejmý z výše uvedeného obrázku, dovoluje názornou interpretaci. Rotační úhel  $\psi$  měří „vlastní rotaci“ tělesa kolem jeho osy  $z$ , zpravidla ztotožněné s osou symetrie. Tato osa se ovšem sama natáčí kolem



pevného bodu, přičemž její okamžitá poloha je jednoznačně určena nutačným úhlem  $\vartheta$  určujícím odklon osy od svislého směru a úhlem precesním  $\varphi$  hrajícím roli „zeměpisné šířky“ (povšimněme si, že zavedení Eulerových úhlů  $\vartheta$  a  $\varphi$  je totožné se standardním zavedením sférických souřadnic). Přesněji vzato měří  $\varphi$  natočení tzv. *uzlové přímky*  $x'_1$  dané průsečíkem výchozí roviny  $(x_1, x_2)$  s rovinou kolmou k ose  $z$  tělesa  $(x''_1, x''_2) \equiv (x, y)$ ; evidentně však platí, že úhel průmětu osy  $z$  do roviny  $(x_1, x_2)$  je  $\varphi_{\text{osa}} = \varphi - \frac{\pi}{2}$ .

## 1.5 Zrychlení v neinerciální soustavě

Obecné identity (1.7) můžeme také s výhodou použít k rychlému odvození všech zrychlení, jež působí v neinerciální soustavě. Nejprve za vektor  $\mathbf{w}$  zvolíme polohový vektor  $\mathbf{r}$  libovolného bodu. Označíme-li rychlost jeho pohybu vůči prostoru symbolem  $\mathbf{v}_p \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\text{prostor}}$  a jeho rychlost vůči tělesu symbolem  $\mathbf{v}_t \equiv \left. \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|_{\text{těleso}}$ , ihned dostáváme vztah  $\mathbf{v}_p = \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ . Nyní aplikujme identitu (1.7) ještě jednou, tentokrát na vektor rychlosti  $\mathbf{v}_p$ , čímž vyjádříme zrychlení bodu vůči prostoru

$$\mathbf{a}_p \equiv \left. \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right|_{\text{prostor}} = \left. \frac{d\mathbf{v}_p}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_p = \left. \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} \right|_{\text{těleso}} + \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{\text{těleso}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}).$$

Je přirozené označit zrychlení vůči tělesu symbolem  $\mathbf{a}_t \equiv \left. \frac{d\mathbf{v}_t}{dt} \right|_{\text{těleso}}$  a časovou změnu úhlové rychlosti  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \equiv \left. \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right|_{\text{těleso}}$ . Tím dostáváme vztah

$$\boxed{\mathbf{a}_p = \mathbf{a}_t + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_t + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})}, \quad (1.12)$$

který lze interpretovat takto: zrychlení  $\mathbf{a}_p$  libovolného bodu vůči prostoru je vektorový součet jeho zrychlení vůči tělesu  $\mathbf{a}_t$  plus Eulerovo zrychlení  $\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}$  způsobené časovou změnou  $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$  úhlové rychlosti otáčení tělesa plus Coriolisovo zrychlení  $2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_t$  plus odstředivé zrychlení  $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$  (spíše bychom však měli říkat „odosové zrychlení“).

## Kapitola 2

# Dynamika tuhého tělesa

Již tedy víme, jak výhodně popisovat kinematiku tuhého tělesa například pomocí Eulerových úhlů. Abychom mohli zformulovat dynamický zákon pro otáčející se těleso (pohybovou rovnici), je nutno zavést veličinu vystihující příslušné setrvačné vlastnosti tuhého tělesa. Podobně, jako hmotnost  $m$  tělesa je „mírou odporu tělesa vůči translačnímu urychlení“, je moment setrvačnosti  $I$  „mírou odporu tuhého tělesa vůči roztáčení“ kolem dané osy.

Ukazuje se však, že setrvačné vlastnosti tělesa při *obecném* roztáčení mají poněkud složitější strukturu, kterou nyní zcela popíšeme pomocí tzv. tenzoru setrvačnosti. Jak uvidíme, půjde o tenzor 2. řádu, který bude možné definovat „matematickým způsobem“, elegantně a invariantně (nezávisle na souřadnicích) jako bilineární zobrazení přiřazující dvojici vektorů jisté reálné číslo.

### 2.1 Tenzor setrvačnosti

Vyjdeme z momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  tuhého tělesa

$$\mathbf{L} = \sum_a \mathbf{r}^a \times \mathbf{p}^a = \sum_a m^a \mathbf{r}^a \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a), \quad (2.1)$$

kde sumace probíhá přes všech  $N$  bodů tělesa,  $a = 1, 2, \dots, N$ , majících hmotnosti  $m^a$  v místech  $\mathbf{r}^a$ . Ve vzorci jsme použili vztah  $\mathbf{v}^a = (d\mathbf{r}^a/dt)|_{\text{prostor}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a$ , který plyne z (1.7), neboť rychlost bodů vůči tělesu je nulová. Směr vektoru  $\mathbf{L}$  je možné charakterizovat vůči jiným vektorům. Vezměme proto nyní *libovolný vektor*  $\boldsymbol{\xi}$  a promítněme  $\mathbf{L}$  na  $\boldsymbol{\xi}$ ,

$$\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_a m^a \mathbf{r}^a \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) \cdot \boldsymbol{\xi} = \sum_a m^a (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a), \quad (2.2)$$

kde v posledním vztahu jsme využili pravidlo o cyklické záměně ve smíšeném součinu vektorů  $\mathbf{r}^a$ ,  $(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a)$  a  $\boldsymbol{\xi}$ . Je tedy přirozené pro dané těleso definovat funkci

$$\boxed{I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) \equiv \sum_a m^a (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi}}. \quad (2.3)$$

Funkce  $I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})$  definovaná tímto vztahem přiřazuje dvojici vektorů  $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega})$  reálné číslo rovné  $\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi}$ . Evidentně je lineární v obou argumentech a symetrická. Je to tedy podle „algebraické“ definice tenzor, navíc *symetrický*, a nazývá se *tenzor setrvačnosti*.

Dosadíme-li do (2.3) i za vektor  $\boldsymbol{\xi}$  též vektor  $\boldsymbol{\Omega}$ , dostaneme

$$I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = \sum_a m^a (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) \cdot (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}^a) = \sum_a m^a \mathbf{v}^a \cdot \mathbf{v}^a = 2T, \quad (2.4)$$

kde  $T$  je kinetická energie otáčejícího se tělesa.

Již jsme uvedli, že souvislost mezi „algebraickou“ a „složkovou“ definicí tenzoru najdeme, když vektory  $\boldsymbol{\xi}$  a  $\boldsymbol{\Omega}$  vyjádříme v bázi  $\{\mathbf{e}_i\}$  a využijeme bilineárnosti tenzorového zobrazení,

$$I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) = I(\xi_i \mathbf{e}_i, \Omega_j \mathbf{e}_j) = \xi_i \Omega_j I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = I_{ij} \xi_i \Omega_j, \quad (2.5)$$

kde složky  $I_{ij}$  tenzoru  $I$  jsou definovány jako obrazy vektorů báze  $\mathbf{e}_i$  a  $\mathbf{e}_j$ ,

$$I_{ij} \equiv I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \sum_a m^a (\mathbf{e}_i \times \mathbf{r}^a) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{r}^a). \quad (2.6)$$

Polohové vektory jednotlivých bodů tělesa lze ovšem také vyjádřit v bázi  $\{\mathbf{e}_i\}$ ,  $\mathbf{r}^a = x_i^a \mathbf{e}_i$ , takže

$$\begin{aligned} I_{ij} &= \sum_a m^a (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k) \cdot (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l) x_k^a x_l^a = \sum_a m^a (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k)_r (\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_l)_r x_k^a x_l^a \\ &= \sum_a m^a \varepsilon_{rik} \varepsilon_{rjl} x_k^a x_l^a = \sum_a m^a (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj}) x_k^a x_l^a = \sum_a m^a (\delta_{ij} x_k^a x_k^a - x_i^a x_j^a), \end{aligned}$$

resp. pro spojitě prostředí

$$I_{ij} = \int (\delta_{ij} x_k x_k - x_i x_j) \rho dV, \quad (2.7)$$

což je obvyklý tvar složek tenzoru setrvačnosti uváděný v učebnicích.

Z (2.5) a (2.3) pro složky momentu hybnosti ( $L_i \xi_i = \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\xi} = I(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Omega}) = I_{ij} \Omega_j \xi_i$ ) a z (2.4) pro kinetickou energii ( $2T = I(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}) = I_{ij} \Omega_i \Omega_j$ ) dostáváme velmi důležité vztahy

$$\begin{aligned} L_i &= I_{ij} \Omega_j, \\ T &= \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Z lineární algebry je známo, že každou symetrickou matici lze převést ortogonální transformací na diagonální tvar. Totéž samozřejmě platí i pro matici  $I_{ij}$ . V privilegované bázi reprezentující tzv. hlavní osy, ve které je tenzor setrvačnosti diagonální, se proto výraz pro moment hybnosti a kinetickou energii podstatně zjednoduší:

$$L_1 = I_1 \Omega_1, \quad L_2 = I_2 \Omega_2, \quad L_3 = I_3 \Omega_3, \quad T = \frac{1}{2} (I_1 \Omega_1^2 + I_2 \Omega_2^2 + I_3 \Omega_3^2), \quad (2.9)$$

kde  $I_i$  značí diagonální členy tenzoru v této bázi,  $I_{ij} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ . Diagonalizace se provádí standardním postupem nalezením *vlastních čísel*  $\lambda$  a *vlastních vektorů*  $\mathbf{v}$  matice  $I_{ij}$  (pro něž platí  $I_{ij} v_j = \lambda v_i$ ). Vlastní čísla  $\lambda$  nalezneme řešením charakteristické rovnice  $\det(I - \lambda E) = 0$ , poté dopočítáme  $\mathbf{v}_i$  příslušející  $\lambda_i$ . Mezi vlastními vektory lze vybrat tři navzájem kolmé a jednotkové. Ty tvoří zmíněnou bázi hlavních os, ve které má matice  $I_{ij}$  diagonální tvar, přičemž na diagonále se nacházejí právě vlastní čísla,  $I_i = \lambda_i$ .

Označme nyní  $\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{n}$ , kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový vektor ve směru okamžité osy otáčení. Porovnáním  $T = \frac{1}{2} I_{ij} \Omega_i \Omega_j = \frac{1}{2} I_{ij} n_i n_j \Omega^2$  se známým vzorcem  $T = \frac{1}{2} I_{\mathbf{n}} \Omega^2$  dostáváme

$$I_{\mathbf{n}} = I_{ij} n_i n_j, \quad (2.10)$$

kde  $I_{\mathbf{n}}$  je obvyklý moment setrvačnosti tělesa při otáčení kolem osy vedoucí zvoleným počátkem soustavy. Výraz je zjevně konzistentní s definicí  $I_{\mathbf{n}} \equiv I(\mathbf{n}, \mathbf{n}) = I(n_i \mathbf{e}_i, n_j \mathbf{e}_j) = n_i n_j I(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = n_i n_j I_{ij}$ . Navíc platí  $I_{\mathbf{n}} = I_{ij} n_i n_j = \int (x_k x_k n_i n_i - x_i n_i x_j n_j) \rho dV = \int (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})^2) \rho dV = \int r^2 (1 - \cos^2 \vartheta) \rho dV = \int r_{\perp}^2 dm$ , kde  $r_{\perp} = r \sin \vartheta$  je kolmá vzdálenost elementu hmotnosti  $dm$  od osy otáčení, což je známý vzorec.

Ze vztahu (2.10) je vidět, že i když má těleso sebesložitější tvar a i když je nehomogenní, stačí určit (třeba experimentálně) moment setrvačnosti  $I_{\mathbf{n}}$  vůči šesti různým libovolným osám  $\mathbf{n}$  procházejícím těžištěm. Vyřešením lineární soustavy rovnic (2.10) pak dopočítáme tenzor setrvačnosti  $I_{ij}$ , který již kompletně určuje setrvačné vlastnosti daného tělesa, tj. moment setrvačnosti

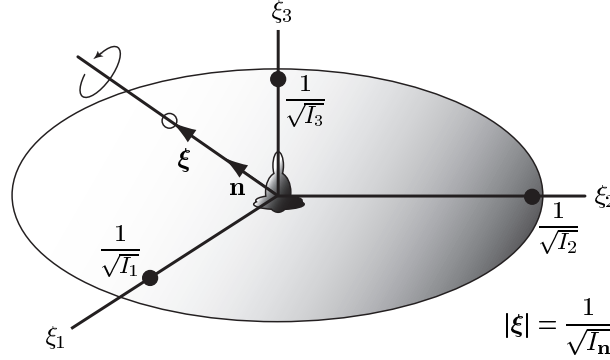
při otáčení vůči *libovolné* jiné ose procházející těžištěm. Formalismus je tedy i praktický a je z něj vidět pozoruhodná prediktivní síla teoretické mechaniky. Z výrazu (2.10) dále plyne, že

$$I_{ij} \frac{n_i}{\sqrt{I_n}} \frac{n_j}{\sqrt{I_n}} = 1 .$$

Označíme-li  $\xi_i \equiv n_i/\sqrt{I_n}$ , pak v bázi hlavních os má podmínka tvar

$$I_{ij}\xi_i\xi_j = I_1\xi_1^2 + I_2\xi_2^2 + I_3\xi_3^2 = 1 .$$

V prostoru parametrů  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  tato podmínka určuje povrch elipsoidu s osami  $\frac{1}{\sqrt{I_1}}, \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \frac{1}{\sqrt{I_3}}$ , kterému říkáme *elipsoid setrvačnosti*. Zvolíme-li libovolný směr osy otáčení  $\mathbf{n}$ , je tím určen též směr vektoru  $\boldsymbol{\xi} \sim \mathbf{n}$ . Jeho délka  $|\boldsymbol{\xi}|$  je jednoznačně určena průsečíkem daného směru s elipsoidem setrvačnosti. Odtud lze tedy již určit hodnotu momentu setrvačnosti  $I_n$  při otáčení podél dané osy pomocí vztahu  $|\boldsymbol{\xi}| = |\mathbf{n}|/\sqrt{I_n}$ , neboli  $I_n = 1/|\boldsymbol{\xi}|^2$ .



Pokud má těleso jistou *symetrii*, pak se tenzor setrvačnosti dále zjednodušuje. Například pro osově symetrické tuhé těleso (podél 3. hlavní osy) bude  $I_1 = I_2$ , takže elipsoid setrvačnosti bude degenerován na rotační elipsoid. Ve výjimečných případech může být dokonce  $I_1 = I_2 = I_3$ , takže elipsoid setrvačnosti bude dále degenerován na sféru. Pro takové těleso je moment setrvačnosti stejný pro *všechny* osy procházející jeho těžištěm. To je případ nejen homogenní koule, ale (překvapivě) též krychle, pravidelného čtyřřtenu atd.

Na závěr této části ještě připomeňme transformační vlastnosti tenzoru setrvačnosti. Vůči *rotacím* se chová jakožto tenzor, tedy  $I'_{ij} = A_{ik}A_{jl}I_{kl}$ . Pokud jde o *translace*, tedy posuv počátku souřadnic o konstantní vektor  $\mathbf{a}$  bez otočení os, pak ze souřadnicové definice (2.7) substitucí  $x_i = x_i^0 + a_i$ , kde  $x_i^0$  označuje *souřadnice vůči těžišti* a  $a_i$  složky vektoru posunutí  $\mathbf{a}$  vůči těžišti, můžeme přímým výpočtem odvodit, že  $I_{ij} = I_{ij}^0 + (\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j) m + 2\delta_{ij} a_k \pi_k^0 - a_i \pi_j^0 - a_j \pi_i^0$ , kde  $I_{ij}^0 = \int (\delta_{ij} x_k^0 x_k^0 - x_i^0 x_j^0) \rho dV$  jsou složky tenzoru setrvačnosti vůči těžišti,  $m = \int \rho dV$  je celková hmotnost tuhého tělesa a  $\pi_i^0 = \int x_i^0 \rho dV$  je jeho hmotový dipólový moment vůči těžišti. Ten však dle definice těžiště musí být nulový, čímž jsme odvodili obecnou *tenzorovou Steinerovu větu*

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + (\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j) m . \quad (2.11)$$

Přenosobním složkami  $n_i n_j$  jednotkového vektoru  $\mathbf{n}$  a užitím (2.10) dostáváme  $I_n = I_n^0 + a_\perp^2 m$ , kde  $I_n^0$  je moment setrvačnosti vůči těžišti a  $a_\perp^2 = a_k a_k - a_i n_i a_j n_j = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n})^2$ , tedy  $a_\perp$  je kolmá vzdálenost mezi paralelními osami otáčení.

## 2.2 Eulerovy dynamické rovnice

Nyní již můžeme zformulovat pohybové rovnice určující otáčivý pohyb tuhého tělesa. Vyjdeme ze známého Newtonova vzorce pro soustavu hmotných bodů, z 2. věty impulzové:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{M}.$$

Musíme však být opatrní. Moment působících sil je zde chápán jako působící v inerciálním systému „absolutního“ prostoru, tedy i levou stranu je nutno chápat jako časovou změnu vektoru  $\mathbf{L}$  vůči referenčnímu inerciálnímu systému  $\{\mathbf{e}_i\}$ , neboli  $\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{prostor}} = \mathbf{M}$ . Naproti tomu,  $\mathbf{L}$  lze nejlépe vyjádřit v neinerciální bázi *pevně spojené s tělesem*: pokud speciálně zvolíme tuto bázi  $\{\mathbf{e}'_i\}$  ve směru hlavních os tenzoru setrvačnosti  $(x, y, z)$ , dostaneme z (2.8) vztahy

$$L_x = I_1\Omega_x, \quad L_y = I_2\Omega_y, \quad L_z = I_3\Omega_z, \quad (2.12)$$

přičemž složky  $I_i$  jsou *konstanty*. Proto lze velmi snadno spočítat časovou změnu  $\mathbf{L}$  vůči korotující bázi, tedy  $\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{těleso}}$ . Naštěstí však již máme k dispozici důležitý vztah (1.7), dávající do souvislosti časové změny vektoru vůči oběma bázím,

$$\left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{prostor}} = \left.\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right|_{\text{těleso}} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}.$$

Odtud okamžitě dostáváme

$$\begin{aligned} M_x &= I_1\dot{\Omega}_x + (\Omega_y L_z - \Omega_z L_y), \\ M_y &= I_2\dot{\Omega}_y + (\Omega_z L_x - \Omega_x L_z), \\ M_z &= I_3\dot{\Omega}_z + (\Omega_x L_y - \Omega_y L_x), \end{aligned}$$

neboli

$$\boxed{\begin{aligned} I_1\dot{\Omega}_x - (I_2 - I_3)\Omega_y\Omega_z &= M_x, \\ I_2\dot{\Omega}_y - (I_3 - I_1)\Omega_z\Omega_x &= M_y, \\ I_3\dot{\Omega}_z - (I_1 - I_2)\Omega_x\Omega_y &= M_z. \end{aligned}} \quad (2.13)$$

To jsou tzv. *Eulerovy dynamické rovnice* (1758). Z matematického hlediska představují soustavu tří nelineárních diferenciálních rovnic 2. řádu. Za  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$  je totiž nutno dosadit z Eulerových kinematických rovnic (1.11) takže rovnice obsahují až 2. derivace Eulerových úhlů  $\varphi, \vartheta, \psi$ . Složky momentu sil  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$  musí být rovněž vyjádřeny vůči *korotující* neinerciální bázi pevně spojené s tělesem. Zatímco  $\mathbf{M}$  má obvykle jednoduchý tvar v nerotujícím inerciálním systému, jeho promítnutí do báze spojené s otáčejícím se tělesem je složité a obecně je dáno funkcemi  $M_i(\varphi, \vartheta, \psi)$ .

Eulerovy dynamické rovnice lze s výhodou použít, když  $M_x = M_y = M_z = 0$ . To je situace příkladu řešeného v části 3.1, kde spočítáme charakter otáčivého pohybu Země případně gyroskopu v Cardanově závěsu, zanedbáme-li momenty sil na ně působící.

## 2.3 Odvození pomocí Lagrangeova formalizmu

Eulerovy dynamické rovnice lze odvodit i aplikací Lagrangeova formalizmu, tedy užitím Lagrangeových rovnic  $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q^j} = Q_j$ , kde za zobecněné souřadnice  $q^j$  vezmeme Eulerovy úhly  $\varphi, \vartheta, \psi$ . Kinetická energie  $T$  rotujícího tuhého tělesa je dána obecným vzorcem (2.8), který se v bázi hlavních os  $(x, y, z)$  tenzoru setrvačnosti redukuje na výraz  $T = \frac{1}{2}(I_1\Omega_x^2 + I_2\Omega_y^2 + I_3\Omega_z^2)$ , viz (2.9). Díky Eulerovým kinematickým rovnicím (1.11) jsou složky vektoru úhlové rychlosti funkcemi  $\Omega_i(\vartheta, \psi, \dot{\varphi}, \dot{\vartheta}, \dot{\psi})$ .

Nejprve vyčíslíme Lagrangeovu rovnici pro souřadnici  $\psi$ . Užitím relací  $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_x = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_y = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_z = 1$  a  $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_x = \Omega_y$ ,  $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_y = -\Omega_x$ ,  $\frac{\partial}{\partial \psi} \Omega_z = 0$  plynoucích z (1.11) získáme pohybovou rovnici

$$I_3 \dot{\Omega}_z - (I_1 - I_2) \Omega_x \Omega_y = Q_\psi. \quad (2.14)$$

Lagrangeova rovnice pro zobecněnou souřadnici  $\vartheta$  dává podobně užitím (1.11) rovnici

$$(I_1 \dot{\Omega}_x - I_2 \Omega_y \Omega_z) \cos \psi - (I_2 \dot{\Omega}_y + I_1 \Omega_x \Omega_z) \sin \psi + I_3 \Omega_z \dot{\vartheta} \sin \vartheta = Q_\vartheta, \quad (2.15)$$

a třetí Lagrangeova rovnice pro  $\varphi$  po úpravách, při nichž se opět využijí Eulerovy kinematické rovnice (1.11) a výraz  $I_3 \dot{\Omega}_z$  se vyjádří pomocí (2.14), poskytuje vztah

$$(I_1 \dot{\Omega}_x - I_2 \Omega_y \Omega_z) \sin \psi + (I_2 \dot{\Omega}_y + I_1 \Omega_x \Omega_z) \cos \psi - I_3 \Omega_z \dot{\vartheta} = \frac{1}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta). \quad (2.16)$$

Nyní stačí již jenom sečíst rovnici (2.15) přenásobenou  $\cos \psi$  s rovnicí (2.16) přenásobenou  $\sin \psi$ , resp. rovnici (2.15) přenásobenou  $-\sin \psi$  s rovnicí (2.16) přenásobenou  $\cos \psi$ , a dostaneme první dvě Eulerovy dynamické rovnice (2.13) [třetí rovnicí je (2.14)]:

$$I_1 \dot{\Omega}_x - (I_2 - I_3) \Omega_y \Omega_z = Q_\vartheta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta), \quad (2.17)$$

$$I_2 \dot{\Omega}_y - (I_3 - I_1) \Omega_z \Omega_x = -Q_\vartheta \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta). \quad (2.18)$$

Zbývá pouze dokázat, že pravé strany rovnic (2.17), (2.18), (2.14) jsou složky  $(M_x, M_y, M_z)$  momentu sil v korotující bázi. Nejprve vyjádříme zobecněné síly  $Q_j$  pomocí složek  $(M_1, M_2, M_3)$  v pevné bázi. K tomu použijeme explicitní vyjádření souřadnic  $(x_1, x_2, x_3)$  polohového vektoru v pevné bázi pomocí jeho složek  $(x, y, z)$  v bázi korotující s tělesem, jenž je dán inverzní maticí k transformační matici  $A = BCD$  za sekce 1.4. Protože je ortogonální, platí  $A^{-1} = D^t C^t B^t$ , takže

$$\begin{aligned} x_1 &= f \cos \varphi - (g \cos \vartheta - h \sin \vartheta) \sin \varphi, & f &= x \cos \psi - y \sin \psi, \\ x_2 &= f \sin \varphi + (g \cos \vartheta - h \sin \vartheta) \cos \varphi, & \text{kde } g &= x \sin \psi + y \cos \psi, \\ x_3 &= g \sin \vartheta + h \cos \vartheta, & h &= z, \end{aligned}$$

odkud plynou vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} &= -x_2, & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} &= x_1, & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} &= 0, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \vartheta} &= x_3 \sin \varphi, & \frac{\partial x_2}{\partial \vartheta} &= -x_3 \cos \varphi, & \frac{\partial x_3}{\partial \vartheta} &= g \cos \vartheta - h \sin \vartheta, \\ \frac{\partial x_1}{\partial \psi} &= -g \cos \varphi - f \cos \vartheta \sin \varphi, & \frac{\partial x_2}{\partial \psi} &= -g \sin \varphi + f \cos \vartheta \cos \varphi, & \frac{\partial x_3}{\partial \psi} &= f \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Užitím definice zobecněných sil  $Q_j \equiv F_1 \frac{\partial x_1}{\partial q^j} + F_2 \frac{\partial x_2}{\partial q^j} + F_3 \frac{\partial x_3}{\partial q^j}$  a  $M_i \equiv \varepsilon_{ijk} x_j F_k$  spočteme že

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= M_3, \\ Q_\vartheta &= M_1 \cos \varphi + M_2 \sin \varphi, \\ Q_\psi &= (M_1 \sin \varphi - M_2 \cos \varphi) \sin \vartheta + M_3 \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (2.19)$$

neboli inverzně

$$\begin{aligned} M_1 &= Q_\vartheta \cos \varphi - \frac{Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi}{\sin \vartheta} \sin \varphi, \\ M_2 &= Q_\vartheta \sin \varphi + \frac{Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi}{\sin \vartheta} \cos \varphi, \\ M_3 &= Q_\psi. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Nakonec vyjádříme složky  $(M_x, M_y, M_z)$  momentu sil v korotující bázi pomocí složek  $(M_1, M_2, M_3)$  v pevné bázi aplikací transformační matice  $A = BCD$ . Navíc si můžeme z (2.20) všimnout, že složky  $(M_1, M_2, M_3)$  se získávají ze složek  $(Q_\vartheta, (Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi)/\sin \vartheta, Q_\varphi)$  aplikací ortogonální matice  $D^t = D^{-1}$ , takže od  $(Q_\vartheta, (Q_\varphi \cos \vartheta - Q_\psi)/\sin \vartheta, Q_\varphi)$  k  $(M_x, M_y, M_z)$  se přechází aplikací matice  $AD^t = BCDD^{-1} = BC$ , což ihned dává

$$\boxed{\begin{aligned} M_x &= Q_\vartheta \cos \psi + \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta), \\ M_y &= -Q_\vartheta \sin \psi + \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} (Q_\varphi - Q_\psi \cos \vartheta), \\ M_z &= Q_\psi. \end{aligned}} \quad (2.21)$$

Právě to jsme ale měli dokázat, neboť jde o pravé strany rovnic (2.17), (2.18), (2.14) a nezávisle jsme tedy odvodili Eulerovy dynamické rovnice (2.13). Nadto jsme získali explicitní vyjádření (2.21) složek momentu sil  $\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z)$  v korotující bázi.

Závěrem připomeňme, že jsou-li *síly konzervativní*, existuje Lagrangeova funkce  $L = T - V$ , kde  $V(\varphi, \vartheta, \psi)$  je příslušný potenciál, takže  $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q^j}$ . Složky momentu sil lze potom jednoduše psát

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{\sin \psi}{\sin \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) - \cos \psi \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ M_y &= \frac{\cos \psi}{\sin \vartheta} \left( \cos \vartheta \frac{\partial V}{\partial \psi} - \frac{\partial V}{\partial \varphi} \right) + \sin \psi \frac{\partial V}{\partial \vartheta}, \\ M_z &= -\frac{\partial V}{\partial \psi}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

## Kapitola 3

# Aplikace: setrvačníky

### 3.1 Volný setrvačnick (bezsilový)

V případě bezsilového setrvačnicku je moment  $\mathbf{M}$  nulový, takže Eulerovy dynamické rovnice (2.13) se redukují na nelineární rovnice 1. řádu v proměnných  $\Omega_i$ . Pro *symetrický setrvačnick* se dále velmi zjednodušují: je-li  $z$  (hlavní) osa symetrie axiálně symetrického tělesa, pak  $I_1 = I_2$ , takže

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\Omega}_x &= (I_1 - I_3) \Omega_y \Omega_z , \\I_1 \dot{\Omega}_y &= (I_3 - I_1) \Omega_z \Omega_x , \\I_3 \dot{\Omega}_z &= 0 .\end{aligned}$$

Odtud  $\Omega_z = \omega_0^z = konst$  a zbylé dvě rovnice dávají

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_x &= \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z \Omega_y \equiv \omega_0 \Omega_y , \\ \dot{\Omega}_y &= \frac{I_3 - I_1}{I_1} \omega_0^z \Omega_x \equiv -\omega_0 \Omega_x ,\end{aligned}$$

kde  $\omega_0 = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z = konst$ . Zderivováním a dosazením získáme rovnici harmonického oscilátoru

$$\ddot{\Omega}_x + \omega_0^2 \Omega_x = 0 ,$$

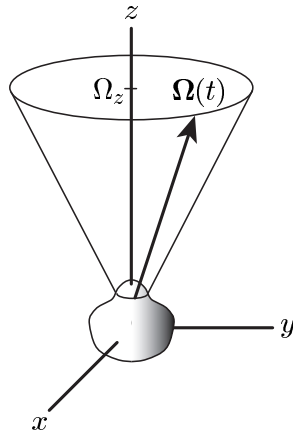
takže obecné řešení lze psát

$$\begin{aligned}\Omega_x &= A \sin(\omega_0 t + \delta) , \\ \Omega_y &= A \cos(\omega_0 t + \delta) , \\ \Omega_z &= \omega_0^z ,\end{aligned}\tag{3.1}$$

kde  $A, \delta, \omega_0^z$  jsou tři libovolné integrační konstanty a  $\omega_0 = \frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_0^z$  ( $\omega_0$  i  $\omega_0^z$  mohou být i záporné či nulové). Eulerovy úhly pak již lze snadno dopočítat z (1.11):  $\vartheta = \vartheta_0$ , kde  $\tan \vartheta_0 = \frac{I_1 A}{I_3 \omega_0^z}$ ,  $\varphi = \frac{A}{\sin \vartheta_0} t + \varphi_0$ ,  $\psi = \omega_0 t + \delta$ . Získali jsme tedy úplné řešení úlohy, musíme jej však ještě interpretovat geometricky a fyzikálně.

Protože  $|\mathbf{\Omega}| = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2} = \sqrt{A^2 + (\omega_0^z)^2}$ , vidíme, že  $|\mathbf{\Omega}|$  i  $\Omega_z$  se zachovávají. Lze tedy časový vývoj vektoru úhlové rychlosti  $\mathbf{\Omega}(t)$  znázornit geometricky jako *pohyb po kuželi*, jehož osa je totožná s osou symetrie setrvačnicku a jehož vrcholový (polo)úhel  $\vartheta_\Omega$  je dán  $\tan \vartheta_\Omega = \sqrt{\Omega_x^2 + \Omega_y^2} / \Omega_z = A / \omega_0^z$ . Protože směr  $\mathbf{\Omega}$  určuje okamžitou osu otáčení, nezůstává osa otáčení tuhého tělesa konstantní v čase, ale opisuje vůči tělesu výše zmíněný kužel s úhlovou rychlostí  $\omega_0$ . Tento efekt se nazývá *regulární precese*. (Pro zajímavost: na povrchu Země je to nepravidelná trajektorie podobná kružnici, jež se od pólu nevzdaluje více než 5 metrů, a experimentálně zjištěná perioda precese činí průměrně 427 dní.) Samozřejmě, pro speciální volbu  $\omega_0^z = 0$  nebo  $A = 0$  nebo při  $I_1 = I_3$  precese nenastává.

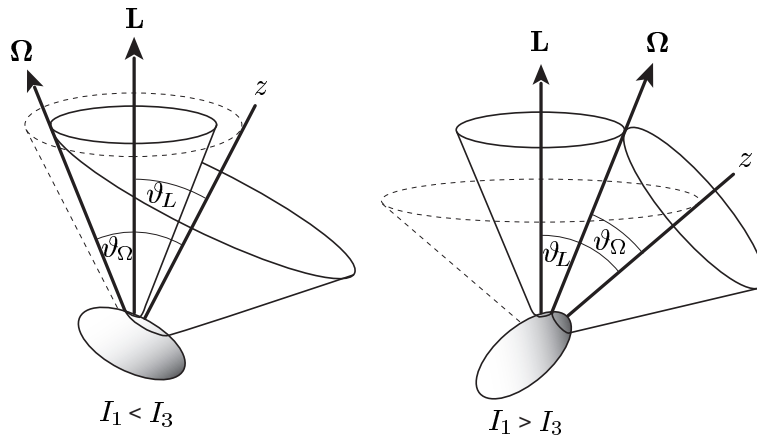




Zbývá ještě interpretovat pohyb okamžité osy rotace vůči pevnému *vnějšmu* inerciálnímu systému. Je třeba zvolit vhodný pevný směr, jímž může být například směr zachovávajícího se vektoru momentu hybnosti  $\mathbf{L}$ . Ze vztahů (2.12) vidíme, že vektory  $\mathbf{L}$  a  $\mathbf{\Omega}$  nemíří stejným směrem, konkrétně

$$\begin{aligned} L_x &= AI_1 \sin(\omega_0 t + \delta) , \\ L_y &= AI_1 \cos(\omega_0 t + \delta) , \\ L_z &= I_3 \omega_0^z , \end{aligned} \quad (3.2)$$

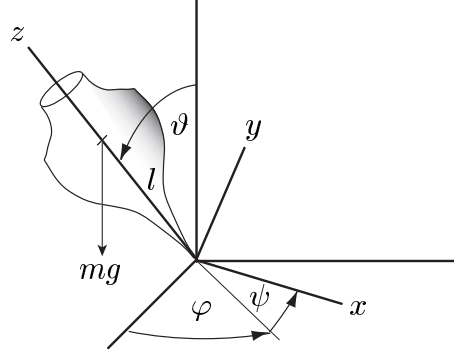
což popisuje pohyb  $\mathbf{L}$  po kuželi s vrcholovým (polo)úhlem  $\vartheta_L$  vzhledem k osám spojeným s tělesem, přičemž  $\tan \vartheta_L = \sqrt{L_x^2 + L_y^2}/L_z = I_1 A / I_3 \omega_0^z$  (povšimněte si, že  $\vartheta_L = \vartheta_0$ ). Vůči inerciálnímu systému však je  $\mathbf{L}$  fixován a uvedené vztahy naopak určují precesní pohyb os tělesa: kolem pevného směru vůči „hvězdám“ daného vektorem  $\mathbf{L}$  se tedy rovnoměrně otáčí osa  $z$  axiální symetrie tělesa a kolem této osy  $z$  koná precesi okamžitá osa otáčení určená  $\mathbf{\Omega}$ . Výsledek tedy není úplně jednoduchý, lze jej však hezky znázornit graficky. Z řešení (3.1) a (3.2) plyne vztah  $\mathbf{L} = I_1 \mathbf{\Omega} + (I_3 - I_1) \Omega_z \mathbf{e}_z$ . Vidíme, že vektory  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{\Omega}$  a osa symetrie  $z$  tělesa leží v každém okamžiku vždy ve *stejně rovině* (jež se stáčí). Navíc platí  $\tan \vartheta_L = \frac{I_1}{I_3} \tan \vartheta_\Omega$ . Celou situaci lze tedy znázornit jako valení dvou kuželů po sobě, přičemž okamžitá přímka jejich dotyku určuje směr vektoru  $\mathbf{\Omega}$ . Pro případ  $I_1 < I_3$  je  $\vartheta_L < \vartheta_\Omega$  a kužel spojený s  $\mathbf{L}$  se valí uvnitř kužele spojeného s osou  $z$ , zatímco pro  $I_1 > I_3$  je  $\vartheta_L > \vartheta_\Omega$  a kužele se valí vně sebe.



### 3.2 Těžký symetrický setrvačnick s pevným bodem

V této kapitole chceme na konkrétním příkladu demonstrovat užitečnost alternativního přístupu k řešení dynamiky tuhého tělesa, totiž použití *Lagrangeova formalismu*. Ten je založen na sestavení Lagrangeovy funkce  $L = T - V$  ve vhodných zobecněných souřadnicích, jimiž budou Eulerovy úhly.

Uvažujme tedy osově symetrické těleso hmotnosti  $m$ , které se může volně otáčet v homogenním gravitačním poli  $g$  kolem pevného bodu vzdáleného  $l$  od těžiště tělesa.



Kinetická energie rotujícího tělesa je dána  $T = \frac{1}{2}I_{ij}\Omega_i\Omega_j$ , viz (2.8). Zvolíme-li za kartézské osy rotujícího systému hlavní osy tenzoru setrvačnosti tělesa, vymizí deviační momenty ( $I_{ij} = 0$  pro  $i \neq j$ ); netriviální budou pouze složky  $I_3$  a  $I_1 = I_2$ , takže  $I_{zz} = I_3$  a (užitím Steinerovy věty)  $I_{xx} = I_{yy} = I_1 + ml^2$ . Kinetická energie je proto dána  $T = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \frac{1}{2}I_3\Omega_z^2$ . Dosadíme-li za  $\Omega_i$  z Eulerových kinematických rovnic (1.11) a uvážíme-li potenciální energii, dostáváme Lagrangeovu funkci

$$L = \frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 - mgl \cos \vartheta . \quad (3.3)$$

Protože souřadnice  $\psi$  a  $\varphi$  jsou cyklické, dostáváme ihned dva integrály pohybu

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} &= I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi}) = L_\psi , \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} &= [(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta + I_3 \cos^2 \vartheta] \dot{\varphi} + I_3 \cos \vartheta \dot{\psi} = L_\varphi , \end{aligned} \quad (3.4)$$

kde  $L_\psi$  a  $L_\varphi$  jsou konstanty. Protože navíc  $L$  nezávisí explicitně na čase a je kvadratický v rychlostech, zachovává se celková mechanická energie  $E = T + V = konst$ ,

$$\frac{1}{2}(I_1 + ml^2)(\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \cos \vartheta \dot{\varphi})^2 + mgl \cos \vartheta = E . \quad (3.5)$$

Soustavu (3.4) lze rozřešit vzhledem k  $\dot{\psi}$  a  $\dot{\varphi}$ ,

$$\dot{\varphi} = \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta} , \quad \dot{\psi} = \frac{L_\psi}{I_3} - \cos \vartheta \frac{L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta}{(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta} . \quad (3.6)$$

Dosazením (3.6) do (3.5) dostáváme po přímočarých úpravách

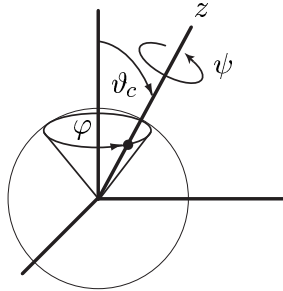
$$\frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\dot{\vartheta}^2 = \tilde{E} - V_{ef}(\vartheta) , \quad (3.7)$$

kde  $\tilde{E} = E - L_\psi^2/2I_3$  a „efektivní potenciál“  $V_{ef}(\vartheta)$  je dán

$$V_{ef}(\vartheta) = \frac{(L_\varphi - L_\psi \cos \vartheta)^2}{2(I_1 + ml^2) \sin^2 \vartheta} + mgl \cos \vartheta . \quad (3.8)$$

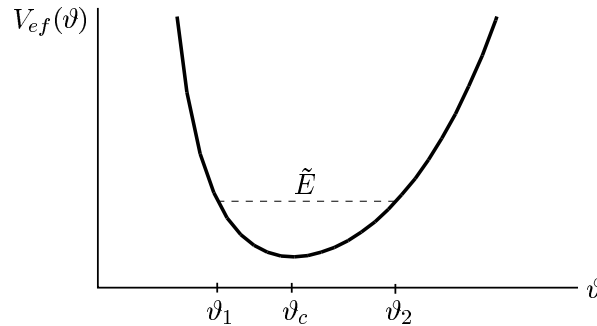
Integrací rovnice (3.7) a její inverzí obdržíme  $\vartheta(t)$  a po dosazení do (3.6) lze dalšími dvěma integracemi získat  $\psi(t)$  resp.  $\varphi(t)$ , čímž je úloha v principu vyřešena. Úplný rozbor a konkrétní výpočty (vedoucí na komplikovaná vyjádření pomocí eliptických integrálů) ovšem přesahují rámec tohoto krátkého studijního materiálu; lze je nalézt např. v knize V. Trkala, *Mechanika hmotných bodů a tuhého tělesa*, NČSAV, Praha, 1956. Zde se omezíme jen na hlavní zajímavé vlastnosti v chování studovaného setrvačnicku, které lze odvodit i bez znalosti explicitního řešení:

- 1) Existují speciální jednoduchá řešení  $\vartheta = \vartheta_c = \text{konst.}$ . V důsledku (3.6) pak je  $\varphi(t) = \omega_\varphi t + \varphi_0$ ,  $\psi(t) = \omega_\psi t + \psi_0$ , kde  $\omega_\varphi$ ,  $\omega_\psi$ ,  $\varphi_0$ ,  $\psi_0$  jsou konstanty. Setrvačnick rotuje kolem své osy symetrie konstantní úhlovou rychlostí  $\omega_\psi$ , přičemž tato osa se rovnoměrně pohybuje po povrchu svíslého kužele — setrvačnick koná regulární precesi. Pohyb se dá znázornit dráhou průsečíku osy symetrie s jednotkovou sférou opsanou kolem pevného bodu setrvačnicku,



Hodnota  $\vartheta_c$  musí být extrémem efektivního potenciálu  $V_{ef}$  a musí platit  $\tilde{E} = V_{ef}(\vartheta_c)$ .

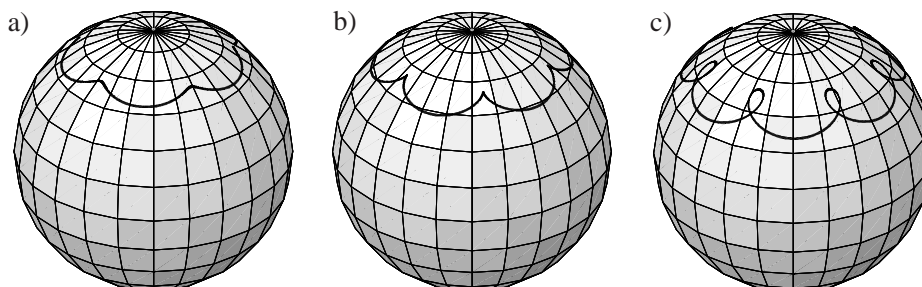
- 2) Obecně pro  $|L_\varphi| \neq |L_\psi| \neq 0$  existují právě dvě řešení  $\vartheta_1 < \vartheta_2$  rovnice  $V_{ef}(\vartheta) = \tilde{E}$  představující body obratu při evoluci  $\vartheta$ , což je zřejmé z průběhu  $V_{ef}(\vartheta)$ :



Nutační úhel  $\vartheta(t)$  periodicky osciluje mezi hodnotami  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  představujícími nejmenší resp. největší odklon osy symetrie setrvačnicku od svíslého směru. Vztah (3.6) pro  $\dot{\varphi}$  navíc ukazuje, že nabyde-li  $\vartheta(t)$  přesně hodnoty  $\vartheta_s$ , kde  $\cos \vartheta_s \equiv L_\varphi / L_\psi$ , precese setrvačnicku se zastaví, neboť pak  $\dot{\varphi} = 0$  (předpokládáme  $L_\psi > 0$ ). Pro hodnoty  $\vartheta(t) > \vartheta_s$  je  $\dot{\varphi} > 0$ , zatímco pro  $\vartheta(t) < \vartheta_s$  je  $\dot{\varphi} < 0$ . Protože  $\vartheta(t) \in \langle \vartheta_1, \vartheta_2 \rangle$ , mohou nastat následující případy:

- a)  $\vartheta_s < \vartheta_1$ : Pak je  $\varphi(t)$  monotónně rostoucí funkcí času a dráha průsečíku osy symetrie s jednotkovou sférou má vzhled znázorněný na Obr. a).
- b)  $\vartheta_s = \vartheta_1$ : Funkce  $\varphi(t)$  je nadále rostoucí, avšak v bodech  $\vartheta(t) = \vartheta_1$  dochází k pozastavení precese; proto se tvar dráhy průsečíku zobrazený na Obr. b) vyznačuje špičkami na vrchní „rovnoběžce“  $\vartheta_1$ .

- c)  $\vartheta_1 < \vartheta_s < \vartheta_2$ : Tvar dráhy průsečíku znázorněný na Obr. c) má podobu smyček, přičemž „rovnoběžka“  $\vartheta_s$  vymezuje ony body, v nichž přestává funkce  $\varphi(t)$  růst a začne dočasně klesat (tedy „levý“ a „pravý“ kraj smyček).



- 3) Pro  $L_\varphi = 0 = L_\psi$  se rovnice (3.7) redukuje na  $\frac{1}{2}(I_1 + ml^2)\dot{\vartheta}^2 + mgl \cos \vartheta = E$ . Zavedením proměnné  $\Theta = \pi - \vartheta$  a derivováním dostáváme přesnou rovnici matematického kyvadla ve tvaru  $(I_1 + ml^2)\ddot{\Theta} + mgl \sin \Theta = 0$ , takže osa symetrie setrvačnicku *kývá jako matematické kyvadlo*. Linearizované řešení pro nutační úhel je samozřejmě  $\vartheta = \pi - \Theta_0 \cos(\omega t + \delta)$ , kde  $\omega^2 = mgl/(I_1 + ml^2)$ .