PŘÍKLADY NA PROCVIČENÍ

Komplexní čísla

PŘÍKLAD Řešte rovnici $x^4+1=0$ v množině $\mathbb{C}$. (I. způsob řešení)

(1)

$x^4 = -1 \quad \Rightarrow \quad x^4 = \alpha$

$\alpha = -1$

$\alpha = a + b\cdot i \Rightarrow a = -1 \qquad \cos\varphi = \frac{a}{|\alpha|} = \frac{-1}{1} = -1$

$b = 0 \qquad \sin\varphi = \frac{b}{|\alpha|} = \frac{0}{1} = 0$

$|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2}$

$|\alpha| = 1 \qquad \varphi = 180°$

$\alpha = x^4 = |\alpha|\cdot(\cos 180° + i\cdot\sin 180°)$

$x^4 = 1\cdot(\cos 180° + i\cdot\sin 180°)$

$$x_k = \sqrt[4]{|\alpha|}\cdot\left(\cos\frac{180°+2k\cdot\pi}{4} + i\cdot\sin\frac{180°+2k\cdot\pi}{4}\right)$$

$k=0:\quad x_0 = 1\cdot\left(\cos\frac{180°}{4} + i\cdot\sin\frac{180°}{4}\right) = 1\cdot(\cos 45° + i\cdot\sin 45°) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

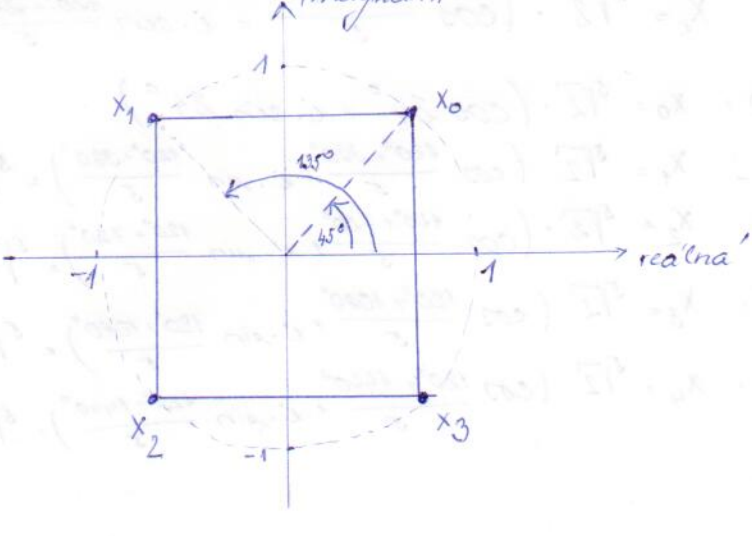
$k=1:\quad x_1 = 1\cdot\left(\cos\frac{180°+360°}{4} + i\cdot\sin\frac{180°+360°}{4}\right) = 1\cdot(\cos 135° + i\cdot\sin 135°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=2:\quad x_2 = 1\cdot\left(\cos\frac{180°+720°}{4} + i\cdot\sin\frac{180°+720°}{4}\right) = 1\cdot(\cos 225° + i\cdot\sin 225°) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=3:\quad x_3 = 1\cdot\left(\cos\frac{180°+1080°}{4} + i\cdot\sin\frac{180°+1080°}{4}\right) = 1\cdot(\cos 315° + i\cdot\sin 315°) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$K = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

Grafické zobrazení:



PŘÍKLAD 2 V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^3+27=0$. (II. způsob řešení)

$$x^3+27=0 \quad \ldots \quad x_1=-3$$

$$(x+3)(x^2-3x+9)=0$$

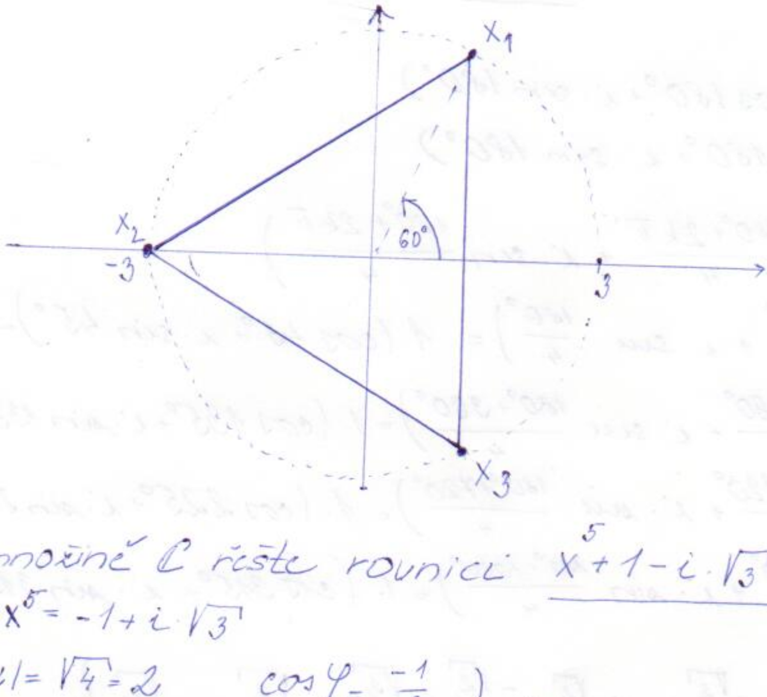
$$x^2-3x+9=0$$

$$x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 9}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{-27}}{2}=\frac{3\pm 3\cdot\sqrt{-3}}{2}=\frac{3\pm i\cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

$$x_2=\frac{3}{2}+\frac{i\cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

$$x_3=\frac{3}{2}-\frac{i\cdot 3\sqrt{3}}{2}$$

$$K=\left\{-3;\ \frac{3}{2}+\frac{i\cdot 3\sqrt{3}}{2};\ \frac{3}{2}-\frac{i\cdot 3\sqrt{3}}{2}\right\}$$



PŘÍKLAD 3 V množině $\mathbb{C}$ řešte rovnici $x^5+1-i\cdot\sqrt{3}=0$.

$$x^5=-1+i\cdot\sqrt{3}$$

$$|a|=\sqrt{4}=2 \qquad \left.\begin{array}{l}\cos\varphi=\frac{-1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\}\ \varphi=120°$$

$$x_k=\sqrt[5]{2}\cdot\left(\cos\frac{120°+2\cdot k\cdot\pi}{5}+i\cdot\sin\frac{120°+2k\cdot\pi}{5}\right)$$

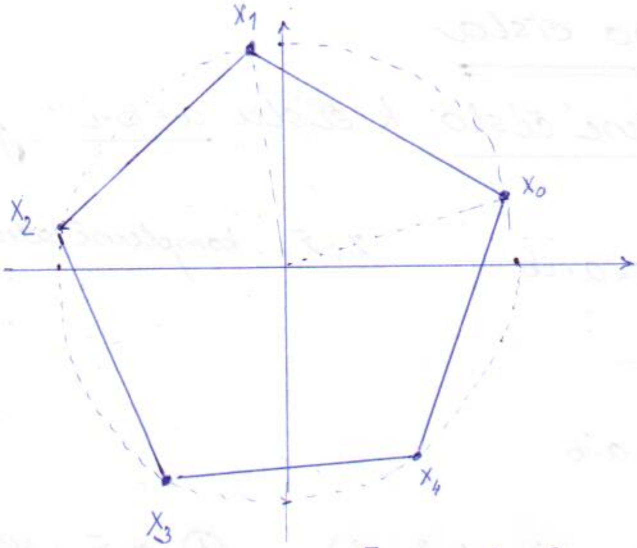
$k=0$: $x_0=\sqrt[5]{2}\cdot(\cos 24°+i\cdot\sin 24°)$

$k=1$: $x_1=\sqrt[5]{2}\cdot\left(\cos\frac{120°+360°}{5}+i\cdot\sin\frac{120°+360°}{5}\right)=\sqrt[5]{2}\cdot(\cos 96°+i\cdot\sin 96°)$

$k=2$: $x_2=\sqrt[5]{2}\cdot\left(\cos\frac{120°+720°}{5}+i\cdot\sin\frac{120°+720°}{5}\right)=\sqrt[5]{2}\cdot(\cos 168°+i\cdot\sin 168°)$

$k=3$: $x_3=\sqrt[5]{2}\cdot\left(\cos\frac{120°+1080°}{5}+i\cdot\sin\frac{120°+1080°}{5}\right)=\sqrt[5]{2}\cdot(\cos 240°+i\cdot\sin 240°)$

$k=4$: $x_4=\sqrt[5]{2}\cdot\left(\cos\frac{120°+1440°}{5}+i\cdot\sin\frac{120°+1440°}{5}\right)=\sqrt[5]{2}\cdot(\cos 312°+i\cdot\sin 312°)$



PŘÍKLAD 4 Řešte v $\mathbb{C}$ rovnici $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$

I. způsob řešení: $x^4(x+1)+x^2(x+1)+1\cdot(x+1)=0$

$(x+1)\cdot(x^4+x^2+1)=0 \quad \dots \quad \underline{x_0=-1}$

$x^4+x^2+1=0$

$D=-3$

$\sqrt{D}=i\cdot\sqrt{3}$

$x_{1,2}^2=\dfrac{-1\pm i\cdot\sqrt{3}}{2}$

$x_{1,2}^2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$

$x_{1,2}=\pm\left(\dfrac{-1}{2}+\dfrac{i\sqrt{3}}{2}\right)$

$\underline{x_1=-\dfrac{1}{2}+i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$\underline{x_2=\dfrac{1}{2}-i\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

$x_{3,4}^2=\dfrac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}$

$x_{3,4}=\pm\left(\dfrac{-1-i\cdot\sqrt{3}}{2}\right)$

$\underline{x_3=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i\sqrt{3}}{2}}$

$\underline{x_4=\dfrac{1}{2}+\dfrac{i\cdot\sqrt{3}}{2}}$

II. způsob řešení: $x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0 \quad /\cdot(x-1) \quad ; \; x-1\neq 0$ $\boxed{x\neq 1}$

$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x-x^5-x^4-x^3-x^2-x-1=0$

$\underline{x^6-1=0}$ ... binomická rovnice

$|\alpha|=1$

$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi=1\\ \sin\varphi=0\end{array}\right\}\varphi=0$

$x_0=1 \dots$ nemá řešení $(x\neq 1)$

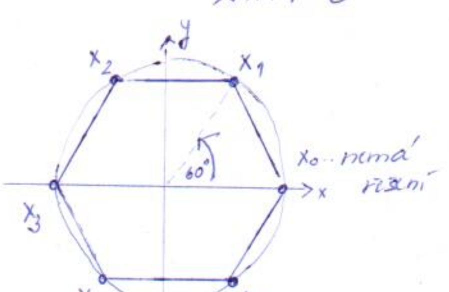
$x_1=(\cos 60^\circ+i\cdot\sin 60^\circ)=\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_2=(\cos 120^\circ+i\cdot\sin 120^\circ)=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_3=(\cos 180^\circ+i\cdot\sin 180^\circ)=-1$

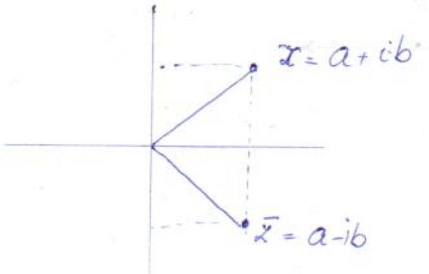
$x_4=(\cos 240^\circ+i\cdot\sin 240^\circ)=-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_5=(\cos 300^\circ+i\cdot\sin 300^\circ)=\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$



• Dělení komplexního čísla

Komplexně sdružené číslo k číslu $\underline{a+b\cdot i}$ je $\underline{a-b\cdot i}$



$z, \bar{z}$ ... komplexně sdružení

$\underline{\underline{z\cdot\bar{z}}} = (a+ib)\cdot(a-i\cdot b) = (a^2+b^2) \Rightarrow$ ① $z\cdot\bar{z}$ ... reálné číslo

② $z\cdot\bar{z} \geq 0$

③ $z\cdot\bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$

Podíl $\dfrac{z_1}{z_2}$; $z_2 \neq 0$

$$\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z_2}}{\bar{z_2}} = \frac{z_1\cdot\bar{z_2}}{\underbrace{z_2\cdot\bar{z_2}}_{\text{reálné číslo}}}$$

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ ⑤ Určete podíl $\dfrac{1+2\cdot i}{3+4\cdot i}$

$$\frac{1+2i}{3+4i}\cdot\frac{3-4i}{3-4i} = \frac{(1+2i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)} = \frac{3-4i+6i-8i^2}{9-16\cdot i^2} = \frac{3+2i+8}{9+16} =$$

komplexně sdružené

$$= \frac{11+2i}{25} = \underline{\underline{\frac{11}{25}+\frac{2}{25}\cdot i}}$$

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ ⑥ Určete $\left|1-i+\dfrac{1+2i}{3-i}\right| = |z|$

$$\frac{1+2i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i} = \frac{(1+2i)(3+i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{3+6i+i+2i^2}{9-i^2} = \frac{3+7i-2}{9+1} = \underline{\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\cdot i}$$

$$|z| = \left|1-i+\frac{1}{10}+\frac{7}{10}\cdot i\right| = \left|\frac{11}{10}-\frac{3}{10}\,i\right| = \sqrt{\frac{121}{100}+\frac{9}{100}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt{130}}{10}}}$$

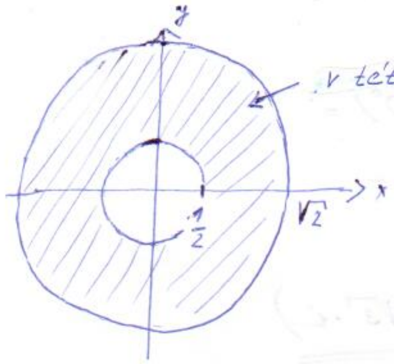
$\underline{z = a+bi}$ $\quad a = \frac{11}{10}$

$b = \frac{3}{10}$

PŘÍKLAD (7) V Gaussově rovině zobrazte všechna komplexní čísla, pro která platí:

a) $|1+i| \geq |z| \geq \frac{1}{2}$

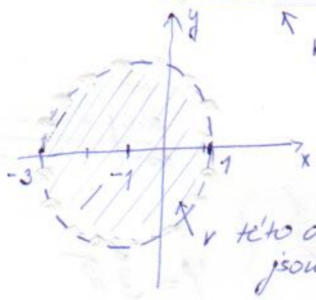
$|1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ $\qquad \sqrt{2} \geq |z| \geq \frac{1}{2}$



v této oblasti Gaussovy roviny leží hledaná komplexní čísla

b) $|1+z| < 2 \quad \sim \quad |z-(-1)| < 2$

vzdálenost komplexního čísla z od -1

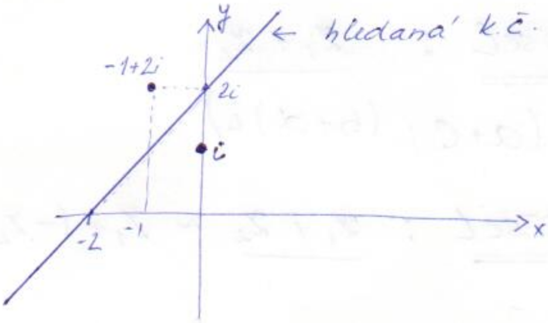


v této oblasti (mimo kružnici) jsou všechna hledaná komplexní čísla

c) $|z-i| \geq |z+(1-2i)|$

$|z-i| \geq |z-(-1+2i)|$

vzdálenost k.č. od čísla i $\qquad$ vzdálenost k.č. z od čísla $(-1+2i)$

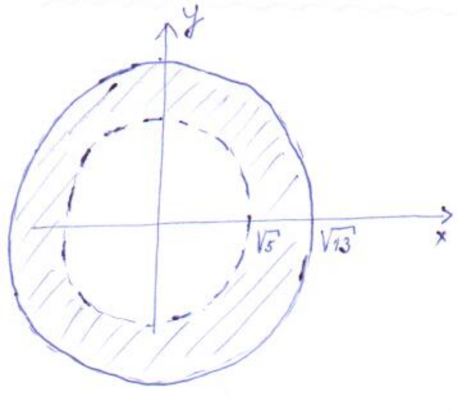


← hledaná k.č. leží na přímce

d) $|2-3i| \geq |z| > |1+2i|$

$|2-3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$|1+2i| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$



$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ Určete $(\sqrt{3} - i)^8$

8

podle Moivrovy věty: $z = a + b\cdot i$

$a = \sqrt{3}$

$b = -1$

$|z| = \sqrt{4} = \sqrt{3+1} = \underline{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \varphi = 330°$

$z = 2\cdot(\cos 330° + i\cdot \sin 330°)$

$z^8 = 2^8\cdot(\cos 8\cdot 330° + i\cdot \sin 8\cdot 330°) =$

$= 2^8\cdot(\cos 2640° + i\cdot \sin 2640°) =$

$= 2^8\cdot(\cos 120° + i\cdot \sin 120°) =$

$= 2^8\cdot\left(-\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \underline{\underline{2^7\cdot(-1+\sqrt{3}\cdot i)}}$

$\boxed{\text{PŘÍKLAD}}$ Zapište komplexní číslo $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$ v goniometrickém tvaru.

9

$\sin x$	+	+	−	−
$\cos x$	+	−	−	+

$z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$

$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \underline{\underline{1}}$

$a = \frac{1}{2}$

$b = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \varphi = \frac{5}{3}\pi$

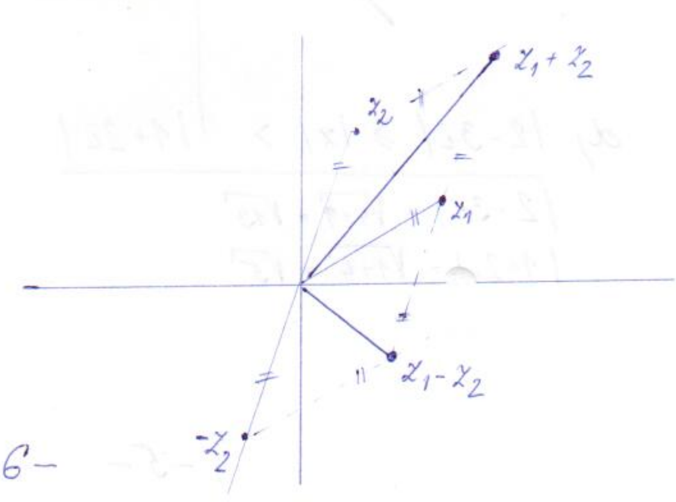
$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i = 1\cdot\left(\cos\frac{5}{3}\pi + i\cdot\sin\frac{5}{3}\pi\right)$

- Sčítání komplexních čísel: $z_1 + z_2$

$(a+bi) + (c+di) = (a+c;\ (b+d)i)$

- Rozdíl komplexních čísel: $z_1 - z_2 \sim z_1 + (-z_2)$

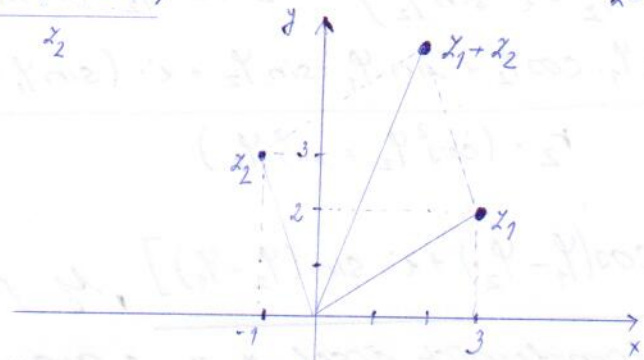
Geometrická interpretace:



PŘÍKLAD 10 V Gaussově rovině určete graficky, tj. bez výpočtu, komplexní čísla

(+) $\underbrace{(3+2i)}_{z_1} + \underbrace{(-1+3i)}_{z_2}$

$z = z_1 + z_2$



Zk: $z = 2 + 5i$

(−) $\underbrace{(3+2i)}_{z_1} - \underbrace{(-1+3i)}_{z_2} = (3+2i) + (-(-1+3i)) = \underbrace{(3+2i)}_{z_1} + \underbrace{(1-3i)}_{-z_2}$

• Násobení komplexních čísel : $z_1 \cdot z_2$

alg. tvar: $(a+b\cdot i)\cdot(c+d\cdot i) = (ac-bd;\ (ad+b\cdot c)\cdot i) = z_1 \cdot z_2$

geometrický tvar: $z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1)$ $\qquad r_1 = |z_1|$

$z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$ $\qquad r_2 = |z_2|$

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$, tj. součin dvou nenul. lib. komplex. čísel z_1, z_2 s argumenty φ_1, φ_2 je roven komplexnímu číslu $r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, kde $r = |z_1| \cdot |z_2|$ a $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$.

• <u>Dělení komplexních čísel</u>

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)} = \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 + i \cdot \sin\varphi_1)}{r_2 \cdot (\cos\varphi_2 + i \cdot \sin\varphi_2)} \cdot \frac{(\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)}{(\cos\varphi_2 - i \cdot \sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1 \cdot (\cos\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2 + i \cdot (\sin\varphi_1 \cdot \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \cdot \sin\varphi_2)}{r_2 \cdot (\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\right]$$

, tj. podíl $\frac{z_1}{z_2}$ libovolných nenulových komplexních čísel z_1, z_2 s argumenty φ_1, φ_2 je roven komplexnímu číslu $z = r \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, kde $r = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ a $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.