MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

4. Dopravní úloha

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

24. 10. 2017

Program prezentace

Automobilová společnost

Automobilová společnost MG má závody v Los Angeles, Detroitu a New Orleans a distribuční střediska v Denveru a Miami. Kapacity výrobních závodů pro plánované období jsou po řadě 1000, 1500 a 1200 ks aut, poptávka středisek je 2300 a 1400 ks. Cena dopravy 1 auta na jednu míli je 8 centu (cent je setina dolaru).

Určete optimální rozdělení dopravy od výrobců ke spotřebitelským místům. Vzdálenosti mezi místy (v mílích) jsou uvedeny v tabulce.

	Denver	Miami
Los Angeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
New Orleans	1275	850

Obecné zadání dopravní úlohy

Mějme konkrétní výrobek, m závodů, které jej vyrábějí, a n spotřebitelských skladů, které jej odebírají.

Úkolem je najít optimální způsob rozvozu výrobků z výrobních závodů do spotřebitelských skladů tak, aby se minimalizovala cena dopravy. Vždy bude dáno:

- c_{ij} ... jednotková cena dopravy ze zdroje i na místo určení j
- a_i ... množství zásob ve zdroji i, kde $i = 1, 2, \ldots, m$
- b_j ... požadavek na počet výrobků od spotřebitele j, kde $j = 1, 2, \ldots, n$

Řešením jsou

1. optimální hodnoty proměnných x_{ij} jako množství výrobků dopravovaných ze zdroje i ke spotřebiteli j;
2. celková cena dopravy

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Automobilová společnost – shrnutí faktů

Ze zadání víme hodnoty a_i, b_j pro $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2$:

$\vec{a} = (1000, 1500, 1200)$
$\vec{b} = (2300, 1400)$

Neznáme jednotkovou cenu dopravy c_{ij} ze zdroje i ke spotřebiteli j, víme však vzdálenost mezi jednotlivými zdroji a spotřebiteli a cenu dopravy 1 auta na jednu míli (8 centů = 0,08 USD). Lze už snadno spočítat cenu dopravy jednoho auta od zdroje i ke spotřebiteli, např.
$c_{11} = 0,08 \cdot 1000 = 80$.

Můžeme tak připravit tabulku ceny převozu jednoho auta:

c_{ij}	Denver	Miami
Los Angeles	80	215
Detroit	100	108
New Orleans	102	68

Způsob zápisu dat dopravní úlohy

	Denver	Miami	
Los Angeles	80	215	1000
Detroit	100	108	1500
New Orleans	102	68	1200
	2300	1400	

$1000 + 1500 + 1200 = 2300 + 1400$ ... vyvážená úloha (kapacity výrobců a požadavky spotřebitelů jsou stejné)

Nevyvážená úloha

Nevyvážené úlohy se snažíme "vyvážit", abychom mohli použít řešící algoritmus.

1. Nabídka $<$ Poptávka: např. kapacita výroby v Detroitu je 1300, nikoliv 1500
2. Nabídka $>$ Poptávka: např. spotřebitelský sklad v Denveru požaduje pouze 1900, nikoliv 2300

V obou případech přidáváme fiktivního výrobce (resp. spotřebitele) s kapacitou, která je rovna rozdílu nabídky a poptávky, přičemž jednotková cena doprava je stanovena na 0.

Nabídka < Poptávka – vyvážení

	Denver	Miami	
Los Angeles	80	215	1000
Detroit	100	108	1300
New Orleans	102	68	1200
Fiction	0	0	200
	2300	1400	

Nabídka > Poptávka – vyvážení

	Denver	Miami	Al Capone	
Los Angeles	80	215	0	1000
Detroit	100	108	0	1500
New Orleans	102	68	0	1200
	1900	1400	400	

Řešící algoritmus dopravního problému

1. Počáteční krok – nalezení nějakého přípustného řešení. Můžeme použít tři různé metody:
   a) Metoda severozápadního rohu (SZR)
   b) Indexová metoda (IM)
   c) Vogelova aproximační metoda (VAM)
2. Optimalizační kroky – vylepšování počátečního řešení

Modelový příklad – vyvážená úloha

1. Tři zdroje V_1, V_2, V_3 a jejich kapacity $\vec{a} = (15, 25, 5)$
2. Čtyři spotřebitelé S_1, S_2, S_3, S_4 a jejich požadavky $\vec{b} = (5, 15, 15, 10)$
3. Jednotková cena $c_{ij}, 0 < i \leq 3, 0 < j \leq 4$ viz tabulka.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15
V_2	12	7	9	20	25
V_3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok

- Počáteční krok – nalezení nějakého přípustného řešení, které nemusí být optimální.
- Ukážeme si tři různé metody:
  a) Metoda severozápadního rohu (SZR)
  b) Indexová metoda (IM)
  c) Vogelova aproximační metoda (VAM)
- Pro vysvětlení metod použijeme naši modelovou vyváženou úlohu se 3 výrobci a 4 spotřebiteli.

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Začínáme v "severozápadním" rohu a hledáme x_{11}: stanovíme maximální možnou hodnotu x_{11} tak, aby byla rovna $\min(a_1, b_1) = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	$\boxed{10}$	0	20	11	**15**
V_2	12	7	9	20	25
V_3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{11} = 5$. Zcela jsme vyhověli požadavkům spotřebitele S_1, tudíž do dalších buněk 1. sloupce umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 **5**	0	20	11	**15**
V_2	12 –	7	9	20	25
V_3	0 –	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 1. řádku a hledáme x_{12}: kapacita výrobce V_1 je již snížena na 10, požadavky spotřebitele S_1 jsou v max. množství 15 $\Rightarrow$ $x_{12} = 10$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 / 5	0	20	11	**15**
V_2	12 / –	7	9	20	25
V_3	0 / –	14	16	18	5
	5	**15**	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{12} = 10$. Zcela jsme vyčerpali kapacitu výrobce V_1, tudíž do dalších buněk 1. řádku umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 5	0 **10**	20 –	11 –	**15**
V_2	12 –	7	9	20	25
V_3	0 –	14	16	18	5
	5	**15**	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 2. sloupci a hledáme x_{22}: kapacita výrobce V_2 je 25, požadavky spotřebitele S_2 jsou sníženy na 5 $\Rightarrow$ $x_{22} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 5	0 10	20 –	11 –	15
V_2	12 –	7	9	20	**25**
V_3	0 –	14	16	18	5
	5	**15**	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{22} = 5$. Zcela jsme vyhověli požadavkům spotřebitele S_2, tudíž do dalších buněk 2. sloupce umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 5	0 10	20 –	11 –	15
V_2	12 –	7 **5**	9	20	**25**
V_3	0 –	14 –	16	18	5
	5	**15**	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 2. řádku a hledáme x_{23}: kapacita výrobce V_2 je snížena na 20, požadavky spotřebitele S_3 jsou stále 15 $\Rightarrow$ $x_{23} = 15$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 / 5	0 / 10	20 / –	11 / –	15
V_2	12 / –	7 / 5	9 /	20 /	**25**
V_3	0 / –	14 / –	16 /	18 /	5
	5	15	**15**	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{23} = 15$. Zcela jsme vyhověli požadavkům spotřebitele S_3, tudíž do dalších buněk 3. sloupce umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 5	0 10	20 –	11 –	15
V_2	12 –	7 5	9 **15**	20	**25**
V_3	0 –	14 –	16 –	18	5
	5	15	**15**	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 2. řádku a hledáme x_{24}: kapacita výrobce V_2 je snížena na 5, požadavky spotřebitele S_4 jsou stále 10 $\Rightarrow$ $x_{24} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5 (10)	10 (0)	– (20)	– (11)	15
V_2	– (12)	5 (7)	15 (9)	(20)	**25**
V_3	– (0)	– (14)	– (16)	(18)	5
	5	15	15	**10**	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{24} = 5$. Zcela jsme vyčerpali kapacitu výrobce V_2.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 5 →	0 10 ↓	20 –	11 –	15
V_2	12 –	7 5 →	9 15 →	20 **5**	**25**
V_3	0 –	14 –	16 –	18	5
	5	15	15	**10**	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme ve 4. sloupci a hledáme x_{34}: kapacita výrobce V_3 je stále 5, požadavky spotřebitele S_4 jsou sníženy na 5 $\Rightarrow x_{34} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 5	0 10	20 –	11 –	15
V_2	12 –	7 5	9 15	20 5	25
V_3	0 –	14 –	16 –	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{34} = 5$. Zcela jsme vyčerpali kapacitu výrobce V_3 a vyhověli požadavkům spotřebitele S_4.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5 (10)	10 (0)	– (20)	– (11)	15
V_2	– (12)	5 (7)	15 (9)	5 (20)	25
V_3	– (0)	– (14)	– (16)	**5** (18)	**5**
	5	15	15	**10**	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Počáteční krok je dokončen. Vstupní rozdělení je uvedeno níže. Celková cena dopravy $5 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 18 = 410$ peněžních jednotek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 $\boxed{5}$	0 $\boxed{10}$	20 –	11 –	15
V_2	12 –	7 $\boxed{5}$	9 $\boxed{15}$	20 $\boxed{5}$	25
V_3	0 –	14 –	16 –	18 $\boxed{5}$	5
	5	15	15	10	

Důležitá podmínka dopravní úlohy

- Má-li dopravní tabulka m řádku a n sloupců, pak pomlčka **není** umístěna v $m + n - 1$ buňkách tabulky.
- Tento požadavek musí platit pro počáteční rozdělení i každý optimalizační krok.
- **Nebezpečná situace:** po nastavení proměnné x_{ij} jsme současně vyčerpali kapacitu výrobce V_i a naplnili požadavky spotřebitele S_j.
  1. V takovém případě by "nepomlčkových" buněk bylo méně než $m + n - 1$.
  2. Řešíme např. tak, že umístíme pomlčky do zbývajících polí řádku i, nastavíme $x_{i+1,j} = 0$ a do dalších polí sloupce j umístíme pomlčky.
  3. Viz příklad "degenerovaného počátečního rozdělení" na dalším slajdu.

Příklad degenerovaného počátečního rozdělení

	S_1	S_2	S_3	
V_1	0 $\boxed{5}$	2 –	1 –	5
V_2	2 $\boxed{0}$	1 $\boxed{5}$	5 $\boxed{5}$	10
V_3	2 –	4 –	3 $\boxed{5}$	5
	5	5	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Začínáme buňkou, která má minimální cenu: pole $[1, 2]$ s cenou 0.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	$\boxed{\mathbf{0}}$	20	11	**15**
V_2	12	7	9	20	25
V_3	0	14	16	18	5
	5	**15**	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Kapacita výrobce V_1 je 15, požadavky spotřebitele S_2 taktéž. Proto $x_{12} = 15$. Ostatní buňky 1. řádku označíme pomlčkami, do pole x_{22} vložíme 0, do dalších polí 2. sloupce pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0 **15**	20 –	11 –	**15**
V_2	12	7 **0**	9	20	25
V_3	0	14 –	16	18	5
	5	**15**	15	10	

Další buňka s minimální cenou je pole $[3, 1]$ s cenou 0.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0 15	20 –	11 –	15
V_2	12	7 0	9	20	25
V_3	**0**	14 –	16	18	**5**
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Kapacita výrobce V_3 je 5, požadavky spotřebitele S_1 taktéž. Proto $x_{31} = 5$. Ostatní buňky 3. řádku označíme pomlčkami, do pole x_{21} vložíme 0, do dalších polí 1. sloupce pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	15 (0)	– (20)	– (11)	15
V_2	**0** (12)	0 (7)	(9)	(20)	25
V_3	**5** (**0**)	– (14)	– (16)	– (18)	**5**
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Další buňka s minimální cenou je pole $[2, 2]$ s cenou 7. Požadavky spotřebitele S_2 jsou však již naplněny, proto ponecháme buňku beze změny.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	15 (0)	– (20)	– (11)	15
V_2	0 (12)	**0** (**7**)	(9)	(20)	25
V_3	5 (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	**15**	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Pouze 2. řádek obsahuje “nepomlčkové” buňky. Začneme s polem [2, 3] a minimální cenou 9.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	**9**	20	**25**
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	**15**	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Kapacita výrobce V_2 je 25, požadavky spotřebitele S_3 15. Proto $x_{23} = 15$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	15 (0)	– (20)	– (11)	15
V_2	0 (12)	0 (7)	**15** (**9**)	(20)	**25**
V_3	5 (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	**15**	10	

Zbývá jediná "nepomlčková" buňka [2, 4].

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0 15	20 –	11 –	15
V_2	12 0	7 0	9 15	**20**	**25**
V_3	0 5	14 –	16 –	18 –	5
	5	15	15	**10**	

Počáteční krok Indexovou metodou

Zbývající kapacita výrobce V_2 je 10, požadavky spotřebitele S_4 také 10 $\Rightarrow x_{24} = 10$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0 15	20 –	11 –	15
V_2	12 0	7 0	9 15	**20** **10**	**25**
V_3	0 5	14 –	16 –	18 –	5
	5	15	15	**10**	

Počáteční krok Indexovou metodou

Počáteční krok je dokončen. Vstupní rozdělení je uvedeno níže. Celková cena dopravy $15 \cdot 0 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 0 = 335$ peněžních jednotek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	$\boxed{15}$ (0)	– (20)	– (11)	15
V_2	0 (12)	0 (7)	$\boxed{15}$ (9)	$\boxed{10}$ (20)	25
V_3	$\boxed{5}$ (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	15	10	

Indexová metoda zajišťuje nižší celkovou cenu dopravy – Metoda severozápadního rohu nebrala na cenu c_{ij} ohled.

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

- **Penalizace** – rozdíl mezi druhou nejmenší cenou a nejmenší cenou, který určujeme pro každý řádek a sloupec. Penalizaci vkládáme do hranatých závorek za kapacitu výrobce či požadavky spotřebitele.

Postup pomocí Vogelovy aproximační metody

1. Nastavení penalizace pro všechny uvažované řádky a sloupce.
2. Výběr pole k úpravě – uplatňují se dvě podmínky:
   - buňka je na řádku či sloupci s největší *penalizací*,
   - cena buňky na vybraném řádku či sloupci je minimální.
3. Po výběru konkrétní buňky $[i, j]$ nastavíme proměnnou x_{ij} tradičním způsobem včetně vkládání pomlček v případě naplnění kapacity výrobce či splnění požadavků spotřebitele.
4. Pokračujeme v krocích 1–3 tak dlouho, dokud zbude pouze jeden řádek či sloupec, u něhož je vyplnění jednoznačně dáno.

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Nejdříve si pro každý řádek a sloupec zapíšeme penalizaci.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15 [10]
V_2	12	7	9	20	25 [2]
V_3	0	14	16	18	5 [14]
	5 [10]	15 [7]	15 [7]	10 [7]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Největší penalizaci má 3. řádek – buňka na 3. řádku s nejmenší cenou 0 je na pozici $[3, 1]$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15 [10]
V_2	12	7	9	20	25 [2]
V_3	**0**	14	16	18	**5 [14]**
	5 [10]	15 [7]	15 [7]	10 [7]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Kapacita výrobce V_3 je 5, požadavky spotřebitele S_1 taktéž. Proto $x_{31} = 5$. Ostatní buňky 3. řádku označíme pomlčkami, do pole x_{21} vložíme 0, do dalších polí 1. sloupce pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	(0)	(20)	(11)	15 [10]
V_2	**0** (12)	(7)	(9)	(20)	25 [2]
V_3	**5** (**0**)	– (14)	– (16)	– (18)	**5 [14]**
	5 [10]	15 [7]	15 [7]	10 [7]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Přepočítáme penalizaci pro uvažované řádky a sloupce.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	(0)	(20)	(11)	15 [11]
V_2	**0** (12)	(7)	(9)	(20)	25 [2]
V_3	**5** (**0**)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15 [7]	15 [11]	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Největší penalizaci má 3. sloupec – buňka na 2. řádku s nejmenší cenou 9 je na pozici $[2, 3]$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 / –	0	20	11	15 [11]
V_2	12 / **0**	7	**9**	20	25 [2]
V_3	**0** / **5**	14 / –	16 / –	18 / –	5
	5	15 [7]	**15 [11]**	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Kapacita výrobce V_2 je 25, požadavky spotřebitele S_3 jsou 15. Proto $x_{23} = 15$. Ostatní buňky 3. sloupce označíme pomlčkami.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0	20 **–**	11	15 [11]
V_2	12 0	7	**9** **15**	20	25 [2]
V_3	0 5	14 –	16 –	18 –	5
	5	15 [7]	**15 [11]**	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Přepočítáme penalizaci pro uvažované řádky a sloupce.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	(0)	– (20)	(11)	15 [11]
V_2	0 (12)	(7)	15 (9)	(20)	25 [13]
V_3	5 (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15 [7]	15	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Největší penalizaci má 2. řádek – buňka ve 2. sloupci s nejmenší cenou 7 je na pozici $[2, 2]$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0	20 –	11	15 [11]
V_2	12 0	**7**	9 15	20	**25 [13]**
V_3	0 5	14 –	16 –	18 –	5
	5	15 [7]	15	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Kapacita výrobce V_2 je snížená na 10, požadavky spotřebitele S_2 jsou 15. Proto $x_{22} = 10$. Ostatní buňky 2. řádku označíme pomlčkami.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0	20 –	11	15 [11]
V_2	12 0	**7** **10**	9 15	20 **–**	**25 [13]**
V_3	0 5	14 –	16 –	18 –	5
	5	15 [7]	15	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Zbývá nám už jen poslední řádek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 / –	$\boxed{0}$	20 / –	$\boxed{11}$	15
V_2	12 / 0	7 / 10	9 / 15	20 / –	25
V_3	0 / 5	14 / –	16 / –	18 / –	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Vybereme nejdříve buňku [1, 2]. Kapacita výrobce V_1 je 15, požadavky spotřebitele S_2 jsou snížené na 5. Proto $x_{12} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10 –	0 **5**	20 –	11	15
V_2	12 0	7 10	9 15	20 –	25
V_3	0 5	14 –	16 –	18 –	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Nakonec vybereme buňku $[1, 4]$. Kapacita výrobce V_1 je snížená na 10, požadavky spotřebitele S_4 jsou snížené na 10. Proto $x_{14} = 10$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	5 (0)	– (20)	**10** (11)	**15**
V_2	0 (12)	10 (7)	15 (9)	– (20)	25
V_3	5 (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	15	**10**	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Počáteční krok je dokončen. Vstupní rozdělení je uvedeno níže. Celková cena dopravy $5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 315$ peněžních jednotek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	$\boxed{5}$ (0)	– (20)	$\boxed{10}$ (11)	15
V_2	0 (12)	$\boxed{10}$ (7)	$\boxed{15}$ (9)	– (20)	25
V_3	$\boxed{5}$ (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	15	10	

Shrnutí tří metod

- Nejlepší výsledek v našem příkladu dala poslední metoda – Vogelova aproximační metoda, přesto nemusí být získané rozdělení nejlepší.
- Počáteční rozdělení dále zlepšujeme pomocí optimalizačních kroků.
- Rozdělení dopravy **nesmí** obsahovat uzavřený okruh! Příklady viz následující slajd.

Příklad uzavřeného okruhu

Uzavřený okruh $[1,2] - [1,3] - [2,3] - [2,2]$

–	5	10	–
–	10	5	10
5	–	–	–

Příklad uzavřeného okruhu

Uzavřený okruh $[1,1] - [1,3] - [3,3] - [3,1]$

0	–	15	–
–	15	–	10
5	–	0	–

Optimalizační krok

Vezmeme počáteční rozdělení dopravy získané některou ze tří metod a budeme opakovaně provádět tři kroky:

1. určení vstupní proměnné (=vstupního pole) ze všech pomlčkových (nebázických) buněk
2. určení výstupní proměnné (=výstupní pole, které se v dalším kroku stane pomlčkovým)
3. provedení optimalizačního kroku (=přepočítání nového bázického řešení)

Předvedeme si optimalizační kroky na počátečním rozdělení získaném Metodou severozápadního rohu.

Pro každý řádek a sloupec nalezneme tzv. *multiplikátory* u_i (pro řádky) a v_j (pro sloupce). Využijeme k tomu rovnice

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

pro ceny na nepomlčkových (bázických) polích.

Protože pro m řádků a n sloupců je nepomlčkových polí je $m + n - 1$, můžeme si jeden multiplikátor zvolit – nejčastěji jej nastavujeme na hodnotu 0.

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Nastavíme $u_1 = 0$ a vyznačíme si nepomlčková pole.

	v_1	v_2	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	5 (**10**)	10 (**0**)	– (20)	– (11)	15
u_2	– (12)	5 (**7**)	15 (**9**)	5 (**20**)	25
u_3	– (0)	– (14)	– (16)	5 (**18**)	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_1 = 0 \wedge c_{11} = 10$, platí $v_1 = 10$.

	$v_1 = 10$	v_2	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	10 5	**0** 10	20 –	11 –	15
u_2	12 –	**7** 5	**9** 15	**20** 5	25
u_3	0 –	14 –	16 –	**18** 5	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_1 = 0 \wedge c_{12} = 0$, platí $v_2 = 0$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	5 (**10**)	10 (**0**)	– (20)	– (11)	15
u_2	– (12)	5 (**7**)	15 (**9**)	5 (**20**)	25
u_3	– (0)	– (14)	– (16)	5 (**18**)	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $v_2 = 0 \wedge c_{22} = 7$, platí $u_2 = 7$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	5 (10)	10 (0)	– (20)	– (11)	15
$u_2 = 7$	– (12)	5 (7)	15 (9)	5 (20)	25
u_3	– (0)	– (14)	– (16)	5 (18)	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_2 = 7 \wedge c_{23} = 9$, platí $v_3 = 2$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	v_4	
$u_1 = 0$	**10** 5	**0** 10	20 –	11 –	15
$u_2 = 7$	12 –	**7** 5	**9** 15	**20** 5	25
u_3	0 –	14 –	16 –	**18** 5	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_2 = 7 \wedge c_{24} = 20$, platí $v_4 = 13$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 (**10**)	10 (**0**)	– (20)	– (11)	15
$u_2 = 7$	– (12)	5 (**7**)	15 (**9**)	5 (**20**)	25
u_3	– (0)	– (14)	– (16)	5 (**18**)	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $v_4 = 13 \wedge c_{34} = 18$, platí $u_3 = 5$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 (10)	10 (0)	– (20)	– (11)	15
$u_2 = 7$	– (12)	5 (7)	15 (9)	5 (20)	25
$u_3 = 5$	– (0)	– (14)	– (16)	5 (18)	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – přepočítání ceny pomlčkových polí

Po určení multiplikátorů provedeme přepočítání ceny c_{ij} pro pomlčková pole. Pro novou cenu $\overline{c}_{ij}$ platí vzorec $\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Zapíšeme jí do pole vlevo dole. Např. $\overline{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 (10)	10 (0)	– (**20**)	– (**11**)	15
$u_2 = 7$	– (**12**), **5**	5 (7)	15 (9)	5 (20)	25
$u_3 = 5$	– (**0**)	– (**14**)	– (**16**)	5 (18)	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – závěr

Přepočítáme ceny všech pomlčkových polí, viz níže.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 5	0 10	**20** – **−18**	**11** – **2**	15
$u_2 = 7$	**12** – **5**	7 5	9 15	20 5	25
$u_3 = 5$	**0** – **15**	**14** – **−9**	**16** – **−9**	18 5	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – závěr

Vstupním polem je buňka $[i,j]$ s maximální kladnou cenou $\overline{c}_{ij}$, tedy pole $[3,1]$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 5	0 10	**20** – **–18**	**11** – **2**	15
$u_2 = 7$	**12** – **5**	7 5	9 15	20 5	25
$u_3 = 5$	**0** – **15**	**14** – **–9**	**16** – **–9**	18 5	5
	5	15	15	10	

2. Určení výstupní proměnné

Ve 2. části optimalizačního kroku určujeme výstupní pole.

- Uvažujeme vstupní pole společně se všemi nepomlčkovými poli.
- Společně vytvářejí uzavřený okruh (pole [2, 3] není vrcholem okruhu).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 5	0 10	20 – −18	11 – 2	15
$u_2 = 7$	12 – 5	7 5	9 15	20 5	25
$u_3 = 5$	0 – 15	14 – −9	16 – −9	18 5	5
	5	15	15	10	

Vstupní pole označíme symbolem $\oplus$, ostatní buňky uzavřeného okruhu pak střídavě značíme symboly $\ominus$, $\oplus$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 **5** $\ominus$	0 **10** $\oplus$	20 – −18	11 – 2	15
$u_2 = 7$	12 – 5	7 **5** $\ominus$	9 **15**	20 **5** $\oplus$	25
$u_3 = 5$	0 – 15 $\oplus$	14 – −9	16 – −9	18 **5** $\ominus$	5
	5	15	15	10	

2. Určení výstupní proměnné

Výstupní pole vybereme mezi buňkami uzavřeného okruhu, které jsou označeny symbolem ⊖ a mají minimální počet jednotek dopravy.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10; **5** ⊖	0; 10 ⊕	20; – ; −18	11; – ; 2	15
$u_2 = 7$	12; – ; 5	7; **5** ⊖	9; 15	20; 5 ⊕	25
$u_3 = 5$	0; – ; 15 ⊕	14; – ; −9	16; – ; −9	18; **5** ⊖	5
	5	15	15	10	

Splňuje-li tyto podmínky více polí, vybereme jedno z nich, např. buňku [3, 4].

3. Provedení optimalizačního kroku

1. Do proměnných x_{ij} označených $\oplus$ přičteme hodnotu výstupní proměnně.
2. Od proměnných x_{ij} označených $\ominus$ odečteme hodnotu výstupní proměnné.
3. Do výstupního pole vložíme pomlčku.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10; **0** $\ominus$	0; **15** $\oplus$	20; –; −18	11; –; 2	15
$u_2 = 7$	12; –; 5	7; **0** $\ominus$	9; 15	20; **10** $\oplus$	25
$u_3 = 5$	0; **5** $\oplus$; 15	14; –; −9	16; –; −9	18; **–** $\ominus$	5
	5	15	15	10	

Ukončení optimalizace

Optimalizační kroky provádíme tak dlouho, dokud je u některého pomlčkového pole pomocná cena c_{ij} kladná.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10; 0	0; 15	20; – ; −18	11; – ; 2	15
$u_2 = 7$	12; – ; 5	7; 0	9; 15	20; 10	25
$u_3 = 5$	0; 5; 15	14; – ; −9	16; – ; −9	18; –	5
	5	15	15	10	

Je vidět, že pomlčková pole $[1, 4]$ a $[2, 1]$ mají kladné pomocné ceny.

Optimalizační krok č. 2

Po předchozím optimalizačním kroku máme tuto dopravní tabulku:

10 0	0 15	20 –	11 –	15
12 –	7 0	9 15	20 10	25
0 5	14 –	16 –	18 –	5
5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 2 – multiplikátory

Určíme znovu multiplikátory:

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	0 (10)	15 (0)	– (20)	– (11)	15
$u_2 = 7$	– (12)	0 (7)	15 (9)	10 (20)	25
$u_3 = -10$	5 (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 2 – pomocné ceny a vstupní proměnná

U pomlčkových polí určíme pomocné ceny dle vzorce $\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 0	0 15	20 – −18	11 – 2	15
$u_2 = 7$	12 – 5	7 0	9 15	20 10	25
$u_3 = -10$	0 5	14 – −24	16 – −24	18 – −15	5
	5	15	15	10	

Vstupním polem je pomlčkové pole s maximální kladnou pomocnou cenou, tj. buňka [3, 1].

Optimalizační krok č. 2 – nalezení uzavřeného okruhu

Mezi nepomlčkovými poli a vstupním polem najdeme uzavřený okruh. Doplníme střídavě znaménka ⊕, ⊖, přičemž u vstupního pole musí být ⊕.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 0 ⊖	0 15 ⊕	20 – −18	11 – 2	15
$u_2 = 7$	12 – 5 ⊕	7 0 ⊖	9 15	20 10	25
$u_3 = -10$	0 5	14 – −24	16 – −24	18 – −15	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 2 – výstupní pole

Obě pole označené $\ominus$ mají hodnotu 0. Jako výstupní pole vybereme buňku $[1, 1]$ a vložíme do ní pomlčku. Ostatní pole uzavřeného okruhu necháme beze změny (hodnotu 0 nemá smysl přičítat, ani odečítat).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10; – ; $\ominus$	0; 15; $\oplus$	20; –; −18	11; –; 2	15
$u_2 = 7$	12; 0; 5; $\oplus$	7; 0; $\ominus$	9; 15	20; 10	25
$u_3 = -10$	0; 5	14; –; −24	16; –; −24	18; –; −15	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 3

Po předchozím optimalizačním kroku máme tuto dopravní tabulku:

10 –	0 15	20 –	11 –	15
12 0	7 0	9 15	20 10	25
0 5	14 –	16 –	18 –	5
5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 3 – multiplikátory

Určíme znovu multiplikátory:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	– (10)	15 (0)	– (20)	– (11)	15
$u_2 = 7$	0 (12)	0 (7)	15 (9)	10 (20)	25
$u_3 = -5$	5 (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 2 – pomocné ceny a vstupní proměnná

U pomlčkových polí určíme pomocné ceny dle vzorce $\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 / – / -5	0 / 15	20 / – / -18	11 / – / 2	15
$u_2 = 7$	12 / 0	7 / 0	9 / 15	20 / 10	25
$u_3 = -5$	0 / 5	14 / – / -19	16 / – / -19	18 / – / -10	5
	5	15	15	10	

Vstupním polem je pomlčkové pole s maximální kladnou pomocnou cenou, tj. buňka $[1, 4]$.

Optimalizační krok č. 3 – nalezení uzavřeného okruhu

Mezi nepomlčkovými poli a vstupním polem najdeme uzavřený okruh.
Doplníme střídavě znaménka ⊕, ⊖, přičemž u vstupního pole musí být ⊕.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 – −5	0 15 ⊖	20 – −18	11 – 2 ⊕	15
$u_2 = 7$	12 0	7 0 ⊕	9 15	20 10 ⊖	25
$u_3 = -5$	0 5	14 – −19	16 – −19	18 – −10	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 3 – výstupní pole

Výstupní pole vybereme mezi buňkami uzavřeného okruhu, které jsou označeny symbolem $\ominus$ a mají minimální počet jednotek dopravy. Výstupním polem je buňka $[2,4]$. Její hodnotu odečteme od polí označených $\ominus$ a naopak přičteme k polím označeným $\oplus$. Na závěr vložíme do výstupního pole pomlčku.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 – −5	0 **5** $\ominus$	20 – −18	11 **10** 2 $\oplus$	15
$u_2 = 7$	12 0	7 **10** $\oplus$	9 15	20 **–** $\ominus$	25
$u_3 = -5$	0 5	14 – −19	16 – −19	18 – −10	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 4

Po předchozím optimalizačním kroku máme tuto dopravní tabulku:

10 –	0 5	20 –	11 10	15
12 0	7 10	9 15	20 –	25
0 5	14 –	16 –	18 –	5
5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 4 – multiplikátory

Určíme znovu multiplikátory:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$u_1 = 0$	– (10)	5 (0)	– (20)	10 (11)	15
$u_2 = 7$	0 (12)	10 (7)	15 (9)	– (20)	25
$u_3 = -5$	5 (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 4 – pomocné ceny a vstupní proměnná

U pomlčkových polí určíme pomocné ceny dle vzorce $\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$u_1 = 0$	10, –, -5	0, 5	20, –, -18	11, 10	15
$u_2 = 7$	12, 0	7, 10	9, 15	20, –, -2	25
$u_3 = -5$	0, 5	14, –, -19	16, –, -19	18, –, -12	5
	5	15	15	10	

U všech pomlčkových polí je záporná pomocná cena, algoritmus tedy končí.

Výsledek optimalizace

Protože všechny $\overline{c}_{ij} < 0$, je níže uvedené rozdělení dopravy ideální. Jeho cena je $5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 315$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– (10)	$\boxed{5}$ (0)	– (20)	$\boxed{10}$ (11)	15
V_2	0 (12)	$\boxed{10}$ (7)	$\boxed{15}$ (9)	– (20)	25
V_3	$\boxed{5}$ (0)	– (14)	– (16)	– (18)	5
	5	15	15	10	

Výsledek optimalizace

Najděte počáteční řešení v následující dopravní úloze

a) metodou severozápadního rohu
b) indexovou metodou
c) Vogelovou aproximační metodou

Užitím nejlepšího počátečního řešení vypočtěte optimální řešení.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	23	27	16	18	30
V_2	12	17	20	51	40
V_3	22	28	12	32	53
	22	35	25	41	

Použité zdroje

FAJMON, Břetislav, KOLÁČEK, Jan. *Pravděpodobnost, statistika a operační výzkum.* Brno: VUT Brno, 2005. 314 s.