MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

6. Bipartitní a Hamiltonovské grafy

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

14. 11. 2017

Program prezentace

Bezproblémové skupiny ve třídě

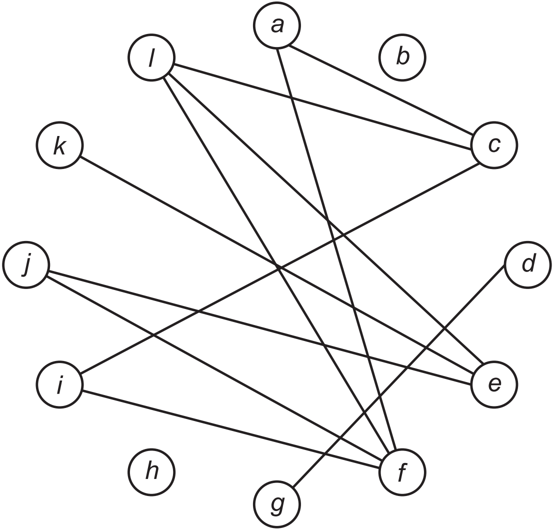
Ve třídě je 12 dětí. Děti bývají pro denní aktivity obvykle rozděleny do tří skupin. Dnes je ale zapotřebí rozdělit je jen do dvou skupin. Je známo, že některé dvojice dětí, když jsou pohromadě, dělají problémy (zlobí se, perou atd.) – viz následující přehled.

Zjistěte, zda je možné provést rozdělení dětí tak, aby žádné "problematické" děti nebyly spolu v jedné skupině.

a …	c, f	g …	d
b		h	
c …	a, i, l	i …	c, f
d …	g	j …	e, f
e …	j, k, l	k …	e
f …	a, i, j, l	l …	c, e, f

Bezproblémové skupiny grafem

Vztahy dětí lze jednoduše znázornit neorientovaným grafem:



Bipartitní grafy

Definice 2.1 (MILKOVÁ): **Bipartitní graf** je graf $G = (V, E)$, jehož množinu vrcholů můžeme rozdělit do dvou množin V_1 a V_2 tak, že

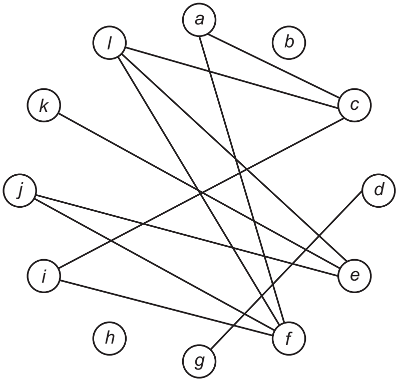
1. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,
2. $V_1 \cup V_2 = V$ a
3. každá hrana grafu G má jeden koncový vrchol v množině V_1 a druhý v množině V_2.

Úplný bipartitní graf $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ je bipartitní graf, kde $|V_1| = m$, $|V_2| = n$ a každý z m vrcholů množiny V_1 je spojen s hranou s každým z n vrcholů množiny V_2.

Poznámka: Úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ má $m \cdot n$ hran.

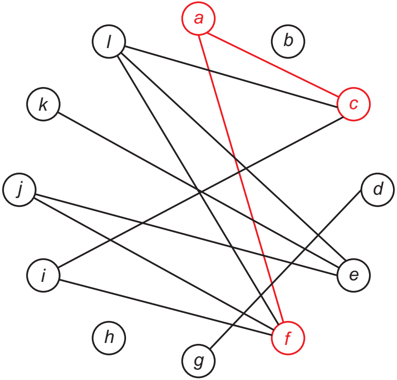
Bezproblémové skupiny – řešení

Ještě jednou si zobrazíme graf všech dětí a jejich vztahů:



Bezproblémové skupiny – řešení

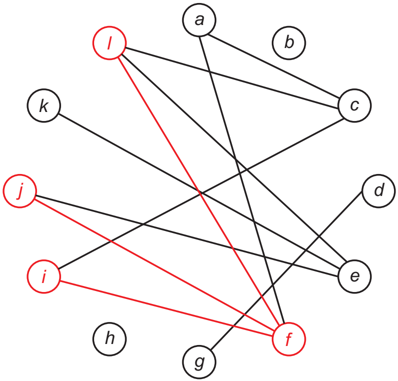
Dítě a nemůže být ve stejné skupině jako děti c, f (hrany $a - c, a - f$), zároveň děti c, f spolu mohou být ve skupině (neexistuje hrana $c - f$).



Bezproblémové skupiny – řešení

V_1	V_2
a	c, f

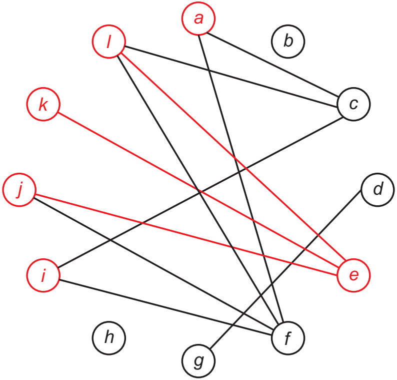
Dítě f nemůže být ve stejné skupině jako děti i, j, l, které naopak mohou být ve skupině s dítětem a (neexistují hrany $a - i, a - j, a - l$).



Bezproblémové skupiny – řešení

V_1	V_2
a, i, j, l	c, f

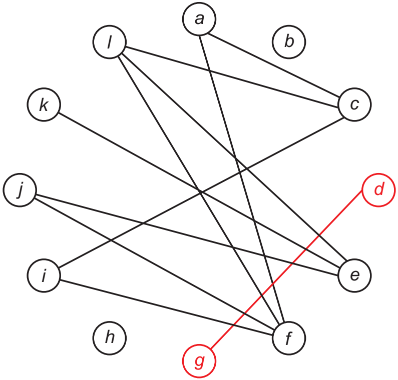
Dítě e nemůže být ve stejné skupině jako děti j, k, l, dítě k naopak může být ve skupině s dětmi a, i, j, l (neexistují hrany mezi těmito 5 dětmi).



Bezproblémové skupiny – řešení

V_1	V_2
a, i, j, k, l	c, e, f

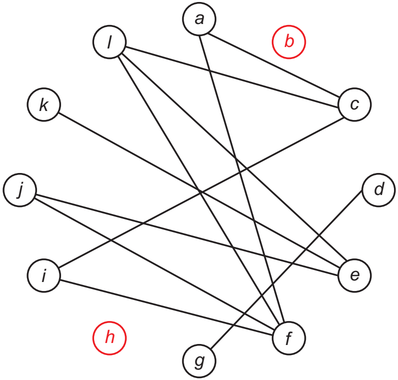
Děti d, g nemohou být ve stejné skupině, nemají však vztah s žádným jiným dítětem. Proto je do skupin můžeme rozdělit libovolně.



Bezproblémové skupiny – řešení

V_1	V_2
a, d, i, j, k, l	c, e, f, g

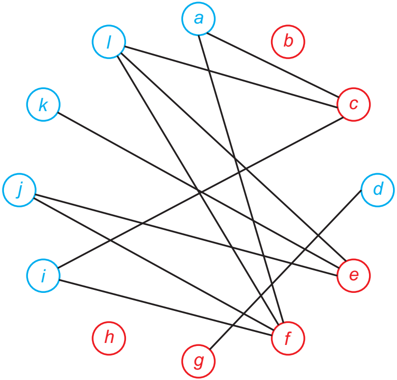
Děti b, h jsou bezkonfliktní, můžeme je tudíž přidat do libovolné skupiny. Abychom měli vyrovnaný počet, budou ve skupině V_2.



Bezproblémové skupiny – řešení

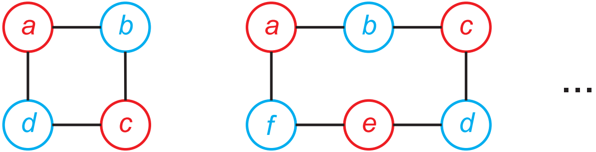
Výsledné rozdělení (není jediné možné):

V_1	V_2
a, d, i, j, k, l	b, c, e, f, g, h



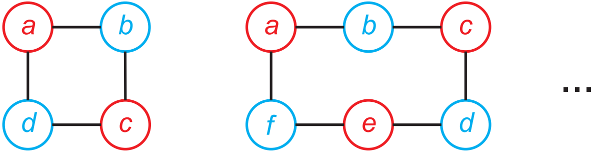
Kdy jsou kružnice bipartitními grafy?

Poznámka: Je patrné, že kružnice sudé délky jsou bipartitními grafy. Názorně si to můžeme ukázat na C_4, C_6 (viz následující obrázek).



Kdy jsou kružnice bipartitními grafy?

Poznámka: Je patrné, že kružnice sudé délky jsou bipartitními grafy. Názorně si to můžeme ukázat na C_4, C_6 (viz následující obrázek).



Pro kružnice liché délky platí následující věta:

Věta 2.1 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je bipartitní právě tehdy, když G neobsahuje kružnici liché délky.

K důkazu Věty 2.1 budeme potřebovat dokázat pomocná tvrzení Lemma 1, Lemma 2 (viz následující slajdy).

Lemma 1

Lemma 1 (MILKOVÁ): Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Provedeme indukcí vzhledem k délce uzavřeného sledu.

Lemma 1

Lemma 1 (MILKOVÁ): Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Provedeme indukcí vzhledem k délce uzavřeného sledu.

Báze: je-li $k = 3$, pak uzavřeným sledem délky 3 je "trojúhelník", tj. kružnice liché délky.

Lemma 1

Lemma 1 (MILKOVÁ): Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Provedeme indukcí vzhledem k délce uzavřeného sledu.

Báze: je-li $k = 3$, pak uzavřeným sledem délky 3 je "trojúhelník", tj. kružnice liché délky.

Indukční předpoklad: Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Lemma 1

Lemma 1 (MILKOVÁ): Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Provedeme indukcí vzhledem k délce uzavřeného sledu.

Báze: je-li $k = 3$, pak uzavřeným sledem délky 3 je "trojúhelník", tj. kružnice liché délky.

Indukční předpoklad: Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Indukční krok: Mějme uzavřený sled $S = (v_0, e_1, \ldots, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, v_0)$ liché délky $k + 2$. Pro sled S mohou nastat dva případy:

Lemma 1

Lemma 1 (MILKOVÁ): Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Provedeme indukcí vzhledem k délce uzavřeného sledu.

Báze: je-li $k = 3$, pak uzavřeným sledem délky 3 je "trojúhelník", tj. kružnice liché délky.

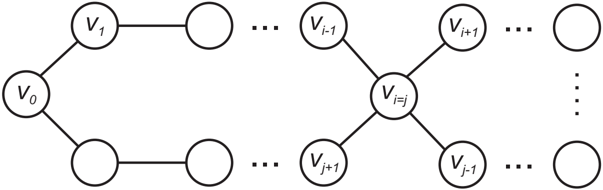
Indukční předpoklad: Uzavřený sled liché délky k ($k \geq 3$) obsahuje kružnici liché délky.

Indukční krok: Mějme uzavřený sled $S = (v_0, e_1, \ldots, e_{k+1}, v_{k+1}, e_{k+2}, v_0)$ liché délky $k + 2$. Pro sled S mohou nastat dva případy:

1. Uzavřený sled liché délky S je kružnice $\Rightarrow$ lemma je dokázáno.
2. Uzavřený sled liché délky S není kružnice, viz obrázek:

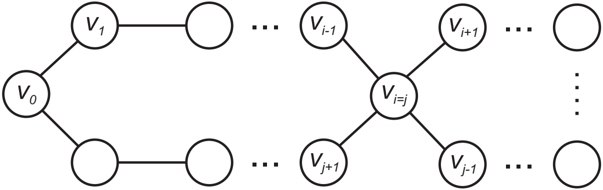
Pokračování důkazu Lemmatu 1

Uzavřený sled S liché délky není kružnice:

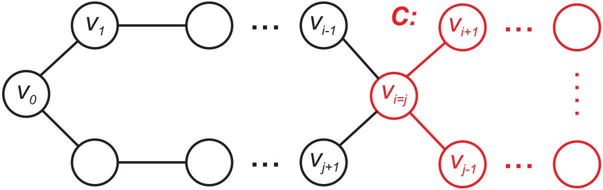


Pokračování důkazu Lemmatu 1

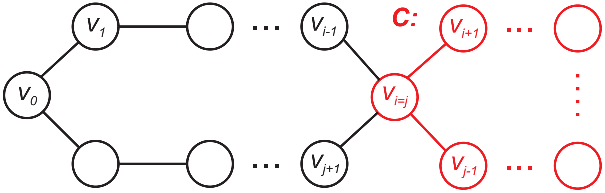
Uzavřený sled S liché délky není kružnice:



S musí obsahovat kružnici $C = (v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, e_j, v_j = v_i)$:

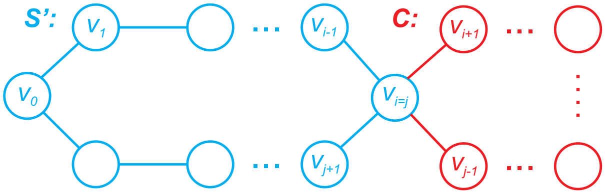


Pokračování důkazu Lemmatu 1



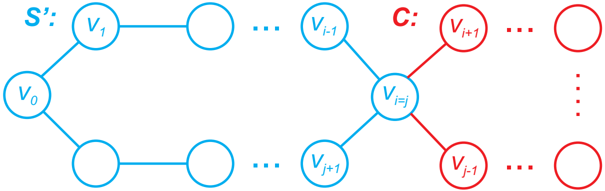
Je-li kružnice C (vyznačená červeně) liché délky, je důkaz hotov (uzavřený sled liché délky obsahuje kružnici liché délky).

Pokračování důkazu Lemmatu 1



Je-li kružnice C (vyznačená červeně) sudé délky, pak odebráním posloupnosti $(v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, e_j)$ ze sledu S dostaneme uzavřený sled S' liché délky menší než k. Proč?

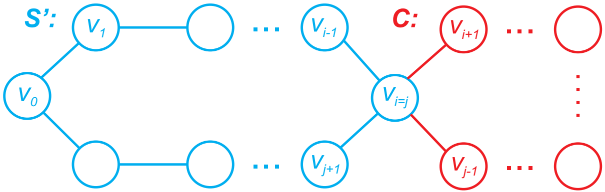
Pokračování důkazu Lemmatu 1



Je-li kružnice C (vyznačená červeně) sudé délky, pak odebráním posloupnosti $(v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, e_j)$ ze sledu S dostaneme uzavřený sled S' liché délky menší než k. Proč?

(Přece sled S byl liché délky a obsahoval kružnici C sudé délky. Odebráním sudého počtu hran ze sledu S má zbývající uzavřený sled S' lichou délku.)

Pokračování důkazu Lemmatu 1



Je-li kružnice C (vyznačená červeně) sudé délky, pak odebráním posloupnosti $(v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \ldots, v_{j-1}, e_j)$ ze sledu S dostaneme uzavřený sled S' liché délky menší než k. Proč?

(Přece sled S byl liché délky a obsahoval kružnici C sudé délky. Odebráním sudého počtu hran ze sledu S má zbývající uzavřený sled S' lichou délku.)

Uzavřený sled S' má lichou délku menší než k.
$\Rightarrow$ dle indukčního předpokladu sled $S' \subseteq S$ obsahuje lichou kružnici.
$\Rightarrow$ sled S obsahuje lichou kružnici.
$\Rightarrow$ Indukční krok a celý důkaz je hotov.

Lemma 2

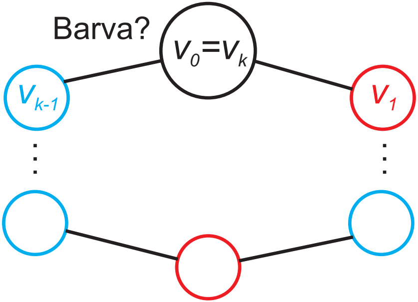
Lemma 2 (MILKOVÁ): Kružnice liché délky není bipartitní graf.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky): Předpokládejme sporem, že kružnice liché délky $C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = v_0)$ je bipartitním grafem (k je liché číslo).

Lemma 2 (MILKOVÁ): Kružnice liché délky není bipartitní graf.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky): Předpokládejme sporem, že kružnice liché délky $C = (v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k = v_0)$ je bipartitním grafem (k je liché číslo).

Rozdělme vrcholy kružnice do dvou skupin, V_1 bude mít vrcholy s lichým indexem, V_2 vrcholy se sudým indexem. Co vrchol $v_0 = v_k$? Kam s ním?



Podmínka pro bipartitní graf

Vraťme se nyní k větě, která udává nutnou a dostačující podmínku pro to, aby graf byl bipartitní.

Věta 2.1 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je bipartitní právě tehdy, když G neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky):

Podmínka pro bipartitní graf

Vraťme se nyní k větě, která udává nutnou a dostačující podmínku pro to, aby graf byl bipartitní.

Věta 2.1 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je bipartitní právě tehdy, když G neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky): Provádíme ověřením obou implikací

1. G je bipartitní $\Rightarrow$ G neobsahuje kružnici liché délky.
2. G neobsahuje kružnici liché délky $\Rightarrow$ G je bipartitní.

Důkaz Věty 2.1 ve směru $\Rightarrow$

Tvrzení 1: G je bipartitní $\Rightarrow$ G neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Použijeme metodu obměny (kontrapozice). Ta je založena na následující tautologii:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Důkaz Věty 2.1 ve směru $\Rightarrow$

Tvrzení 1: G je bipartitní $\Rightarrow$ G neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Použijeme metodu obměny (kontrapozice). Ta je založena na následující tautologii:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Tvrzení 1 je ve tvaru $A \Rightarrow B$. Vytvořme jeho kontrapozici $\neg B \Rightarrow \neg A$:

(*): G obsahuje kružnici liché délky $\Rightarrow$ G není bipartitní.

Důkaz Věty 2.1 ve směru $\Rightarrow$

Tvrzení 1: G je bipartitní $\Rightarrow$ G neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Použijeme metodu obměny (kontrapozice). Ta je založena na následující tautologii:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Tvrzení 1 je ve tvaru $A \Rightarrow B$. Vytvořme jeho kontrapozici $\neg B \Rightarrow \neg A$:

(*): G obsahuje kružnici liché délky $\Rightarrow$ G není bipartitní.

Tvrzení (*) zřejmě platí, dle Lemmatu 2 (*Kružnice liché délky není bipartitní graf*).

Důkaz Věty 2.1 ve směru $\Rightarrow$

Tvrzení 1: G je bipartitní $\Rightarrow$ G neobsahuje kružnici liché délky.

Důkaz: Použijeme metodu obměny (kontrapozice). Ta je založena na následující tautologii:

$$(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$$

Tvrzení 1 je ve tvaru $A \Rightarrow B$. Vytvořme jeho kontrapozici $\neg B \Rightarrow \neg A$:

(*): G obsahuje kružnici liché délky $\Rightarrow$ G není bipartitní.

Tvrzení (*) zřejmě platí, dle Lemmatu 2 (*Kružnice liché délky není bipartitní graf*).
Závěr: Z platnosti tvrzení (*) vyplývá pravdivost Tvrzení 1.

Důkaz Věty 2.1 ve směru $\Leftarrow$

Tvrzení 2: G neobsahuje kružnici liché délky $\Rightarrow$ G je bipartitní.

Důkaz: Předpokládejme sporem, že Tvrzení 2 neplatí, tj.

Důkaz Věty 2.1 ve směru $\Leftarrow$

Tvrzení 2: G neobsahuje kružnici liché délky $\Rightarrow$ G je bipartitní.

Důkaz: Předpokládejme sporem, že Tvrzení 2 neplatí, tj.

(**) G neobsahuje kružnici liché délky $\wedge$ G není bipartitní.

Bez újmy na obecnosti ještě předpokládejme, že je graf G souvislý.

Důkaz Věty 2.1 ve směru $\Leftarrow$

Tvrzení 2: G neobsahuje kružnici liché délky $\Rightarrow$ G je bipartitní.

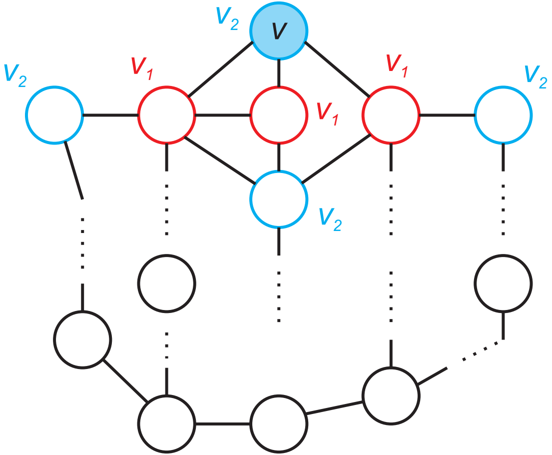
Důkaz: Předpokládejme sporem, že Tvrzení 2 neplatí, tj.

$$(**)\ G \text{ neobsahuje kružnici liché délky} \wedge G \text{ není bipartitní.}$$

Bez újmy na obecnosti ještě předpokládejme, že je graf G souvislý. Zvolme pevně vrchol $v \in V$. Rozdělme množinu vrcholů na dvě skupiny:

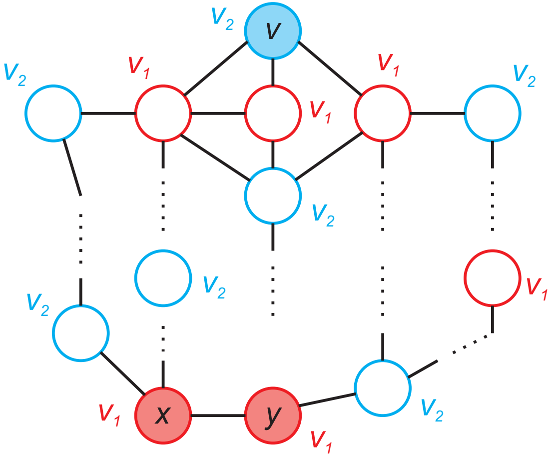
- V_1 obsahuje ty vrcholy, jejichž nejkratší vzdálenost od v je lichá.
- V_2 obsahuje ty vrcholy, jejichž nejkratší vzdálenost od v je sudá.

Znázorněme si rozdělení množiny vrcholů na dvě skupiny V_1, V_2.



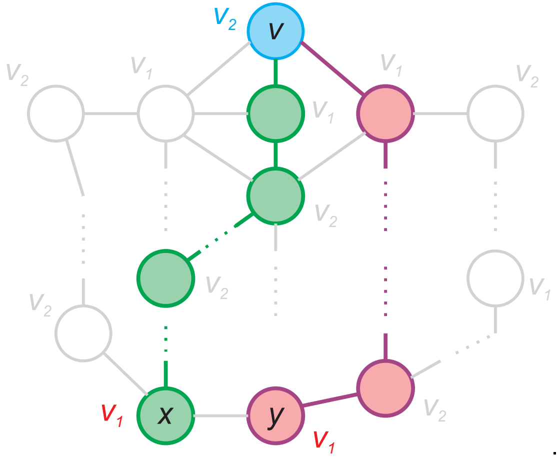
Pokračování důkazu Věty 2.1 ve směru $\Leftarrow$

Protože graf G není bipartitní, existuje hrana $e = \{x, y\}$, jejíž oba koncové vrcholy patří např. do skupiny V_1.



Pokračování důkazu Věty 2.1 ve směru $\Leftarrow$

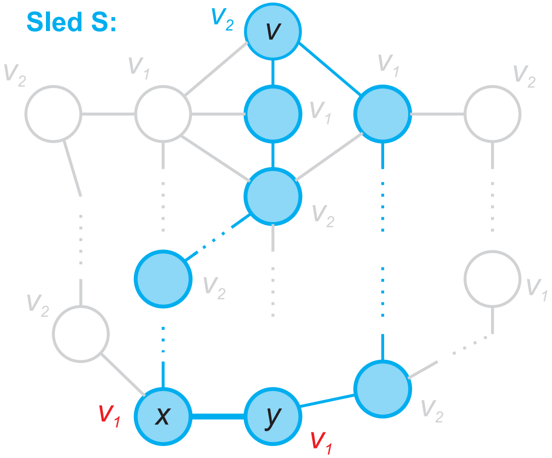
Nejkratší cesta z vrcholu v do vrcholu x je liché délky.
Nejkratší cesta z vrcholu v do vrcholu y je liché délky.
Celkem: nejkratší cesta C' z x do y přes vrchol v je sudé délky.



...

Pokračování důkazu Věty 2.1 ve směru $\Leftarrow$

Doplňme sled C' o přímou hranu $e = \{x, y\} \Rightarrow$ v grafu G vzniká uzavřený sled S **liché** délky.

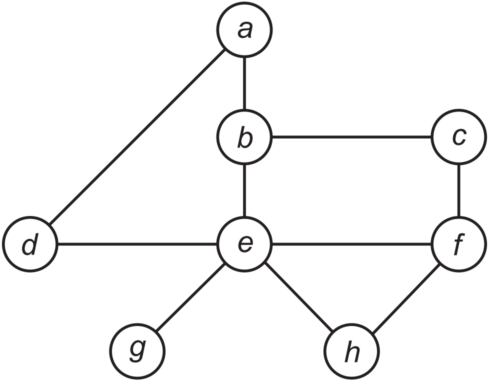


Pokračování důkazu Věty 2.1 ve směru $\Leftarrow$

Uzavřený sled S liché délky obsahuje dle Lemmatu 1 kružnici liché délky
$\Rightarrow$ spor s předpokladem (**).
Závěr: Tvrzení 2, tj. opak tvrzení (**), platí.

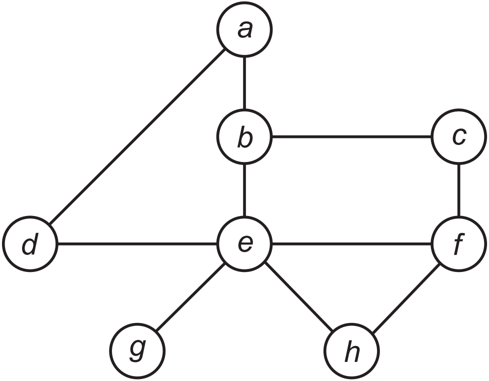
Příklad 1

Rozhodněte, zda je následující graf bipartitní. Svou odpověď zdůvodněte.



Příklad 1

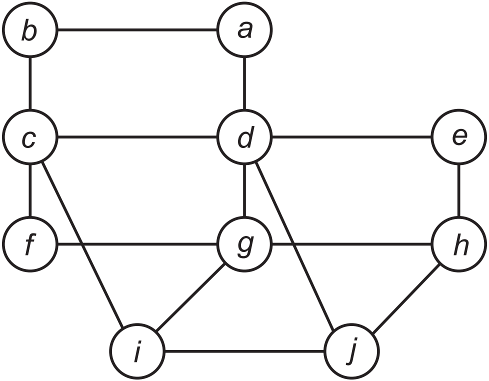
Rozhodněte, zda je následující graf bipartitní. Svou odpověď zdůvodněte.



Řešení: Graf není bipartitní, protože obsahuje kružnice liché délky, např. trojúhelník na vrcholech $\{e, f, h\}$ či kružnici délky 5 na vrcholech $\{b, c, f, h, e\}$.

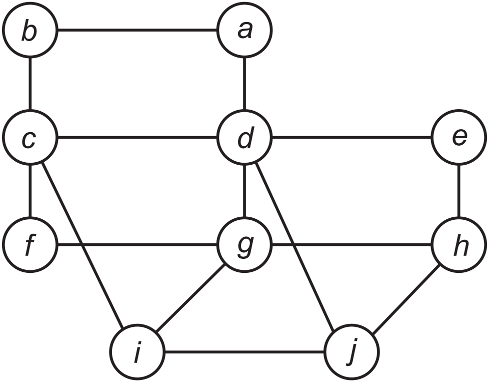
Příklad 2

Rozhodněte, zda je následující graf bipartitní. Svou odpověď zdůvodněte.



Příklad 2

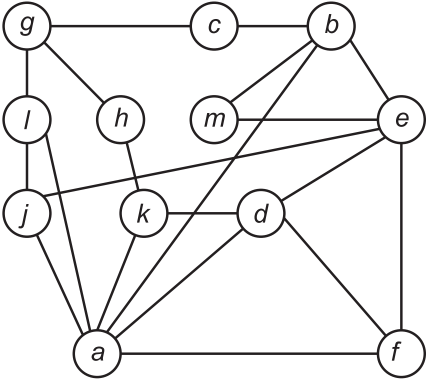
Rozhodněte, zda je následující graf bipartitní. Svou odpověď zdůvodněte.



Řešení: Graf je bipartitní, rozdělení vrcholů je následující:
$V_1 = \{a, c, e, g, j\}$, $V_2 = \{b, d, f, h, i\}$.

Trasa výletu

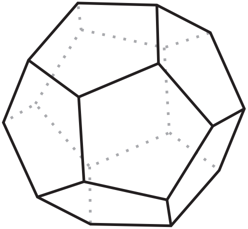
Přátelé s dětmi se vydali na výlet. Rodiče pro své děti vymysleli zajímavý úkol. Na začátku výletu, v obci h, dali dětem do ruky mapu, na níž bylo zakresleno celkem 12 obcí. Dvě obce x, y jsou na mapě propojeny čárou, je-li pěší cesta mezi x, y uskutečnitelná. Úkolem dětí je vymyslet trasu výletu tak, aby začala a končila v obci h a vedla každou obcí právě jednou.



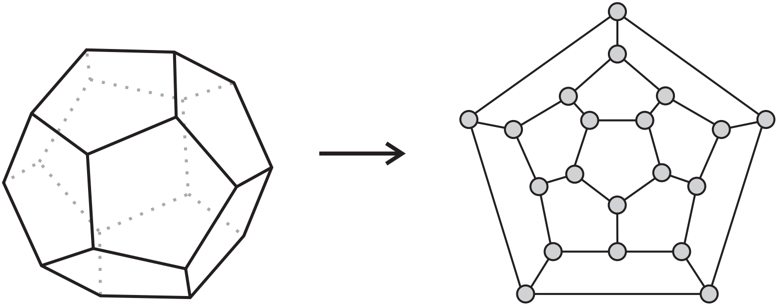
Hamiltonovská kružnice a graf

Definice 2.2 (MILKOVÁ): **Hamiltonovská kružnice** v grafu G je kružnice obsahující všechny vrcholy grafu G.
Hamiltonovský graf je graf, ve kterém existuje hamiltonovská kružnice.

Historická poznámka: William Rowan Hamilton (1805–1865) vymyslel v r. 1853 hru s názvem Icosian Game (později *Cesta kolem světa*), v níž použil pravidelný dvanáctistěn. Vrcholy představovaly světová města a byly označeny kolíkem. Cílem hry bylo natáhnout vlákno, které by procházelo kolem všech kolíků a tvořilo tak kružnici.

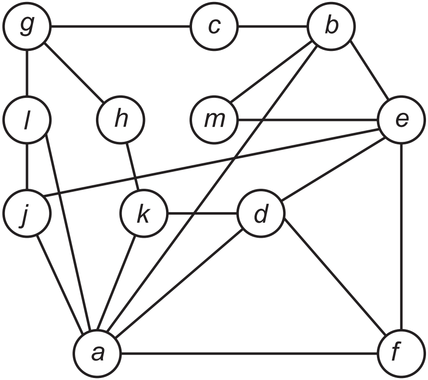


Dvanáctistěn a jeho grafová reprezentace



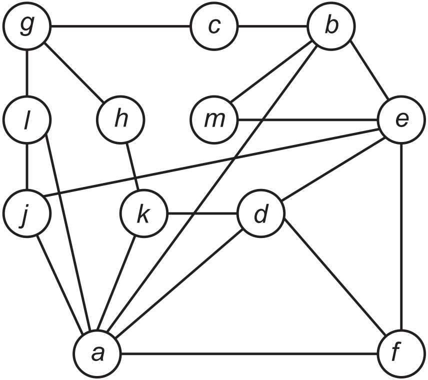
Trasa výletu – řešení

Matematicky je možné vyjádřit úkol dětí takto: *Najděte hamiltonovskou kružnici v následujícím grafu, která začíná a končí vrcholem h.*



Trasa výletu – řešení

Matematicky je možné vyjádřit úkol dětí takto: *Najděte hamiltonovskou kružnici v následujícím grafu, která začíná a končí vrcholem h.*

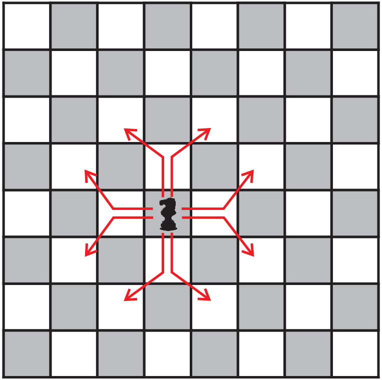


Řešení:

h	g	c	b	m	e	j	l	a	f	d	k	h

Úloha šachového jezdce

Zadání: Šachový jezdec má projít prázdnou šachovnici tak, aby na každé pole vstoupil právě jednou a vrátil se při posledním tahu na výchozí pole. Podmínka návratu na stejné místo často nebývá nutná, v takovém případě jde o **hamiltonovskou cestu**.

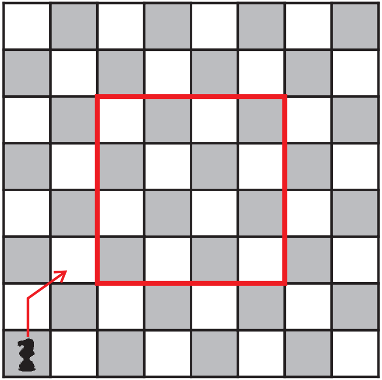


Úloha jezdce – slavný matematický problém

- Abraham de Moivre (1667–1754): na počátku 18. století podal jedno z prvních řešení – ukážeme si za chvíli jeho princip.
- Leonard Euler (1707–1783): problémem se začal zabývat v r. 1757, o dva roky později úlohu zobecnil pro šachovnici $n \times n$.
- Další úspěšní řešitelé: A. T. Vandermond (1735–1796), C. F. Gauss (1777–1855), K. F. Jänisch (1813–1872, řešení ve tvaru magického čtverce), ...
- Peter Guthrie Tait (1831–1901): úlohu jako první řešil grafově. Vrcholy grafu reprezentovaly jednotlivé pole šachovnice. Dva vrcholy spojil hranou tehdy, když mezi odpovídajícími poli mohl jezdec vykonat jeden tah. Je zřejmé, že grafová reprezentace řešení příliš neusnadňuje.

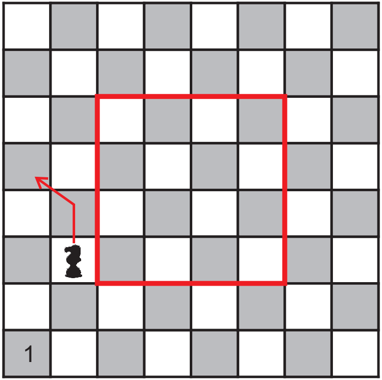
Řešení úlohy šachového jezdce (de Moivre)

Šachovnici si rozdělíme na dvě části, vnitřních 16 polí a zbylá pole na okraji, na nichž se snažíme jezdcem táhnout.



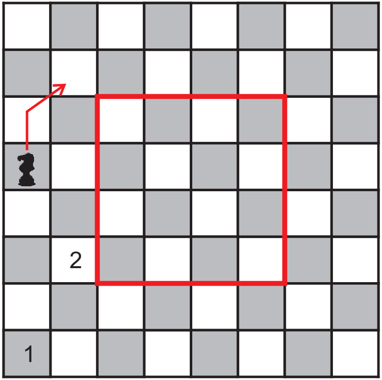
Řešení úlohy šachového jezdce (de Moivre)

Šachovnici si rozdělíme na dvě části, vnitřních 16 polí a zbylá pole na okraji, na nichž se snažíme jezdcem táhnout.



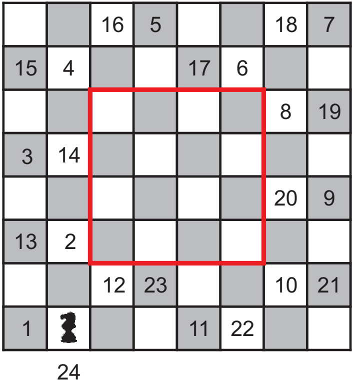
Řešení úlohy šachového jezdce (de Moivre)

Šachovnici si rozdělíme na dvě části, vnitřních 16 polí a zbylá pole na okraji, na nichž se snažíme jezdcem táhnout.



Řešení úlohy šachového jezdce (de Moivre)

Dostaneme se do situace, kdy už jezdcem nemůžeme táhnout po okraji šachovnice. Jediná možnost je vstoupit do vnitřní oblasti.



Řešení úlohy šachového jezdce (de Moivre)

Táhneme tedy jezdcem do vnitřních 16 polí. Dokončit zbývající tahy už nebývá problém.

		16	5			18	7
15	4			17	6		
						8	19
3	14						
						20	9
13	2	♞					
		12	23			10	21
1	24			11	22		

Podmínky pro Hamiltonovský graf

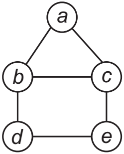
- Nebyla dosud nalezená nutná a zároveň postačující podmínka pro existenci Hamiltonovského grafu.
- Postačující podmínky:
  1. **Dirac, 1952:** Nechť $G = (V, E)$ je konečný graf, $|V| = n \geq 3$ a $\operatorname{st} x \geq \frac{n}{2}$ pro každý uzel $x \in V$. Pak graf G je Hamiltonovský. *(Věta 6.12, FUCHS)*
  2. **Ore, 1960:** Buď $G = (V, E)$ je konečný graf, $|V| \geq 3$. Nechť pro každé uzly $x, y \in V$, které nejsou sousední, platí

     $$\operatorname{st} x + \operatorname{st} y \geq |V|.$$

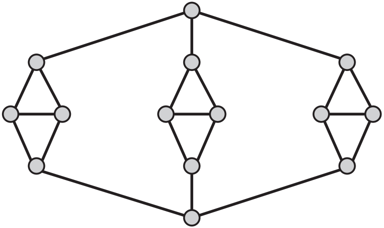
     Pak graf G je Hamiltonovský.
     (Věta 6.13, FUCHS)
- Nutná podmínka *:* Buď G Hamiltonovský graf. Pak G je uzlově 2–souvislý (tj. i po odebrání vrcholu zůstane souvislý). *(Věta 6.11, FUCHS)*

Příklady grafů

Hamiltonovský graf, který nesplňuje Diracovu (postačující) podmínku – vrcholy a, d, e nemají stupeň $\geq \frac{5}{2}$:



Uzlově 2-souvislý graf, který není Hamiltonovský:



Další rady pro hledání hamiltonovské kružnice (MILKOVÁ)

1. Jestliže vrchol v má stupeň k, pak hamiltonovská kružnice musí obsahovat právě dvě hrany incidentní s vrcholem v.
2. Jakmile hamiltonovská kružnice, kterou konstruujeme, prochází vrcholem v, pak ostatní nepoužité hrany incidentní s tímto vrcholem již můžeme vyloučit (nebudou ležet v hamiltonovské kružnici).

Použité zdroje

1. MILKOVÁ, Eva. *Teorie grafů a grafové algoritmy.* 1. vyd. Hradec Králové: Nakladatelství Gaudeamus, 2013. 123 s. ISBN 978-80-7435-267-6.
2. FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele.* 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 178 s. ISBN 80-210-2703-7.
3. ŠIŠMA, Pavel. *Teorie grafů 1736–1963*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 1997. ISBN 80-7196-065-9.