

MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

1. Základní pojmy

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

19. 9. 2017

Program prezentace

- 1 Organizace předmětu
- 2 Graf, vrcholy, hrany
- 3 Skóre grafu
- 4 Úplný graf, doplněk grafu

Dva předměty vzájemně provázané

- 1 MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1 – přednáška se koná v pondělí od **15:45 do 17:25 v učebně 10**
- 2 MA2BP_CDM1 Cvičení z diskrétní matematiky 1 – v termínu
 - **středa 7:30–8:15 v učebně 24** Pedagogické fakulty, Poříčí 31 – seminární skupina 01
 - **středa 8:25–9:10 v učebně 24** Pedagogické fakulty, Poříčí 31 – seminární skupina 01

- 1 MA2BP_CDM1 Cvičení z diskrétní matematiky 1: zápočtový test na konci semestru, v době konání poslední přednášky – k udělení zápočtu je třeba získat 60 % bodů. Zápočet je podmínkou pro připuštění ke kolokviu.
- 2 MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1: kolokvium formou ústní zkoušky u dr. Břetislava Fajmona

Doporučená literatura

- 1 FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 178 s. ISBN 80-210-2703-7.
- 2 MILKOVÁ, Eva. *Teorie grafů a grafové algoritmy*. 1. vyd. Hradec Králové: Nakladatelství Gaudeamus, 2013. 123 s. ISBN 978-80-7435-267-6.

Doplňující, nepovinná literatura

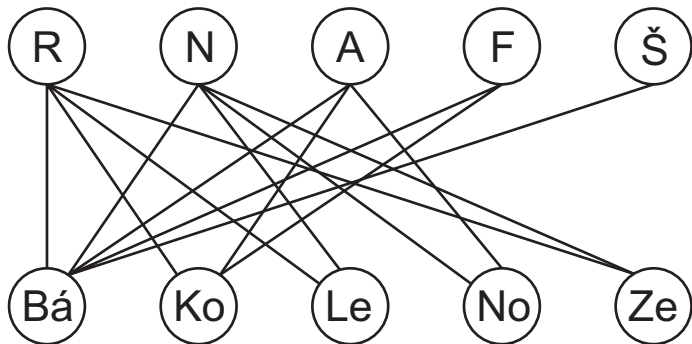
- NEŠETŘIL, Jaroslav. *Teorie grafů*. Vyd. 1. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1979. 316 s.

Jedna instituce vypsalala konkurz na obsazení 5 míst pro překladatele, a to z ruštiny, němčiny, angličtiny, francouzštiny a španělštiny. Přihlásilo se 5 uchazečů, kteří ovládali některé z těchto jazyků.

- Bárta ovládal všech 5 jazyků,
- Kopal angličtinu, francouzštinu a ruštinu,
- Lehký němčinu a ruštinu,
- Novák angličtinu a němčinu a
- Zeman ruštinu a němčinu.

Mohla instituce přijetím těchto uchazečů obsadit místa tak, aby každý z nich překládal jen z jednoho jazyka? Pokud ano, navrhněte řešení.

Konkurz – grafová reprezentace



Definice 1.1 (Milková): Obyčejný graf je uspořádaná dvojice (V, E) , kde

- V je neprázdná množina vrcholů (někdy též uzlů, angl. *vertex*),
- E je množina hran (angl. *edge*),

přičemž hrana e je dvouprvková podmnožina množiny V .

Poznámky

- 1 Vrcholy zakreslujeme v rovině pomocí kružnic, hrany jsou úsečky spojující dva vrcholy.
- 2 Definice odpovídá tzv. neorientovanému grafu, tj. hrany nemají orientaci. (Je-li e hrana mezi uzly x, y , pak vztah chápeme obousměrně: $x \rightarrow y$, $y \rightarrow x$.)

Zadání grafu

- Matematicky: $G = (V, E)$; $V = \{a, b, c, d, e\}$;
 $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}$

- Maticí sousednosti:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Tabulkou:

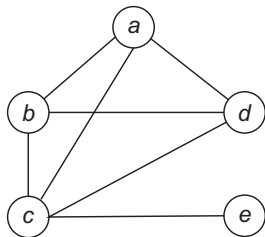
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>
<i>a</i>	0	1	1	1	0
<i>b</i>	1	0	1	1	0
<i>c</i>	1	1	0	1	1
<i>d</i>	1	1	1	0	0
<i>e</i>	0	0	1	0	0

- Grafem – zkuste zakreslit sami

Definice 1.2 (Milková): Necht' $e = \{v, w\}$ je hrana grafu G .

- Vrcholy v, w nazýváme **koncovými vrcholy hrany** e nebo též **vrcholy incidentní s hranou** e .
- Vrchol v nazýváme **sousedním vrcholem** vrcholu w , resp. vrchol w nazýváme **sousedním vrcholem** vrcholu v .

Příklad: v následujícím grafu je vrchol a incidentní s vrcholy b, c, d . Pouze vrchol c je sousedním vrcholem uzlu e .



Definice 1.3 (Milková):

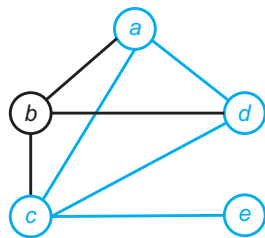
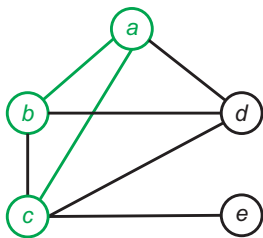
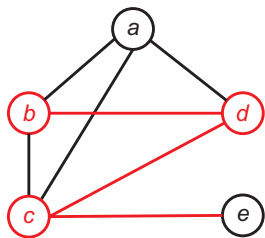
- 1 Graf $G = (V, E)$ se rovná grafu $G' = (V', E')$, jestliže $V = V'$ a $E = E'$.
- 2 Graf $G = (V, E)$ je **podgraf** grafu $G' = (V', E')$, jestliže $V \subseteq V'$ a $E \subseteq E'$.
- 3 Graf $G = (V, E)$ je **podgraf** grafu $G' = (V', E')$ **indukovaný vrcholy** množiny V , jestliže $V \subseteq V'$ a $E \subseteq E'$, přičemž v množině E jsou právě všechny hrany z množiny E' , jejichž koncové vrcholy leží v množině V .

Alternativní definice 3: Graf $G = (V, E)$ je **podgraf** grafu $G' = (V', E')$ **indukovaný vrcholy** množiny V , jestliže

- G je podgrafem G' a zároveň
- G obsahuje všechny hrany grafu G' mezi dvojicemi vrcholů z G .

Příklad

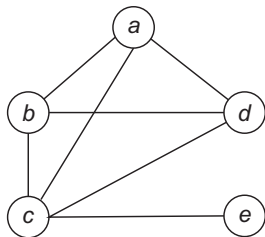
Na následujících obrázcích je tentýž graf G , v němž je barevně zvýrazněna určitá množina G' vrcholů a hran. Určete, zda G' je podgraf grafu G , resp. zda G' je indukovaný podgraf grafu G .

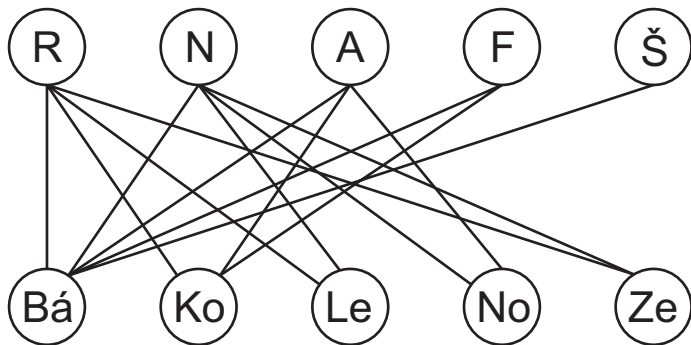


Definice 1.4 (Milková): Stupeň vrcholu v v grafu G je číslo rovnající se počtu hran incidentních s vrcholem v . Značíme jej $\deg_G(v)$ nebo krátce $d_G(v)$.

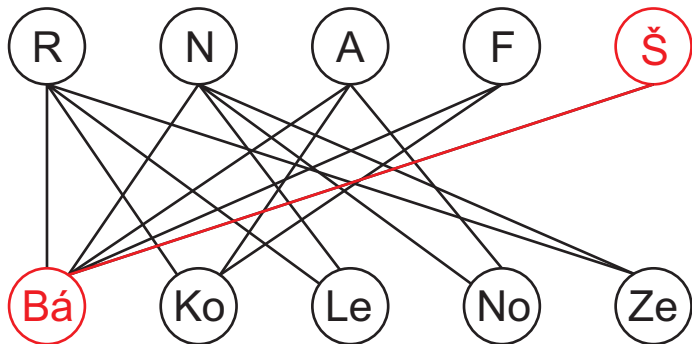
Příklad: v následujícím grafu platí:

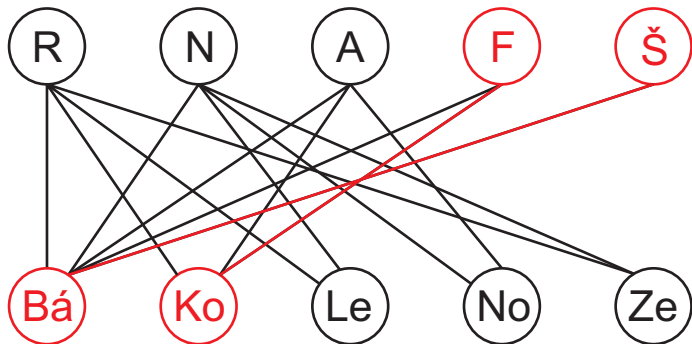
$$d_G(a) = d_G(b) = d_G(d) = 3, \quad d_G(c) = 4, \quad d_G(e) = 1$$

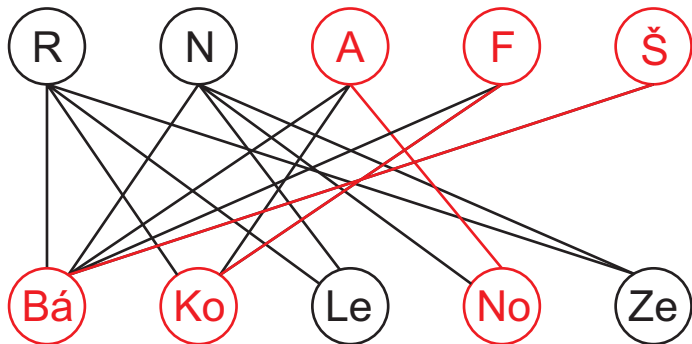


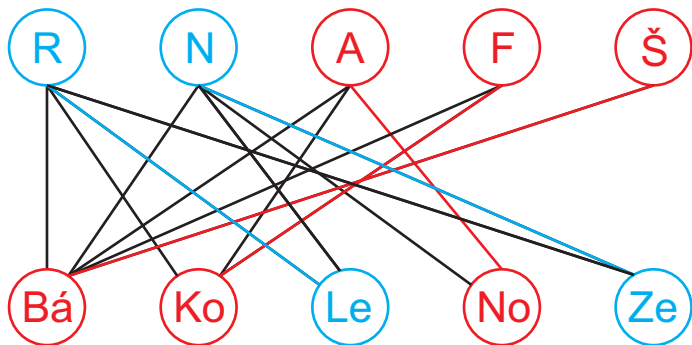


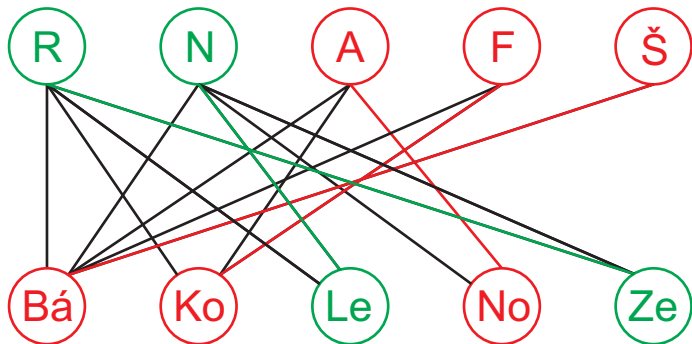
Mohla instituce přijetím těchto uchazečů obsadit místa tak, aby každý z nich překládal jen z jednoho jazyka?











Věta 1.1 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí vztah
$$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|.$$

Poznámka: Jinými slovy: součet stupňů všech vrcholů je dvojnásobkem počtu hran.

Důkaz:

- 1 Libovolná hrana je incidentní právě s dvěma uzly.
- 2 V součtu $\sum_{v \in V} d_G(v)$ stupňů všech vrcholů je tedy každá hrana započítána dvakrát.
- 3 Sečteme-li stupně všech vrcholů, dostaneme dvojnásobek počtu hran.

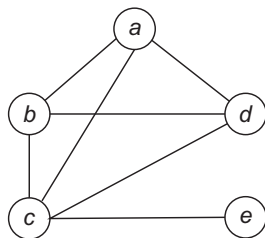
Důsledek 1.1 (Milková): Počet vrcholů lichého stupně v grafu G je sudý.

Definice 1.5 (Milková): Necht' $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy v_1, v_2, \dots, v_n . **Skóre grafu** je posloupnost $(d_G(v_1), d_G(v_2), \dots, d_G(v_n))$.

Poznámka:

- 1 Při zápisu skóre bývá zvykem stupně řadit vzestupně či sestupně.
- 2 Ze skóre grafu snadno zjistíme počet hran. Dle principu sudosti stačí sečíst všechny stupně a podělit dvěma – výsledné číslo je počet hran.

Příklad: Graf na obrázku má skóre $(1, 3, 3, 3, 4)$.



Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Věta 1.2 (Milková): Mějme *vzestupně seřazenou* posloupnost přirozených čísel (d_1, d_2, \dots, d_n) , kde $n \in \mathbb{N}$.

Vytvořme z D novou posloupnost $D' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$ tak, že

1 $d'_i = d_i$ pro $i < n - d_n$,

2 $d'_i = d_i - 1$ pro $i \geq n - d_n$.

Potom D je skóre grafu, právě když D' je skóre grafu.

Poznámka: Věta 1.2 dává návod, jak zjistit, zda zadané skóre určuje graf.

Postupně vytváříme posloupnosti, které mají vždy o jeden prvek méně.

Skončíme tehdy, když je jasné, zda aktuálně skóre jsme schopni "přeměnit" v graf.

Sérii posloupností lze následně použít i pro nakreslení grafu daného počáteční posloupností. Za chvíli si ukážeme jak.

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1

2

3

4

5

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1 Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.

2

3

4

5

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

- 1 Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
- 2 počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
 $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4)$
- 3
- 4
- 5

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

- 1 Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
- 2 počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
 $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 4)$
- 3 počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
 $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- 4
- 5

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

- 1 Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
- 2 počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
 $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 4)$
- 3 počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
 $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- 4 počet prvků: 6, $a_6 = 2$, předěl: $6 - 2 = 4$:
 $(1, 1, 2, 2, 2, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 1, 1) \rightsquigarrow (1, 1, 1, 1, 2)$
- 5

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

- 1 Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
- 2 počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
 $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 4)$
- 3 počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
 $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 2, 2, 2, 4)$
- 4 počet prvků: 6, $a_6 = 2$, předěl: $6 - 2 = 4$:
 $(1, 1, 2, 2, 2, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 1, 1) \rightsquigarrow (1, 1, 1, 1, 1, 2)$
- 5 počet prvků: 5, $a_5 = 2$, předěl: $5 - 2 = 3$:
 $(1, 1, 1, 1, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 0, 0) \rightsquigarrow (0, 0, 1, 1, 1)$

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

- 1 Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
- 2 počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
 $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4)$
- 3 počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
 $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 2, 2, 2)$
- 4 počet prvků: 6, $a_6 = 2$, předěl: $6 - 2 = 4$:
 $(1, 1, 2, 2, 2, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 1, 1) \rightsquigarrow (1, 1, 1, 1, 2)$
- 5 počet prvků: 5, $a_5 = 2$, předěl: $5 - 2 = 3$:
 $(1, 1, 1, 1, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 0, 0) \rightsquigarrow (0, 0, 1, 1)$ – graf s tímto skóre lze zakreslit (dva uzly jsou izolované, další dva propojeny hranou).

Nakreslení grafu dle posloupnosti skóre

$(0, 0, 1, 1) \rightsquigarrow (1, 1, 1, 1, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 2, 2, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$

$(0, 0, 1, 1)$:



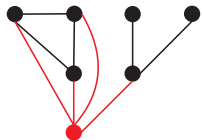
$(1, 1, 1, 1, \underline{2})$:



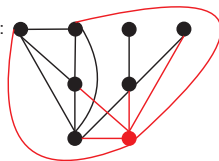
$(1, 1, 2, 2, 2, \underline{2})$:



$(1, 1, 3, 3, 3, 3, \underline{4})$:



$(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, \underline{6})$:



Definice 1.6 (Milková): Úplný graf na množině n vrcholů je graf s n vrcholy ($n \geq 1$), ve kterém je každý uzel spojen se všemi ostatními vrcholy hranou. Značíme jej K_n .

Příklady:

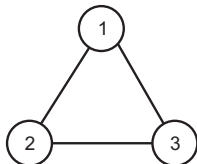
K_1



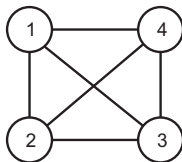
K_2



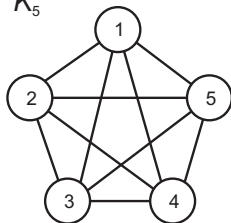
K_3



K_4



K_5



Definice 1.7 (Milková): Doplňěk grafu $G = (V, -E)$ grafu $G = (V, E)$ je graf, jehož množina hran $-E$ je množina všech hran úplného grafu na množině vrcholů V , které neleží v E .

Příklad: na následujícím obrázku je graf o pěti vrcholech a jeho doplňěk.

