

MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

4. Dopravní úloha

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

24. 10. 2017

- 1 Představení dopravní úlohy
- 2 Řešení dopravního problému
 - Počáteční krok
 - Metoda severozápadního rohu
 - Indexová metoda
 - Vogelova aproximační metoda
 - Optimalizační krok
- 3 Použité zdroje

Automobilová společnost MG má závody v Los Angeles, Detroitu a New Orleans a distribuční střediska v Denveru a Miami. Kapacity výrobních závodů pro plánované období jsou po řadě 1000, 1500 a 1200 ks aut, poptávka středisek je 2300 a 1400 ks. Cena dopravy 1 auta na jednu míli je 8 centu (cent je setina dolaru).

Určete optimální rozdělení dopravy od výrobců ke spotřebitelským místům. Vzdálenosti mezi místy (v mílích) jsou uvedeny v tabulce.

	Denver	Miami
Los Angeles	1000	2690
Detroit	1250	1350
New Orleans	1275	850

Obecné zadání dopravní úlohy

Mějme konkrétní výrobek, m závodů, které jej vyrábějí, a n spotřebitelských skladů, které jej odebírají.

Úkolem je najít optimální způsob rozvozu výrobků z výrobních závodů do spotřebitelských skladů tak, aby se minimalizovala cena dopravy. Vždy bude dáno:

- c_{ij} ... jednotková cena dopravy ze zdroje i na místo určení j
- a_i ... množství zásob ve zdroji i , kde $i = 1, 2, \dots, m$
- b_j ... požadavek na počet výrobků od spotřebitele j , kde $j = 1, 2, \dots, n$

Řešením jsou

- 1 optimální hodnoty proměnných x_{ij} jako množství výrobků dopravovaných ze zdroje i ke spotřebiteli j ;
- 2 celková cena dopravy

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} \cdot x_{ij}$$

Automobilová společnost – shrnutí faktů

Ze zadání víme hodnoty a_i, b_j pro $i = 1, 2, 3, j = 1, 2$:

$$\vec{a} = (1000, 1500, 1200)$$

$$\vec{b} = (2300, 1400)$$

Neznáme jednotkovou cenu dopravy c_{ij} ze zdroje i ke spotřebiteli j , víme však vzdálenost mezi jednotlivými zdroji a spotřebiteli a cenu dopravy 1 auta na jednu míli (8 centů = 0,08 USD). Lze už snadno spočítat cenu dopravy jednoho auta od zdroje i ke spotřebiteli, např.

$$c_{11} = 0,08 \cdot 1000 = 80.$$

Můžeme tak připravit tabulku ceny převozu jednoho auta:

c_{ij}	Denver	Miami
Los Angeles	80	215
Detroit	100	108
New Orleans	102	68

Způsob zápisu dat dopravní úlohy

	Denver	Miami	
Los Angeles	80	215	1000
Detroit	100	108	1500
New Orleans	102	68	1200
	2300	1400	

$1000 + 1500 + 1200 = 2300 + 1400$... vyvážená úloha (kapacity výrobců a požadavky spotřebitelů jsou stejné)

Nevyvážené úlohy se snažíme “vyvážit”, abychom mohli použít řešící algoritmus.

- 1 Nabídka $<$ Poptávka: např. kapacita výroby v Detroitu je 1300, nikoliv 1500
- 2 Nabídka $>$ Poptávka: např. spotřebitelský sklad v Denveru požaduje pouze 1900, nikoliv 2300

V obou případech přidáváme fiktivního výrobce (resp. spotřebitele) s kapacitou, která je rovna rozdílu nabídky a poptávky, přičemž jednotková cena doprava je stanovena na 0.

Nabídka < Poptávka – vyvážení

	Denver	Miami	
Los Angeles	80	215	1000
Detroit	100	108	1300
New Orleans	102	68	1200
Fiction	0	0	200
	2300	1400	

Nabídka > Poptávka – vyvážení

	Denver	Miami	Al Capone	
Los Angeles	80	215	0	1000
Detroit	100	108	0	1500
New Orleans	102	68	0	1200
	1900	1400	400	

- 1 Počáteční krok – nalezení nějakého přípustného řešení. Můžeme použít tři různé metody:
 - a) Metoda severozápadního rohu (SZR)
 - b) Indexová metoda (IM)
 - c) Vogelova aproximační metoda (VAM)
- 2 Optimalizační kroky – vylepšování počátečního řešení

Modelový příklad – vyvážená úloha

- 1 Tři zdroje V_1, V_2, V_3 a jejich kapacity $\vec{a} = (15, 25, 5)$
- 2 Čtyři spotřebitelé S_1, S_2, S_3, S_4 a jejich požadavky $\vec{b} = (5, 15, 15, 10)$
- 3 Jednotková cena $c_{ij}, 0 < i \leq 3, 0 < j \leq 4$ viz tabulka.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15
V_2	12	7	9	20	25
V_3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

- Počáteční krok – nalezení nějakého přípustného řešení, které nemusí být optimální.
- Ukážeme si tři různé metody:
 - a) Metoda severozápadního rohu (SZR)
 - b) Indexová metoda (IM)
 - c) Vogelova aproximační metoda (VAM)
- Pro vysvětlení metod použijeme naši modelovou vyváženou úlohu se 3 výrobci a 4 spotřebiteli.

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Začínáme v “severozápadním” rohu a hledáme x_{11} : stanovíme maximální možnou hodnotu x_{11} tak, aby byla rovna $\min(a_1, b_1) = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15
V_2	12	7	9	20	25
V_3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{11} = 5$. Zcela jsme vyhověli požadavkům spotřebitele S_1 , tudíž do dalších buněk 1. sloupce umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5 10	0	20	11	15
V_2	— 12	7	9	20	25
V_3	— 0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 1. řádku a hledáme x_{12} : kapacita výrobce V_1 je již snížena na 10, požadavky spotřebitele S_1 jsou v max. množství 15 $\Rightarrow x_{12} = 10$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5	10	20	11	15
V_2	—	12	9	20	25
V_3	—	0	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{12} = 10$. Zcela jsme vyčerpali kapacitu výrobce V_1 , tudíž do dalších buněk 1. řádku umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5 10 →	10 0	— 20	— 11	15
V_2	— 12	7	9	20	25
V_3	— 0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 2. sloupci a hledáme x_{22} : kapacita výrobce V_2 je 25, požadavky spotřebitele S_2 jsou sníženy na 5 $\Rightarrow x_{22} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5	10	—	20	15
V_2	—	12	9	20	25
V_3	—	0	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{22} = 5$. Zcela jsme vyhověli požadavkům spotřebitele S_2 , tudíž do dalších buněk 2. sloupce umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5	10	—	20	15
V_2	—	12	9	20	25
V_3	—	0	16	18	5
	5	15	15	10	

Detailed description of the table: The table is a 3x4 grid representing a transportation problem. The columns are labeled S_1, S_2, S_3, S_4 and the rows are labeled V_1, V_2, V_3 . The values in the cells are: V_1 row: (5,1)=5, (5,2)=10, (5,3)=—, (5,4)=20; V_2 row: (2,1)=—, (2,2)=12, (2,3)=9, (2,4)=20; V_3 row: (3,1)=—, (3,2)=0, (3,3)=16, (3,4)=18. The bottom row shows column totals: 5, 15, 15, 10. The cell (2,2) contains the value 5, which is highlighted in red. A red box surrounds the cell (2,2) and the cell (2,3). A red arrow points from the cell (1,2) to the cell (2,2). A red arrow points from the cell (2,2) to the cell (2,3). The number 25 is written in red to the right of the V_2 row, and 5 is written in black to the right of the V_3 row.

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 2. řádku a hledáme x_{23} : kapacita výrobce V_2 je snížena na 20, požadavky spotřebitele S_3 jsou stále 15 $\Rightarrow x_{23} = 15$.

	S_1	S_2	S_3	S_4		
V_1	5	10	0	20	11	15
V_2	12	5	7	9	20	25
V_3	0	14	16	18		5
	5	15	15	10		

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{23} = 15$. Zcela jsme vyhověli požadavkům spotřebitele S_3 , tudíž do dalších buněk 3. sloupce umístíme pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5	10	—	11	15
V_2	—	12	15	20	25
V_3	—	0	—	18	5
	5	15	15	10	

Diagram description: The table shows a transportation problem. The top row lists supply nodes S_1, S_2, S_3, S_4 . The left column lists demand nodes V_1, V_2, V_3 . The bottom row shows total supply: 5, 15, 15, 10. The right column shows total demand: 15, 25, 5. The cell (V_2, S_3) is highlighted with a red box and contains the value 15. The cell (V_2, S_2) contains 5 and 7. The cell (V_1, S_2) contains 10 and 0. The cell (V_1, S_1) contains 5 and 10. The cell (V_2, S_1) contains 12. The cell (V_3, S_2) contains 14. The cell (V_3, S_3) contains 16. The cell (V_3, S_4) contains 18. Arrows indicate the flow of goods: from (V_1, S_1) to (V_1, S_2) , from (V_2, S_2) to (V_2, S_3) , and from (V_2, S_3) to (V_2, S_4) .

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme v 2. řádku a hledáme x_{24} : kapacita výrobce V_2 je snížena na 5, požadavky spotřebitele S_4 jsou stále 10 $\Rightarrow x_{24} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5	10	—	20	15
V_2	—	12	5	9	25
V_3	—	0	—	16	5
	5	15	15	10	

Detailed description of the table: The table is a transportation problem tableau. It has 3 rows representing factories V_1, V_2, V_3 and 4 columns representing consumers S_1, S_2, S_3, S_4 . The top-right cell of the V_2, S_4 intersection is highlighted with a red box and contains the value 20. A red arrow points from this cell to the right. In the V_1, S_2 cell, there is a grey arrow pointing right from 10 to 0. In the V_2, S_2 cell, there is a grey arrow pointing down from 10 to 5. In the V_2, S_3 cell, there is a grey arrow pointing right from 15 to 7. The right-hand side values are 15, 25, and 5 for V_1, V_2, V_3 respectively. The bottom row shows the remaining capacities for each consumer: 5, 15, 15, and 10. The value 10 is in red.

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{24} = 5$. Zcela jsme vyčerpali kapacitu výrobce V_2 .

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	5 10	→ 10 0	– 20	– 11	15
V_2	– 12	↓ 5 7	→ 15 9	→ 5 20	25
V_3	– 0	– 14	– 16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Pokračujeme ve 4. sloupci a hledáme x_{34} : kapacita výrobce V_3 je stále 5, požadavky spotřebitele S_4 jsou sníženy na 5 $\Rightarrow x_{34} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4			
V_1	5	10	0	20	11	15	
V_2	12	5	15	9	5	20	25
V_3	0	14	16	18		5	
	5	15	15	10			

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Nastavíme $x_{34} = 5$. Zcela jsme vyčerpali kapacitu výrobce V_3 a vyhověli požadavkům spotřebitele S_4 .

	S_1	S_2	S_3	S_4			
V_1	5	10	0	20	11	15	
V_2	12	5	15	9	5	20	25
V_3	0	14	16	5	18	5	
	5	15	15	10			

Počáteční krok metodou severozápadního rohu

Počáteční krok je dokončen. Vstupní rozdělení je uvedeno níže. Celková cena dopravy $5 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + 5 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 20 + 5 \cdot 18 = 410$ peněžních jednotek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	$\boxed{5}$ $\xrightarrow{10}$	$\boxed{10}$ \downarrow	- 20	- 11	15
V_2	- 12	$\boxed{5}$ $\xrightarrow{7}$	$\boxed{15}$ $\xrightarrow{9}$	$\boxed{5}$ \downarrow	20 25
V_3	- 0	- 14	- 16	$\boxed{5}$	18 5
	5	15	15	10	

- Má-li dopravní tabulka m řádku a n sloupců, pak pomlčka **není** umístěna v $m + n - 1$ buňkách tabulky.
- Tento požadavek musí platit pro počáteční rozdělení i každý optimalizační krok.
- **Nebezpečná situace:** po nastavení proměnné x_{ij} jsme současně vyčerpali kapacitu výrobce V_i a naplnili požadavky spotřebitele S_j .
 - 1 V takovém případě by “nepomlčkových” buněk bylo méně než $m + n - 1$.
 - 2 Řešíme např. tak, že umístíme pomlčky do zbývajících polí řádku i , nastavíme $x_{i+1,j} = 0$ a do dalších polí sloupce j umístíme pomlčky.
 - 3 Viz příklad “degenerovaného počátečního rozdělení” na dalším slajdu.

Příklad degenerovaného počátečního rozdělení

	S_1	S_2	S_3				
V_1	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; margin-right: 5px;">5</div> <div style="margin-right: 5px;">0</div> </div> <div style="margin-left: 10px;">↓</div>	-	2	-	1	5	
V_2	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 2px solid red; padding: 2px 5px; margin-right: 5px;">0</div> <div style="margin-right: 5px;">2</div> </div> <div style="margin-left: 10px;">→</div>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; margin-right: 5px;">5</div> <div style="margin-right: 5px;">1</div> </div> <div style="margin-left: 10px;">→</div>	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; margin-right: 5px;">5</div> <div style="margin-right: 5px;">5</div> </div> <div style="margin-left: 10px;">↓</div>				10
V_3	-	2	-	4	<div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 2px 5px; margin-right: 5px;">5</div> <div style="margin-right: 5px;">3</div> </div>		
	5		5		10		

Počáteční krok Indexovou metodou

Začínáme buňkou, která má minimální cenu: pole $[1, 2]$ s cenou 0.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15
V_2	12	7	9	20	25
V_3	0	14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Kapacita výrobce V_1 je 15, požadavky spotřebitele S_2 taktéž. Proto $x_{12} = 15$. Ostatní buňky 1. řádku označíme pomlčkami, do pole x_{22} vložíme 0, do dalších polí 2. sloupce pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	12	0 7	9	20	25
V_3	0	– 14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Další buňka s minimální cenou je pole [3, 1] s cenou 0.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	12	0 7	9	20	25
V_3	0	– 14	16	18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Kapacita výrobce V_3 je 5, požadavky spotřebitele S_1 taktéž. Proto $x_{31} = 5$. Ostatní buňky 3. řádku označíme pomlčkami, do pole x_{21} vložíme 0, do dalších polí 1. sloupce pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	9	20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Další buňka s minimální cenou je pole $[2, 2]$ s cenou 7. Požadavky spotřebitele S_2 jsou však již naplněny, proto ponecháme buňku beze změny.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	9	20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Pouze 2. řádek obsahuje “nepomlčkové” buňky. Začneme s polem [2, 3] a minimální cenou 9.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	9	20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Kapacita výrobce V_2 je 25, požadavky spotřebitele S_3 15. Proto $x_{23} = 15$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	15 9	20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Zbývá jediná “nepomlčková” buňka [2, 4].

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	15 9	20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Zbývající kapacita výrobce V_2 je 10, požadavky spotřebitele S_4 také 10
 $\Rightarrow x_{24} = 10$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	15 9	10 20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Indexovou metodou

Počáteční krok je dokončen. Vstupní rozdělení je uvedeno níže. Celková cena dopravy $15 \cdot 0 + 15 \cdot 9 + 10 \cdot 20 + 5 \cdot 0 = 335$ peněžních jednotek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	15 0	– 20	– 11	15
V_2	0 12	0 7	15 9	10 20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Indexová metoda zajišťuje nižší celkovou cenu dopravy – Metoda severozápadního rohu nebrala na cenu c_{ij} ohled.

- **Penalizace** – rozdíl mezi druhou nejmenší cenou a nejmenší cenou, který určujeme pro každý řádek a sloupec. Penalizaci vkládáme do hranatých závorek za kapacitu výrobce či požadavky spotřebitele.

Postup pomocí Vogelovy aproximační metody

- 1 Nastavení penalizace pro všechny uvažované řádky a sloupce.
- 2 Výběr pole k úpravě – uplatňují se dvě podmínky:
 - buňka je na řádku či sloupci s největší *penalizací*,
 - cena buňky na vybraném řádku či sloupci je minimální.
- 3 Po výběru konkrétní buňky $[i, j]$ nastavíme proměnnou x_{ij} tradičním způsobem včetně vkládání pomlček v případě naplnění kapacity výrobce či splnění požadavků spotřebitele.
- 4 Pokračujeme v krocích 1–3 tak dlouho, dokud zbude pouze jeden řádek či sloupec, u něhož je vyplnění jednoznačně dáno.

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Nejdříve si pro každý řádek a sloupec zapíšeme penalizaci.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15 [10]
V_2	12	7	9	20	25 [2]
V_3	0	14	16	18	5 [14]
	5 [10]	15 [7]	15 [7]	10 [7]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Největší penalizaci má 3. řádek – buňka na 3. řádku s nejmenší cenou 0 je na pozici [3, 1].

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	10	0	20	11	15 [10]
V_2	12	7	9	20	25 [2]
V_3	0	14	16	18	5 [14]
	5 [10]	15 [7]	15 [7]	10 [7]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Kapacita výrobce V_3 je 5, požadavky spotřebitele S_1 taktéž. Proto $x_{31} = 5$. Ostatní buňky 3. řádku označíme pomlčkami, do pole x_{21} vložíme 0, do dalších polí 1. sloupce pomlčku.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	- 10	0	20	11	15 [10]
V_2	0 12	7	9	20	25 [2]
V_3	5 0	- 14	- 16	- 18	5 [14]
	5 [10]	15 [7]	15 [7]	10 [7]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Přepočítáme penalizaci pro uvažované řádky a sloupce.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	0	20	11	15 [11]
V_2	0 12	7	9	20	25 [2]
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15 [7]	15 [11]	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Největší penalizaci má 3. sloupec – buňka na 2. řádku s nejmenší cenou 9 je na pozici [2, 3].

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	0	20	11	15 [11]
V_2	0 12	7	9	20	25 [2]
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15 [7]	15 [11]	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Kapacita výrobce V_2 je 25, požadavky spotřebitele S_3 jsou 15. Proto $x_{23} = 15$. Ostatní buňky 3. sloupce označíme pomlčkami.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	— 10	0	— 20	11	15 [11]
V_2	0 12	7	15 9	20	25 [2]
V_3	5 0	— 14	— 16	— 18	5
	5	15 [7]	15 [11]	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Přepočítáme penalizaci pro uvažované řádky a sloupce.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	0	– 20	11	15 [11]
V_2	0 12	7	15 9	20	25 [13]
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15 [7]	15	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Největší penalizaci má 2. řádek – buňka ve 2. sloupci s nejmenší cenou 7 je na pozici [2, 2].

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	0	– 20	11	15 [11]
V_2	0 12	7	15 9	20	25 [13]
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15 [7]	15	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Kapacita výrobce V_2 je snížena na 10, požadavky spotřebitele S_2 jsou 15. Proto $x_{22} = 10$. Ostatní buňky 2. řádku označíme pomlčkami.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	0	– 20	11	15 [11]
V_2	0 12	10 7	15 9	– 20	25 [13]
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15 [7]	15	10 [9]	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Zbývá nám už jen poslední řádek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	0	– 20	11	15
V_2	0 12	10 7	15 9	– 20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Vybereme nejdříve buňku [1, 2]. Kapacita výrobce V_1 je 15, požadavky spotřebitele S_2 jsou sníženy na 5. Proto $x_{12} = 5$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	5 0	– 20	11	15
V_2	0 12	10 7	15 9	– 20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Nakonec vybereme buňku [1, 4]. Kapacita výrobce V_1 je snížena na 10, požadavky spotřebitele S_4 jsou sníženy na 10. Proto $x_{14} = 10$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	5 0	– 20	10 11	15
V_2	0 12	10 7	15 9	– 20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Počáteční krok Vogelovou aproximační metodou

Počáteční krok je dokončen. Vstupní rozdělení je uvedeno níže. Celková cena dopravy $5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 315$ peněžních jednotek.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	5 0	– 20	10 11	15
V_2	0 12	10 7	15 9	– 20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

- Nejlepší výsledek v našem příkladu dala poslední metoda – Vogelova aproximační metoda, přesto nemusí být získané rozdělení nejlepší.
- Počáteční rozdělení dále zlepšujeme pomocí optimalizačních kroků.
- Rozdělení dopravy **nesmí** obsahovat uzavřený okruh! Příklady viz následující slajd.

Příklad uzavřeného okruhu

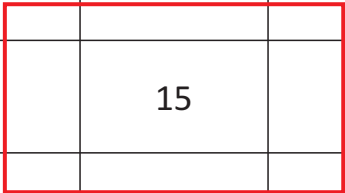
Uzavřený okruh $[1, 2] - [1, 3] - [2, 3] - [2, 2]$

—	5	10	—
—	10	5	10
5	—	—	—

Příklad uzavřeného okruhu

Uzavřený okruh $[1, 1] - [1, 3] - [3, 3] - [3, 1]$

0	-	15	-
-	15	-	10
5	-	0	-



Vezmeme počáteční rozdělení dopravy získané některou ze tří metod a budeme opakovaně provádět tři kroky:

- 1 určení vstupní proměnné (=vstupního pole) ze všech pomlčkových (nebázických) buněk
- 2 určení výstupní proměnné (=výstupní pole, které se v dalším kroku stane pomlčkovým)
- 3 provedení optimalizačního kroku (=přepočítání nového bázického řešení)

Předvedeme si optimalizační kroky na počátečním rozdělení získaném Metodou severozápadního rohu.

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Pro každý řádek a sloupec nalezneme tzv. *multiplikátory* u_i (pro řádky) a v_j (pro sloupce). Využijeme k tomu rovnice

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

pro ceny na nepomlčkových (bázických) polích.

Protože pro m řádků a n sloupců je nepomlčkových polí je $m + n - 1$, můžeme si jeden multiplikátor zvolit – nejčastěji jej nastavujeme na hodnotu 0.

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Nastavíme $u_1 = 0$ a vyznačíme si nepomlčková pole.

	v_1	v_2	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
u_2	– 12	5 7	15 9	5 20	25
u_3	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_1 = 0 \wedge c_{11} = 10$, platí $v_1 = 10$.

	$v_1 = 10$	v_2	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
u_2	– 12	5 7	15 9	5 20	25
u_3	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_1 = 0 \wedge c_{12} = 0$, platí $v_2 = 0$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
u_2	– 12	5 7	15 9	5 20	25
u_3	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $v_2 = 0 \wedge c_{22} = 7$, platí $u_2 = 7$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	v_3	v_4	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
$u_2 = 7$	– 12	5 7	15 9	5 20	25
u_3	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_2 = 7 \wedge c_{23} = 9$, platí $v_3 = 2$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	v_4	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
$u_2 = 7$	– 12	5 7	15 9	5 20	25
u_3	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $u_2 = 7 \wedge c_{24} = 20$, platí $v_4 = 13$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
$u_2 = 7$	– 12	5 7	15 9	5 20	25
u_3	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – nalezení multiplikátorů

Protože $v_4 = 13 \wedge c_{34} = 18$, platí $u_3 = 5$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
$u_2 = 7$	– 12	5 7	15 9	5 20	25
$u_3 = 5$	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – přepočítání ceny pomlčkových polí

Po určení multiplikátorů provedeme přepočítání ceny c_{ij} pro pomlčková pole. Pro novou cenu \bar{c}_{ij} platí vzorec $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$. Zapišeme jí do pole vlevo dole. Např. $\bar{c}_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = 7 + 10 - 12 = 5$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	– 20	– 11	15
$u_2 = 7$	5 12	5 7	15 9	5 20	25
$u_3 = 5$	– 0	– 14	– 16	5 18	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – závěr

Přepočítáme ceny všech pomlčkových polí, viz níže.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 ¹⁰	10 ⁰	-18 ²⁰	2 ¹¹	15
$u_2 = 7$	5 ¹²	5 ⁷	15 ⁹	5 ²⁰	25
$u_3 = 5$	15 ⁰	-9 ¹⁴	-9 ¹⁶	5 ¹⁸	5
	5	15	15	10	

1. Určení vstupní proměnné – závěr

Vstupním polem je buňka $[i, j]$ s maximální kladnou cenou \bar{c}_{ij} , tedy pole $[3, 1]$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 ¹⁰ 10	10 ⁰ 0	-18 ²⁰ -	2 ¹¹ -	15
$u_2 = 7$	5 ¹² -	5 ⁷ 5	15 ⁹ 15	5 ²⁰ 5	25
$u_3 = 5$	15 ⁰ -	-9 ¹⁴ -	-9 ¹⁶ -	5 ¹⁸ 5	5
	5	15	15	10	

2. Určení výstupní proměnné

Ve 2. části optimalizačního kroku určujeme výstupní pole.

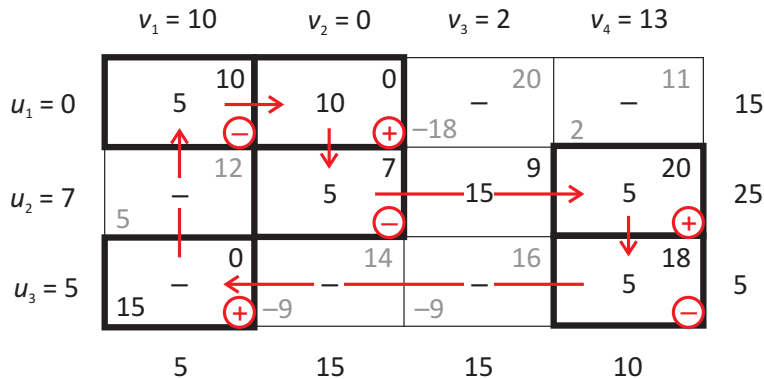
- Uvažujeme vstupní pole společně se všemi nepomlčkovými poli.
- Společně vytvářejí uzavřený okruh (pole [2, 3] není vrcholem okruhu).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	5 10	10 0	- 20	- 11	15
$u_2 = 7$	- 12	5 7	-18 9	2 20	25
$u_3 = 5$	15 0	- 14	- 16	5 18	5
	5	15	15	10	

Diagram illustrating the selection of the leaving variable in the simplex method. The tableau shows the current basis variables u_1, u_2, u_3 and non-basis variables v_1, v_2, v_3, v_4 . Red arrows indicate the path of the pivot element (5) from the entering variable v_4 to the leaving variable u_2 . The pivot element is located at the intersection of row u_2 and column v_4 . The path starts at the pivot element, moves left to the element 15 in row u_2 , column v_3 , then up to the element 5 in row u_1 , column v_3 , then left to the element 10 in row u_1 , column v_2 , then up to the element 5 in row u_1 , column v_1 , then left to the element 15 in row u_3 , column v_1 , then up to the element 0 in row u_3 , column v_1 , then right to the element 5 in row u_3 , column v_4 , and finally down to the pivot element.

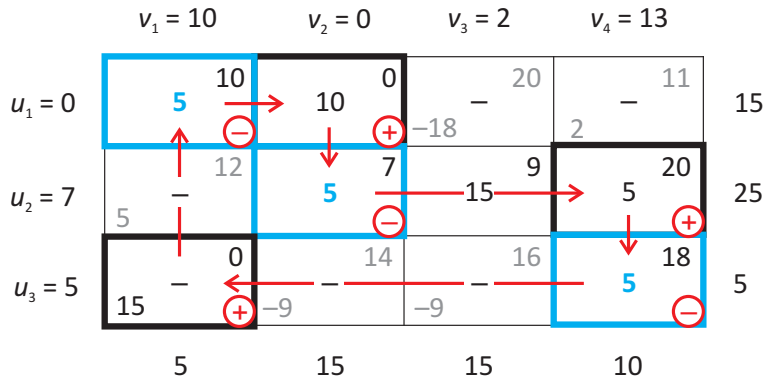
2. Určení výstupní proměnné

Vstupní pole označíme symbolem \oplus , ostatní buňky uzavřeného okruhu pak střídavě značíme symboly \ominus, \oplus .



2. Určení výstupní proměnné

Výstupní pole vybereme mezi buňkami uzavřeného okruhu, které jsou označeny symbolem \ominus a mají minimální počet jednotek dopravy.



Splňuje-li tyto podmínky více polí, vybereme jedno z nich, např. buňku [3, 4].

3. Provedení optimalizačního kroku

- 1 Do proměnných x_{ij} označených \oplus přičteme hodnotu výstupní proměnné.
- 2 Od proměnných x_{ij} označených \ominus odečteme hodnotu výstupní proměnné.
- 3 Do výstupního pole vložíme pomlčku.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	10 \ominus	0 \oplus	20 -	11 -	15
$u_2 = 7$	12 5	7 \ominus	9 15	20 \oplus	25
$u_3 = 5$	0 \oplus	14 -9	16 -9	18 \ominus	5
	5	15	15	10	

Diagram illustrating the pivot operation in a transportation problem. The table shows the current solution with dual variables $v_1=10, v_2=0, v_3=2, v_4=13$ and $u_1=0, u_2=7, u_3=5$. The pivot cell is (u_2, v_4) with value 20, marked with a red \oplus . The path for the pivot operation is highlighted in red, showing the flow of the pivot value (10) from the pivot cell to the other cells in the path: (u_2, v_2) (marked \ominus), (u_3, v_2) (marked \oplus), and (u_3, v_4) (marked \ominus). The pivot value 10 is shown in red in the pivot cell and the cells it affects.

Ukončení optimalizace

Optimalizační kroky provádíme tak dlouho, dokud je u některého pomlčkového pole pomocná cena c_{ij} kladná.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	0 10 0	15 0	-18 20 -	2 11 -	15
$u_2 = 7$	5 12 -	0 7	15 9	10 20	25
$u_3 = 5$	15 5 0	-9 - 14	-9 - 16	- 18	5
	5	15	15	10	

Je vidět, že pomlčková pole $[1, 4]$ a $[2, 1]$ mají kladné pomocné ceny.

Optimalizační krok č. 2

Po předchozím optimalizačním kroku máme tuto dopravní tabulku:

0	10	15	0	–	20	–	11	15
–	12	0	7	15	9	10	20	25
5	0	–	14	–	16	–	18	5
5		15		15		10		

Optimalizační krok č. 2 – multiplikátory

Určíme znovu multiplikátory:

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	0 10	15 0	– 20	– 11	15
$u_2 = 7$	– 12	0 7	15 9	10 20	25
$u_3 = -10$	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 2 – pomocné ceny a vstupní proměnná

U pomlčkových polí určíme pomocné ceny dle vzorce $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	0 10	15 0	- 20	- 11	15
$u_2 = 7$	5 - 12	0 7	15 9	10 20	25
$u_3 = -10$	5 0	- 14	- 16	- 18	5
	5	15	15	10	

Vstupním polem je pomlčkové pole s maximální kladnou pomocnou cenou, tj. buňka [3, 1].

Optimalizační krok č. 2 – nalezení uzavřeného okruhu

Mezi nepomlčkovými poli a vstupním polem najdeme uzavřený okruh.
Doplníme střídavě znaménka \oplus, \ominus , přičemž u vstupního pole musí být \oplus .

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$					
$u_1 = 0$	0	10	15	0	-18	20	-	11	15
$u_2 = 7$	5	-	12	0	7	9	15	10	20
$u_3 = -10$	5	0	-	14	-	16	-	-	18
	5		-24		-24		-15		5
	5		15		15		10		

Optimalizační krok č. 2 – výstupní pole

Obě pole označené \ominus mají hodnotu 0. Jako výstupní pole vybereme buňku [1, 1] a vložíme do ní pomlčku. Ostatní pole uzavřeného okruhu necháme beze změny (hodnotu 0 nemá smysl přičítat, ani odečítat).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$								
$u_1 = 0$	-	10	→	15	0	-	20	-	11	15		
$u_2 = 7$	↑	0	12	←	0	7	-	18	2	-	20	25
$u_3 = -10$	5	0	-	14	-	16	-	16	-	18	5	
	5	15	15	10								

Optimalizační krok č. 3

Po předchozím optimalizačním kroku máme tuto dopravní tabulku:

– 10	15 0	– 20	– 11	15
0 12	0 7	15 9	10 20	25
5 0	– 14	– 16	– 18	5
5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 3 – multiplikátory

Určíme znovu multiplikátory:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	– 10	15 0	– 20	– 11	15
$u_2 = 7$	0 12	0 7	15 9	10 20	25
$u_3 = -5$	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 2 – pomocné ceny a vstupní proměnná

U pomlčkových polí určíme pomocné ceny dle vzorce $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	-5 10	15 0	-18 20	2 11	15
$u_2 = 7$	0 12	0 7	15 9	10 20	25
$u_3 = -5$	5 0	-19 14	-19 16	-10 18	5
	5	15	15	10	

Vstupním polem je pomlčkové pole s maximální kladnou pomocnou cenou, tj. buňka [1, 4].

Optimalizační krok č. 3 – nalezení uzavřeného okruhu

Mezi nepomlčkovými poli a vstupním polem najdeme uzavřený okruh.
Doplníme střídavě znaménka \oplus, \ominus , přičemž u vstupního pole musí být \oplus .

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	-5	10	15	-18	15
$u_2 = 7$	0	12	0	9	25
$u_3 = -5$	5	0	14	16	5
	5	15	15	10	

Diagram illustrating the closed loop (thick black border) and the alternating signs (\oplus, \ominus) for the closed loop. Red arrows indicate the path: \ominus at (u_1, v_2) , \oplus at (u_2, v_2) , \ominus at (u_2, v_4) , and \oplus at (u_1, v_4) .

Optimalizační krok č. 3 – výstupní pole

Výstupní pole vybereme mezi buňkami uzavřeného okruhu, které jsou označeny symbolem \ominus a mají minimální počet jednotek dopravy. Výstupním polem je buňka [2, 4]. Její hodnotu odečteme od polí označených \ominus a naopak přičteme k polím označeným \oplus . Na závěr vložíme do výstupního pole pomlčku.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 13$	
$u_1 = 0$	-5	10	0	20	15
$u_2 = 7$	0	12	7	9	25
$u_3 = -5$	5	0	14	16	5
	5	15	15	10	

Diagram illustrating the selection of the output cell [2, 4] (value 7) in a transportation problem. The grid shows supply and demand values, and the current allocation. A closed loop is formed by cells (1,2), (1,4), (2,4), and (2,2). The cell (2,4) is the output cell, marked with \ominus . The value 7 is subtracted from (1,2) and (2,4), and added to (1,4) and (2,2). The resulting values are shown in red: 5 in (1,2), 10 in (2,2), 10 in (1,4), and 2 in (1,4). The cell (1,4) is marked with \oplus .

Optimalizační krok č. 4

Po předchozím optimalizačním kroku máme tuto dopravní tabulku:

– 10	5 0	– 20	10 11	15
0 12	10 7	15 9	– 20	25
5 0	– 14	– 16	– 18	5
5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 4 – multiplikátory

Určíme znovu multiplikátory:

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$	
$u_1 = 0$	– 10	5 0	– 20	10 11	15
$u_2 = 7$	0 12	10 7	15 9	– 20	25
$u_3 = -5$	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Optimalizační krok č. 4 – pomocné ceny a vstupní proměnná

U pomlčkových polí určíme pomocné ceny dle vzorce $\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$.

	$v_1 = 5$	$v_2 = 0$	$v_3 = 2$	$v_4 = 11$															
$u_1 = 0$	<table border="1"><tr><td></td><td>10</td></tr><tr><td>-5</td><td>-</td></tr></table>		10	-5	-	<table border="1"><tr><td>5</td><td>0</td></tr></table>	5	0	<table border="1"><tr><td></td><td>20</td></tr><tr><td>-18</td><td>-</td></tr></table>		20	-18	-	<table border="1"><tr><td>10</td><td>11</td></tr></table>	10	11	15		
	10																		
-5	-																		
5	0																		
	20																		
-18	-																		
10	11																		
$u_2 = 7$	<table border="1"><tr><td>0</td><td>12</td></tr></table>	0	12	<table border="1"><tr><td>10</td><td>7</td></tr></table>	10	7	<table border="1"><tr><td>15</td><td>9</td></tr></table>	15	9	<table border="1"><tr><td>-</td><td>20</td></tr><tr><td>-2</td><td>-</td></tr></table>	-	20	-2	-	25				
0	12																		
10	7																		
15	9																		
-	20																		
-2	-																		
$u_3 = -5$	<table border="1"><tr><td>5</td><td>0</td></tr></table>	5	0	<table border="1"><tr><td></td><td>14</td></tr><tr><td>-19</td><td>-</td></tr></table>		14	-19	-	<table border="1"><tr><td></td><td>16</td></tr><tr><td>-19</td><td>-</td></tr></table>		16	-19	-	<table border="1"><tr><td>-</td><td>18</td></tr><tr><td>-12</td><td>-</td></tr></table>	-	18	-12	-	5
5	0																		
	14																		
-19	-																		
	16																		
-19	-																		
-	18																		
-12	-																		
	5	15	15	10															

U všech pomlčkových polí je záporná pomocná cena, algoritmus tedy končí.

Výsledek optimalizace

Protože všechny $\bar{c}_{ij} < 0$, je níže uvedené rozdělení dopravy ideální. Jeho cena je $5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + 10 \cdot 7 + 15 \cdot 9 + 5 \cdot 0 = 315$.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	– 10	5 0	– 20	10 11	15
V_2	0 12	10 7	15 9	– 20	25
V_3	5 0	– 14	– 16	– 18	5
	5	15	15	10	

Výsledek optimalizace

Najděte počáteční řešení v následující dopravní úloze

- metodou severozápadního rohu
- indexovou metodou
- Vogelovou aproximační metodou

Užitím nejlepšího počátečního řešení vypočtete optimální řešení.

	S_1	S_2	S_3	S_4	
V_1	23	27	16	18	30
V_2	12	17	20	51	40
V_3	22	28	12	32	53
	22	35	25	41	

FAJMON, Břetislav, KOLÁČEK, Jan. *Pravděpodobnost, statistika a operační výzkum*. Brno: VUT Brno, 2005. 314 s.