

ZÁKLADNÍ POJMY VÝROKOVÉ LOGIKY

Výrok je každé sdělení, o němž má smysl říci, že je buď pravdivé nebo nepravdivé.

Pozn. Není důležité, zda o pravdivosti či nepravdivosti výroku umíme rozhodnout. Podstatné je, zda má smysl o pravdivosti uvažovat, zda má smysl položit si otázku: „Je pravda, že...?“

Úkol:

Rozhodněte, které z následujících vět jsou výroky:

1. Právě začalo pršet.
2. Na Marsu existují živé organismy.
3. Karel IV. byl v Praze r. 1348.
4. Rozvoj matematických představ.
5. Pojď k tabuli.
6. Číslo 4 je dělitelem čísla 134.
7. $100 : 5 = 20$
8. $4 + x = 9$

Ve výrokové logice nás nezajímá konkrétní obsah výroků, ale jejich pravdivost (pravdivostní hodnota).

Každému výroku je možné přiřadit pravdivostní hodnotu:

Je-li výrok pravdivý, je jeho pravdivostní hodnota 1.

Je-li výrok nepravdivý, jeho pravdivostní hodnota je 0.

Výroky budeme dále označovat velkými písmeny (A, B, C, P, Q, \dots)

Negace výroku A je výrok $\neg A$, který je pravdivý v případě, že výrok A je nepravdivý.

Př. A : Dnes je úterý.

$\neg B$: Dnes není úterý. (Není pravda, že je dnes úterý.)

Úkol:

Vyslovte několik výroků a vytvořte jejich negace:

Složené výroky

Z jednoduchých výroků můžeme tvořit složené výroky pomocí tzv. výrokotvorných spojek:

- „a“, „a současně“, „a zároveň“ (\wedge)
- „nebo“ (\vee)
- „buď, nebo“ ($\underline{\vee}$)
- „jestliže, pak“; „ A implikuje B “ (\Rightarrow)
- „právě tehdy, když“ (\Leftrightarrow)

Konjunkce výroků A, B je výrok $A \wedge B$, který je pravdivý v případě, že jsou oba výroky pravdivé.

Disjunkce (alternativa) výroků A, B je výrok $A \vee B$, který je pravdivý v případě, že je alespoň jeden z výroků A, B pravdivý.

Ostrá disjunkce výroků A, B je výrok $A \vee B$, který je pravdivý v případě, že je právě jeden z výroků A, B pravdivý.

Implikace výroků A, B je výrok $A \Rightarrow B$, který je **nepravdivý** jen v případě, že první výrok je pravdivý a druhý výrok je nepravdivý. Ve všech ostatních případech je implikace pravdivá.

Ekvivalence výroků A, B je výrok $A \Leftrightarrow B$, který je pravdivý v případě, že oba výroky mají stejnou pravdivostní hodnotu.

Někdy se v běžném jazyce nevyjadřujeme přesně - je potřeba logické spojky odhalit:

Úkol:

1. Zapište symbolicky, nebo vyslovte pomocí logických spojek:

- a) Petr přijde s Evou.
- b) Pokud přijde Petr, přijde i Eva.
- c) Přijde Petr, ale Eva ne.
- d) Ze dvojice Petr a Eva přijde nejvýš jeden.
- e) Buď přijde Eva, nebo Petr.
- f) Eva přijde jen tehdy, když přijde Petr.

2. Tatínek řekl Ondrovi: Budeš-li mít samé jedničky, dostaneš nové kolo. Co se týká vysvědčení (Ondra bude/nebude mít samé jedničky) a kola (Ondra dostane/nedostane kolo), mohly by nastat 4 různé situace. Rozhodněte, která z nich by neměla nastat, má-li být pravda, co tatínek řekl.

3. Maminka říká: Když si nenapišeš úlohu, nebudeš se dívat na televizi. Rozhodněte, která z možností nemůže nastat, má-li být pravda, co maminka říká.

4. Předpověď počasí na dnešek se nevyplnila. Jak můžete charakterizovat dnešní počasí, zněla-li předpověď takto:

- a) Bude jasno, teploty kolem nuly, klidno.
- b) Bude-li v místě jasno, poklesnou teploty pod -10°C .

Pomocí výrokotvorných spojek můžeme výroky různě skládat a uvažovat pak o jejich pravdivosti (obsah jednotlivých výroků nás nezajímá):

Mluvíme pak o **výrokových formulích**. Jsou to zápisy, ve kterých se objevují výrokové proměnné A, B, P, Q, \dots log. spojky, závorky a to tak, že když dosadíme za výrokové proměnné konkrétní výroky, dostaneme výrok: Např. $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$.

Pak nás zajímá, jaké pravdivostní hodnoty nabývá výsledný výrok v závislosti na pravdivosti výroků A, B .

Úlohy na procvičení:

Úloha 1. Ve městě Matematika platily zákony, které museli dodržovat všichni obyvatelé. Pozorně si každý zákon přečtete a zjistěte, ve kterých situacích je zákon dodržený a ve který je porušený. Své tvrzení zdůvodněte.

Z1: Maminky musejí mít oblečené bílé tričko nebo černou sukni.
a) Pavlova maminka má oblečené bílé tričko a černou sukni.
b) Honzova maminka má zelené tričko a černou sukni.
c) Evina maminka má oblečené bílé tričko a hnědou sukni.
d) Petrova maminka má modré tričko a bílou sukni.

Z2: Všichni černí psi musejí mít náhubek.
a) Pavlův strakatý pes má náhubek.
b) Honzův černý pes nemá náhubek.
c) Evin černý pes má náhubek.
d) Petrův hnědý pes nemá náhubek.

Z3: Každý panelák musí mít schodiště a výtah.
a) Panelák, ve kterém bydlí Pavel, má schodiště, ale nemá výtah.
b) Honza bydlí v paneláku, který má schodiště i výtah.
c) Eva bydlí v paneláku, který nemá schodiště ani výtah.
d) Petr bydlí v cihlovém domě se schodištěm bez výtahu.

Úloha 2. Kamarádi Borek, David, Pavel mají trička různé barvy, každý má jinou barvu: modrou, červenou, žlutou. Petr má červené nebo modré tričko. Borkovo tričko není ani červené ani modré. David nemá červené tričko. Jaké triko má každý z chlapců?

Úloha 3. Tři chlapci Adam, Boris, Dan chovají každý jedno ze zvířat: psa, kočku nebo papouška. Každý z nich bydlí v jiné ulici: Dolní, Střední nebo Horní. Víte, že

- Dan se bojí psů,
- Boris má papouška,
- nikdo z Dolní ulice nemá kočku,
- ten, kdo bydlí v Horní ulici, chová psa.

Zjistěte, jaké zvíře chová každý z chlapců a na které ulici bydlí.

Úloha 4. Automat na nápoje má pět tlačítek. Když stlačíte tlačítka s čísly 1 a 3, vydá automat kofolu a džus. Při stlačení tlačítek 2, 3 a 4 dostanete kakao, kofolu a minerálku. Když stlačíte 4 a 5, vydá automat mléko a kakao. Jaké nápoje vydá automat při stlačení tlačítek 2 a 5? Co vydá při stlačení ostatních tlačítek?