

# MA2BP\_PDM1 Diskrétní matematika 1

## 8. Rovinné grafy, barvení grafů, Platónova tělesa

Lukáš Másilko

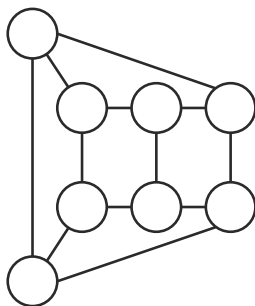
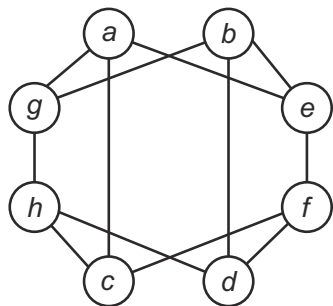
Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky  
Masarykova univerzita

29. 11. 2017

- 1 Rovinné grafy
- 2 Eulerova věta
- 3 Barvení grafů
- 4 Platónova tělesa
- 5 Použité zdroje

# Rozpletání propletence

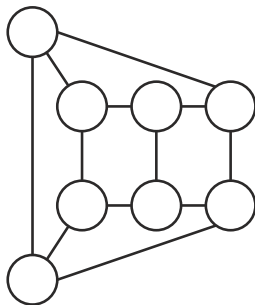
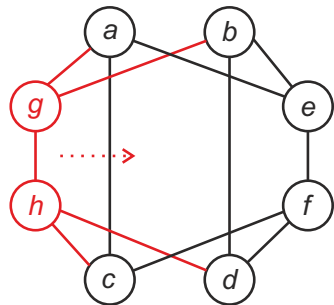
Na obrázku nalevo je zobrazeno osm kuliček, které jsou vzájemně spojeny gumičkami. Které kuličky posunete, abyste dostali jejich rozestavení na obrázku napravo?



Úkol spočívající v nalezení *rovinné* reprezentace grafu.

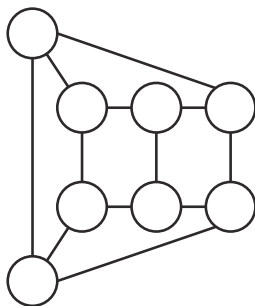
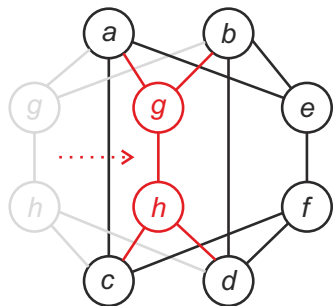
# Rozpletání propletence – řešení

Zkusíme posunout dvojici vrcholů  $g, h$ .



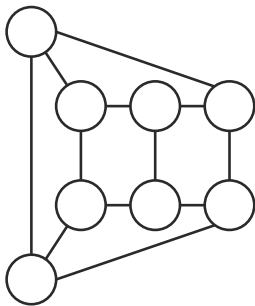
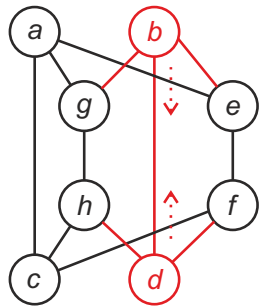
# Rozpletání propletence – řešení

Výsledek posunutí vrcholů  $g, h$  doprava společně s hranami, které jsou s nimi incidentní:



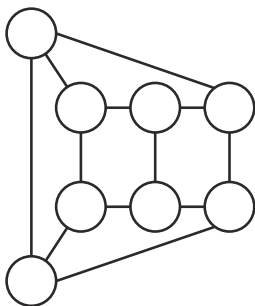
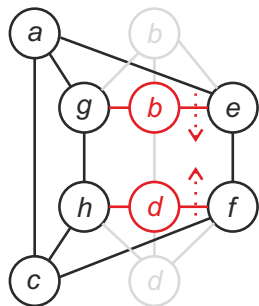
# Rozpletání propletence – řešení

Zkusíme posunout dvojici vrcholů  $b, d$ , a to tak, že uzel  $b$  s jeho hranami posuneme dolů, uzel  $d$  a jeho hrany směrem nahoru.



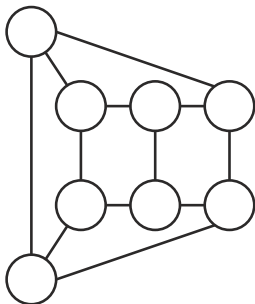
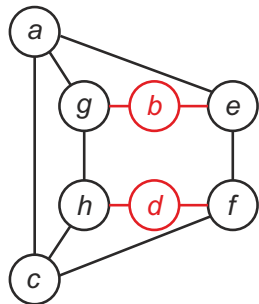
# Rozpletání propletence – řešení

Výsledek posunutí vrcholů  $g, h$  doprava společně s hranami, které jsou s nimi incidentní:



# Rozpletání propletence – řešení

Rovinné zobrazení obou grafů je již stejné, dosáhli jsme toho posunutím kuliček  $b, d, g, h$ .





**Definice 2.4** (MILKOVÁ): **Rovinný graf** je graf, ke kterému existuje tzv. rovinná reprezentace (rovinné nakreslení), tj. můžeme jej nakreslit do roviny tak, aby se žádné dvě hrany nekřížily (neprotínaly ve vnitřním bodě) – hrany se mohou protínat jen ve vrcholech.

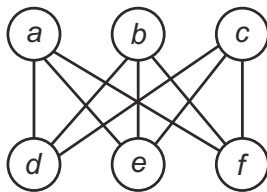
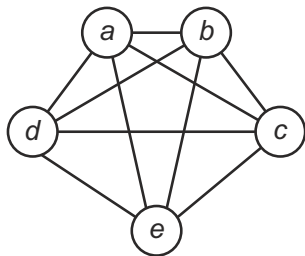
Platí následující dvě tvrzení poskytující **nutné podmínky** pro to, aby byl graf rovinný.

**Tvrzení 2.4** (MILKOVÁ): Pro každý graf  $G = (V, E)$  s alespoň třemi vrcholy platí: *Jestliže je  $G$  rovinný graf, pak  $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$ .*

**Tvrzení 2.5** (MILKOVÁ): Pro každý graf  $G = (V, E)$  s alespoň třemi vrcholy, který neobsahuje  $K_3$  jako podgraf, platí: *Jestliže je  $G$  rovinný graf, pak  $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$ .*

# Kuratowského grafy

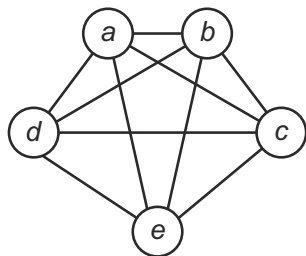
- Významným matematikem, který významně přispěl k problematice rovinných grafů, byl Polák Kazimierz Kuratowski (1896–1980). Dva nejznámější grafy, které nejsou rovinné, dostaly jeho jméno.
- Kuratowského grafy:  $K_5$  (nalevo) a  $K_{3,3}$  (napravo).



Skóre  $K_5$ : (4, 4, 4, 4, 4)

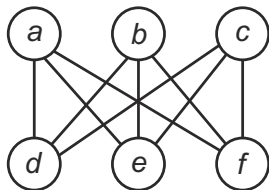
Skóre  $K_{3,3}$ : (3, 3, 3, 3, 3, 3)

# Kuratowského grafy – proč nejsou rovinné?



- 1 Skóre  $K_5$ :  $(4, 4, 4, 4, 4) \Rightarrow K_5$  má 5 vrcholů a 10 hran, jako svůj podgraf obsahuje  $K_3$ . Můžeme ověřit pouze nutnou podmínku v Tvzení 2.4:
- 2  $|E| = 10, 3 \cdot |V| - 6 = 9 \Rightarrow$  vztah  $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$  neplatí.
- 3 U grafu  $K_5$  není splněna nutná podmínka Tvzení 2.4, není proto rovinný.

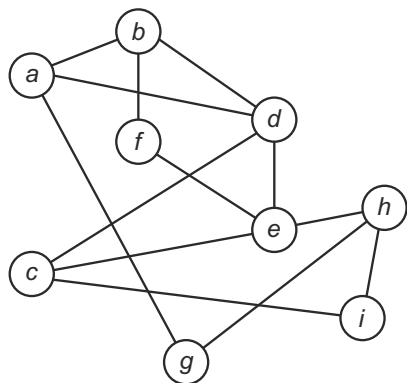
# Kuratowského grafy – proč nejsou rovinné?



- 1 Skóre  $K_{3,3}$ :  $(3, 3, 3, 3, 3, 3) \Rightarrow K_{3,3}$  má 6 vrcholů a 9 hran, jako svůj podgraf neobsahuje  $K_3$ . Můžeme ověřit obě podmínky v Tvzřeních 2.4, 2.5.
- 2  $3 \cdot |V| - 6 = 12 \Rightarrow$  vztah  $|E| \leq 3 \cdot |V| - 6$  platí.
- 3  $2 \cdot |V| - 4 = 8 \Rightarrow$  vztah  $|E| \leq 2 \cdot |V| - 4$  neplatí.
- 4 U grafu  $K_{3,3}$  není splněna nutná podmínka Tvzření 2.5, není proto rovinný.

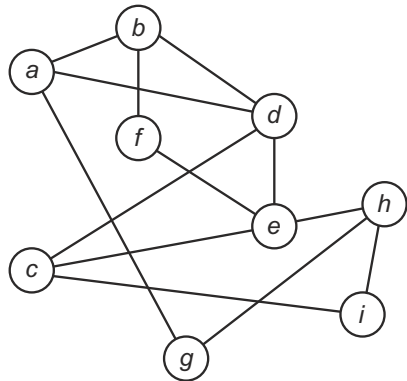
## Příklad 2.5

U následujícího grafu ověřte, zda je splněna podmínka v Tvzení 2.4.  
Pokud ano, nakreslete jeho rovinnou reprezentaci.



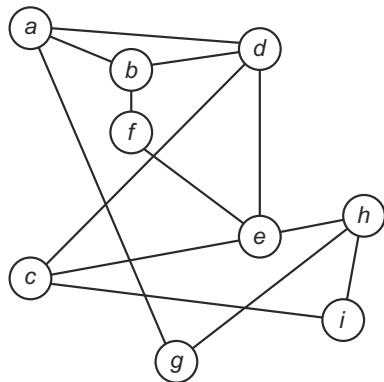
## Příklad 2.5 – řešení

Skóre:  $(3, 3, 3, 4, 4, 2, 2, 3, 2) \sim (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4) \Rightarrow |V| = 9, |E| = 13$   
 $3 \cdot |V| - 6 = 3 \cdot 9 - 6 = 21 \geq 13$ ,  
podmínka Tvzení 2.4 tedy je splněna. Zkusíme nyní uspořádat vrcholy  
v rovině jiným způsobem, aby se hrany nekřížily.



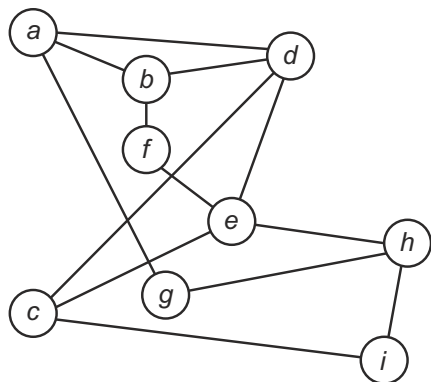
## Příklad 2.5 – řešení

Nejprve dvojici vrcholů  $a, d$  posuneme nad vrchol  $b$ :



## Příklad 2.5 – řešení

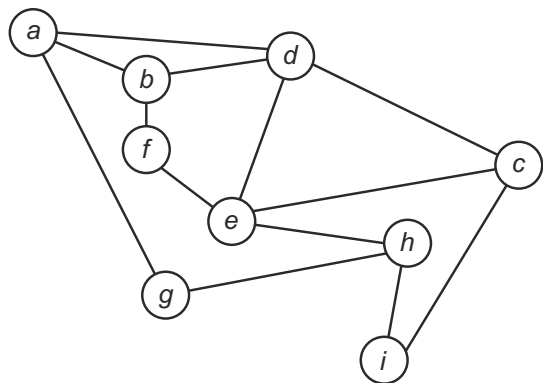
Vrchol  $e$  posuneme blíže k vrcholu  $f$ , abychom rozšířili oblast danou kružnicí  $(c, i, h, e, c)$ . Do středu této kružnice posuneme vrchol  $g$ .





## Příklad 2.5 – řešení

Zbývá vyřešit vrchol  $c$ , který posuneme napravo od ostatních uzlů, čímž zrušíme poslední tři křížení hran.



**Věta 2.3 (MILKOVÁ):** Pro každý graf  $G = (V, E)$  platí: Graf  $G$  je rovinný právě tehdy, když žádný podgraf grafu  $G$  není ani graf  $K_{3,3}$ , ani graf  $K_5$ , ani libovolné dělení těchto dvou grafů.

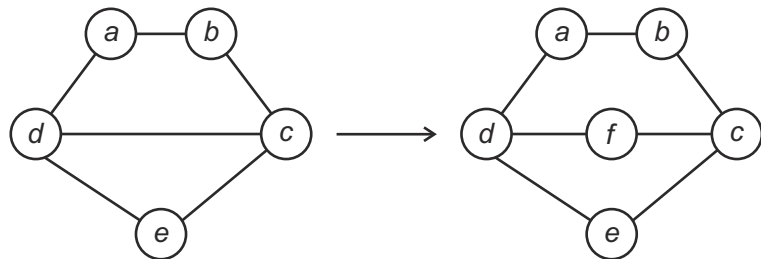
Tuto větu formuloval a dokázal v r. 1929 Kazimierz Kuratowski – důkaz je velmi obtížný, nebudeme si jej uvádět. Použil pojem dělení grafu, který si vysvětlíme následující definicí.

**Definice 2.5 (MILKOVÁ):** Necht' je dán graf  $G = (V, E)$ , hrana  $e = \{x, y\} \in E$  a vrchol  $v \notin V$ .

- Graf vzniklý z grafu  $G$  půlením hrany  $e$  je graf  $(V \cup \{v\}, (E \setminus \{e\}) \cup \{\{x, v\}; \{v, y\}\})$ .
- Dělením grafu  $G$  nazýváme každý graf, který vznikl z grafu  $G$  postupným půlením hran.

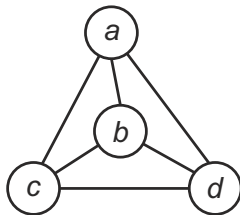
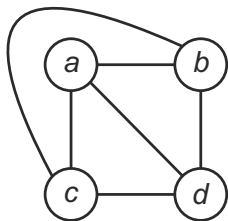
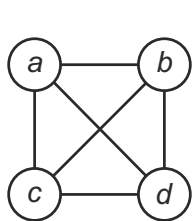
# Dělení grafu – příklad

Na následujícím obrázku došlo k půlení hrany  $\{d, c\}$ . Graf napravo je dělením grafu nalevo.



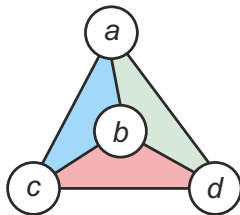
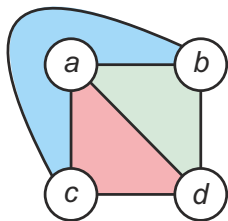
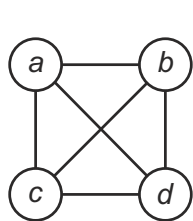
**Definice 7.7** (FUCHS): Buď  $G = (V, E)$  rovinný souvislý graf a je dáno některé jeho rovinné nakreslení. Označme  $W$  množinu všech oblastí, na něž je tímto nakreslením rovina rozdělena (včetně "vnějšku"). Pak trojici  $M = (V, E, W)$  nazveme **mapou**.

**Příklad:** na následujícím obrázku jsou tři různá nakreslení grafu  $K_4$ . Které z nich jsou mapy? Určete počet prvků množiny  $W$  pro graf  $K_4$ .



**Definice 7.7** (FUCHS): Buď  $G = (V, E)$  rovinný souvislý graf a je dáno některé jeho rovinné nakreslení. Označme  $W$  množinu všech oblastí, na něž je tímto nakreslením rovina rozdělena (včetně “vnějšku”). Pak trojici  $M = (V, E, W)$  nazveme **mapou**.

*Řešení příkladu:* Pouze na 2. a 3. obrázku jsou mapy obsahující čtyři oblasti (počítáme i “vnějšek” grafu).



**Věta 7.9 – Eulerova věta (FUCHS):** Bud'  $M = (V, E, W)$  libovolná mapa. Pak platí vztah

$$(*) \quad |W| + |V| - |E| = 2$$

**Důkaz:** matematickou indukcí vzhledem k počtu hran mapy, tj. k číslu  $|E|$ .

**Věta 7.9 – Eulerova věta (FUCHS):** Bud'  $M = (V, E, W)$  libovolná mapa. Pak platí vztah

$$(*) \quad |W| + |V| - |E| = 2$$

**Důkaz:** matematickou indukcí vzhledem k počtu hran mapy, tj. k číslu  $|E|$ .

*Báze:*  $|E| = 0$ , tedy mapa nemá žádnou hranu. Aby byla souvislá, musí mít pouze jeden vrchol, který rovinu nedělí na více oblastí. Platí tedy

$$|E| = 0, |V| = 1, |W| = 1,$$

z čehož  $|W| + |V| - |E| = 1 + 1 - 0 = 2$ . Báze platí.

**Věta 7.9 – Eulerova věta (FUCHS):** Buď  $M = (V, E, W)$  libovolná mapa. Pak platí vztah

$$(*) \quad |W| + |V| - |E| = 2$$

**Důkaz:** matematickou indukcí vzhledem k počtu hran mapy, tj. k číslu  $|E|$ .

*Báze:*  $|E| = 0$ , tedy mapa nemá žádnou hranu. Aby byla souvislá, musí mít pouze jeden vrchol, který rovinu nedělí na více oblastí. Platí tedy

$$|E| = 0, |V| = 1, |W| = 1,$$

z čehož  $|W| + |V| - |E| = 1 + 1 - 0 = 2$ . Báze platí.

*Indukční předpoklad:* Pro mapu  $M = (V, E, W)$  s  $|E| \leq n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) platí

$$(*) \quad |W| + |V| - |E| = 2$$

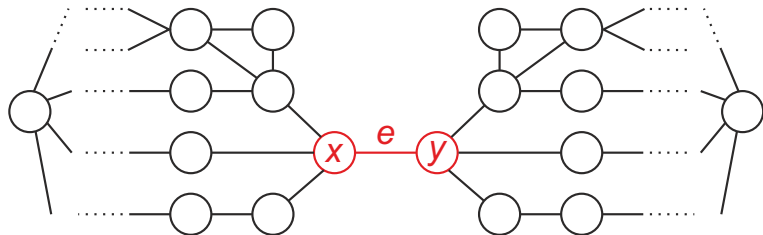


*Indukční krok:* Mějme mapu  $M' = (V', E', W')$ , pro kterou  $|E'| = n + 1$ .  
Rozlišíme dva případy:

- (a) Mapa  $M'$  obsahuje most  $e = \{x, y\}$ .
- (b) Mapa  $M'$  neobsahuje most.

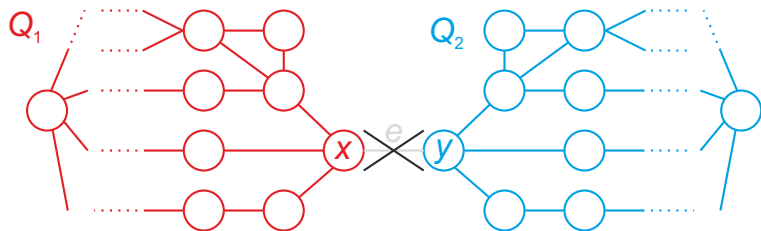
# Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (a)

**Případ (a)** –  $M'$  má most  $e = \{x, y\}$



# Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (a)

Odebráním mostu  $e$  dostaneme nesouvislý graf  $M'' = (V', E' - \{e\}, W'')$  o dvou komponentách – mapách  $Q_1 = (V_1, E_1, W_1)$ ,  $Q_2 = (V_2, E_2, W_2)$ .



Obě mapy  $Q_1, Q_2$  mají  $\leq n$  hran, dle indukčního předpokladu tedy platí:

$$|W_1| + |V_1| - |E_1| = 2$$

$$|W_2| + |V_2| - |E_2| = 2$$

Porovnejme nyní oba grafy  $M'$ ,  $M''$ . Co se změnilo?

- 1 Počet vrcholů zůstal stejný:  $|V'| = |V_1| + |V_2|$
- 2 Počet hran se snížil o jednu, platí tedy  $|E'| = |E_1| + |E_2| + 1$
- 3 Počet oblastí se odebráním mostu nezměnil, avšak “vnějšek” mapy  $M'$  počítáme v mapách  $Q_1$  a  $Q_2$  dvakrát, takže:  $|W'| = |W_1| + |W_2| - 1$

# Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (a)

Porovnejme nyní oba grafy  $M'$ ,  $M''$ . Co se změnilo?

- 1 Počet vrcholů zůstal stejný:  $|V'| = |V_1| + |V_2|$
- 2 Počet hran se snížil o jednu, platí tedy  $|E'| = |E_1| + |E_2| + 1$
- 3 Počet oblastí se odebráním mostu nezměnil, avšak “vnějšek” mapy  $M'$  počítáme v mapách  $Q_1$  a  $Q_2$  dvakrát, takže:  $|W'| = |W_1| + |W_2| - 1$

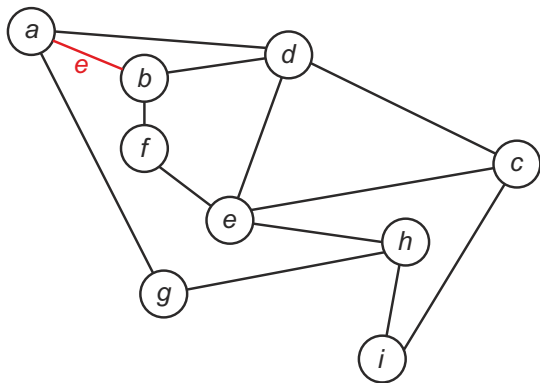
Nyní počítejme:

$$\begin{aligned} |W'| + |V'| - |E'| &= (|W_1| + |W_2| - 1) + (|V_1| + |V_2|) - \\ &\quad - (|E_1| + |E_2| + 1) \\ &= (|W_1| + |V_1| - |E_1|) + (|W_2| + |V_2| - |E_2|) - 2 \\ &= 2 + 2 - 2 = 2 \end{aligned}$$

I pro mapu  $M'$  s mostem a  $n + 1$  hranami tedy tvrzení platí.

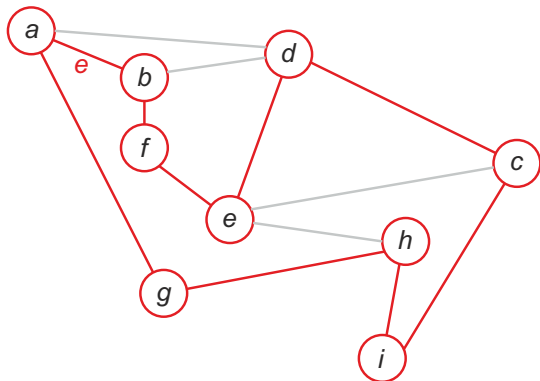
## Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (b)

**Případ (b)** –  $M'$  o  $n + 1$  hranách nemá most. Buď  $e \in E'$  libovolná hrana. Dle Důsledku 1.2 (Milková) tedy leží na nějaké kružnici.



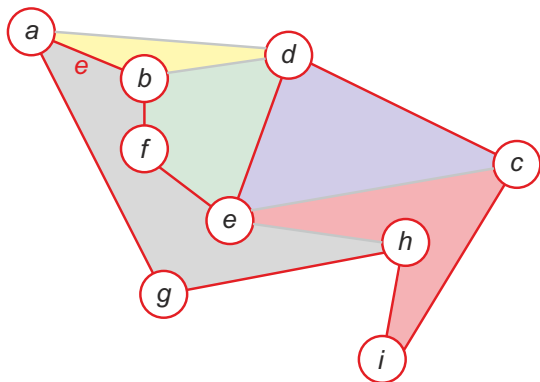
# Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (b)

Označme  $C$  kružnici maximální délky, na níž leží hrana  $e$ .



# Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (b)

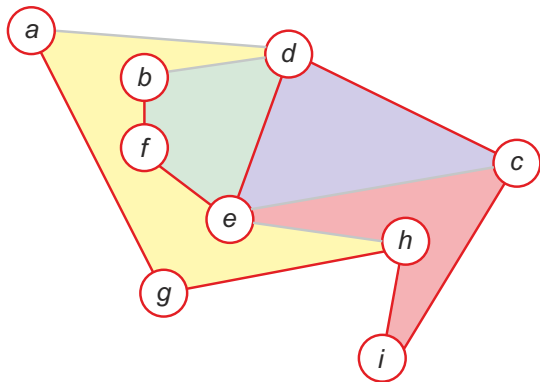
Vyznačme všechny oblasti mapy  $M'$ .





## Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (b)

Odebráním hrany  $e$  z mapy  $M'$  vznikne nová mapa  $M'' = (V'', E'', W'')$ .  
Uvnitř kružnice  $C$  jistě byla oblast, která odebráním hrany  $e$  zanikne.



Protože navíc  $|E''| = n$ , platí dle indukčního předpokladu  
 $|W''| + |V''| - |E''| = 2$ .

Porovnejme nyní oba grafy  $M'$ ,  $M''$ . Co se změnilo?

- 1 Počet vrcholů zůstal stejný:  $|V'| = |V''|$ .
- 2 Počet hran se snížil o jednu, platí tedy  $|E'| = |E''| + 1$ .
- 3 Počet oblastí se odebráním hrany  $e$  také snížil o jednu:  
 $|W'| = |W''| + 1$ .

## Indukční krok důkazu Eulerovy věty – případ (b)

Porovnejme nyní oba grafy  $M'$ ,  $M''$ . Co se změnilo?

- 1 Počet vrcholů zůstal stejný:  $|V'| = |V''|$ .
- 2 Počet hran se snížil o jednu, platí tedy  $|E'| = |E''| + 1$ .
- 3 Počet oblastí se odebráním hrany  $e$  také snížil o jednu:  
 $|W'| = |W''| + 1$ .

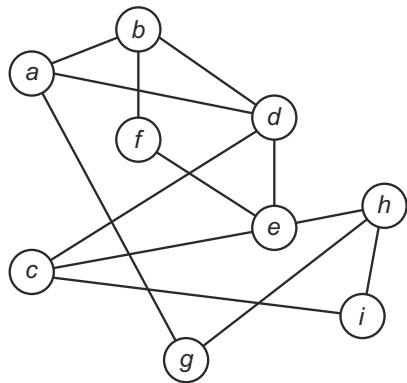
Nyní počítejme:

$$\begin{aligned} |W'| + |V'| - |E'| &= (|W''| + 1) + |V''| - (|E''| + 1) \\ &= (|W''| + |V''| - |E''|) + 1 - 1 \\ &= 2 + 0 = 2 \end{aligned}$$

I pro mapu  $M'$  s  $n + 1$  hranami, která neobsahuje most, tvrzení platí.

# Příklad 1

V Příkladu 2.5 jsme zjistili, že následující graf  $G = (V, E)$  je rovinný.

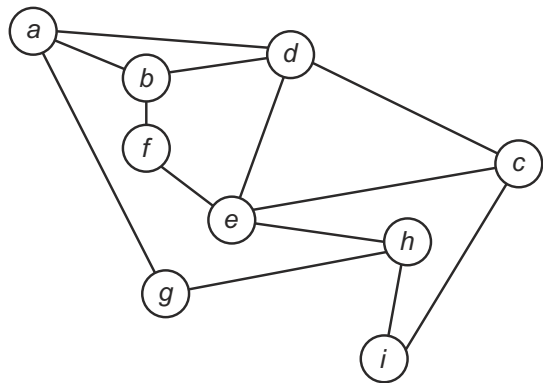


Zjistěte pomocí Eulerovy věty, kolik oblastí obsahuje mapa vzniklá rovinným zakreslením grafu  $G$ .

# Příklad 1 – řešení

Platí:  $|V| = 9, |E| = 13$ .

Eulerův vztah:  $|W| + |V| - |E| = 2$ , z čehož  $|W| + 9 - 13 = 2 \Rightarrow |W| = 6$ ,  
viz následující obrázek s rovinným zakreslením grafu  $G$ :



# Tréninkové plochy pro hokejová družstva

Hokejový klub zajišťuje potřebný počet ledových ploch ke každodennímu tréninku jeho družstev. Z ekonomických důvodů chce zajistit minimální počet ledových ploch. Kolik ledových ploch musí zajistit, když ví, že jednotlivá družstva potřebují ledovou plochu k tréninku následovně.

Žáci A	12:00–14:00
Žáci B	14:30–16:30
Dorostenci A	15:30–17:30
Dorostenci B	11:30–13:30
Junioři	17:00–19:00
Muži	18:00–19:30

## Definice 3.1, 3.2 (MILKOVÁ):

- 1 Obarvení grafu** (obarvení vrcholů grafu) je ohodnocení vrcholů grafu hodnotami z množiny  $B$  (takzvanými barvami), a to takové, že žádné dva sousední vrcholy nejsou ohodnoceny (obarveny) stejnou barvou.
- 2** Graf nazýváme  $r$ -barevným, jestliže existuje jeho obarvení  $r$  barvami.
- 3 Barevnost grafu** (neboli *vrcholová barevnost*, též *chromatické číslo*) je nejmenší počet barev, který je potřebný k obarvení grafu. Značíme ji  $\chi(G)$ , přičemž  $G$  je graf.

**Poznámka:** Mějme  $G = (V, E)$ . Pak platí:

- $\chi(G) = 1$  pro graf neobsahující žádnou hranu (tzv. diskrétní graf).
- $\chi(G) = 2$  pro strom či bipartitní graf.
- $\chi(G) \geq 3$  pro graf obsahující kružnici liché délky.
- $\chi(G) = n$  pro úplný graf  $K_n$ .

# Tréninkové plochy pro hokejová družstva

Problém manažera hokejového klubu lze řešit grafově. Vrcholy grafu budou jednotlivá družstva. Dva uzly (družstva) spojíme hranou, pokud se jejich časový požadavek “kříží”. Ještě jednou si zobrazíme tabulku s požadavky:

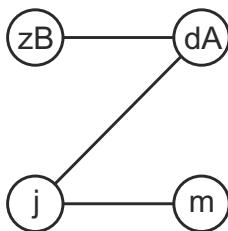
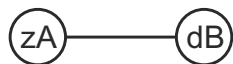
zA	Žáci A	12:00–14:00
zB	Žáci B	14:30–16:30
dA	Dorostenci A	15:30–17:30
dB	Dorostenci B	11:30–13:30
j	Junioři	17:00–19:00
m	Muži	18:00–19:30

Převédeme ji do grafu (viz následující slajd).



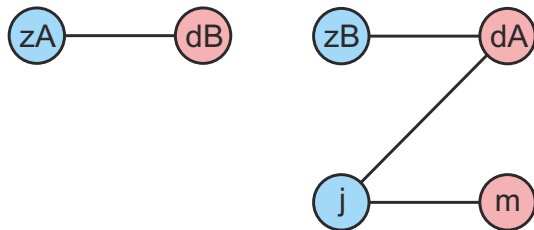
# Tréninkové plochy pro hokejová družstva

zA	Žáci A	12:00–14:00
zB	Žáci B	14:30–16:30
dA	Dorostenci A	15:30–17:30
dB	Dorostenci B	11:30–13:30
j	Junioři	17:00–19:00
m	Muži	18:00–19:30



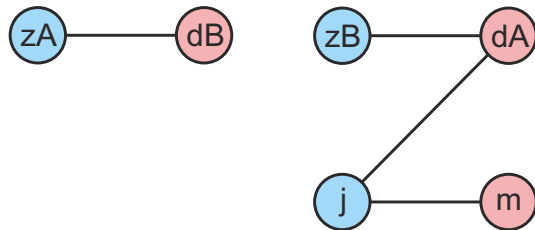
# Tréninkové plochy pro hokejová družstva

Graf můžeme obarvit např. takto:



# Tréninkové plochy pro hokejová družstva

Graf můžeme obarvit např. takto:



Platí  $\chi(G) = 2$ , tedy hokejový klub bude zajišťovat dvě ledové plochy.

- Kolik barev stačí na obarvení států zobrazených na mapě či glóbusu?
- Poprvé si tuto otázku položil Francis Guthrie (1831–1899) a oslovil s ní učitele svého bratra, Augusta de Morgana (1806–1871) na University College v Londýně.
- A. de Morgan poslal 23. října 1852 dopis W. R. Hamiltonovi a začal sdílet problém i s ostatními.
- Alfred Bray Kempe (1849–1922), londýnský advokát, zveřejnil 17. července 1879 důkaz a byl nadšeně oslavován.
- V r. 1890 upozornil Percy John Heawood (1861–1955) na chybu v důkazu Kempeho, který ji poté sám přiznal.
- Řada dalších významných matematiků problém zkoumala ve 20. století.

**Věta 3.1 – Problém čtyř barev (MILKOVÁ):** Pro libovolný graf  $G = (V, E)$  platí:

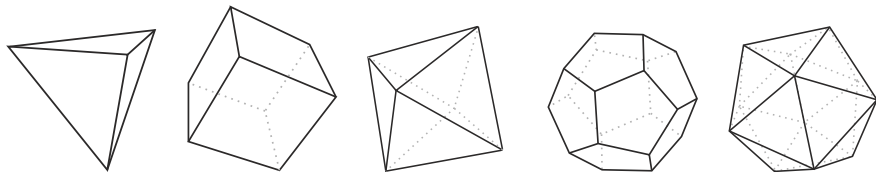
*Jestliže je graf  $G$  rovinný, pak barevnost grafu  $G$  je menší nebo rovna 4.*

Až v 70. letech 20. století vyřešili problém čtyř barev Američané Kenneth Appel a Wolfgang Haken. Provedli jej s pomocí počítačů IBM. Přípravě programu a ověření dat věnovali 4 roky svého života, počítače pracovaly 1200 hodin strojového času. Potvrdili tak velmi důležitou větu teorie grafů.

Podrobnosti k Problému čtyř barev včetně popisu metod, jak se matematici snažili větu dokázat, lze nalézt v [ŠIŠMA].

# Historie Platónových těles

- Již staří Řekové znali pět pravidelných mnohostěnů (čtyřstěn, šestistěn, osmistěn, dvanáctistěn, dvacetistěn), nazývají se podle řeckého filozofa Platóna (427–347 př. n. l.).
- Eukleidés (též Euklides či Euklid, 325–260 př. n. l.) Platónova tělesa matematicky popsal a podal návod, jak je zkonstruovat. Tvrdil, že jiný pravidelný mnohostěn neexistuje.
- **Platónovo těleso** – *pravidelný konvexní mnohostěn (polyedr) v 3D, tj. z každého vrcholu vychází stejný počet hran a všechny stěny tvoří shodné pravidelné mnohoúhelníky.* (citujeme z Wikipedie)



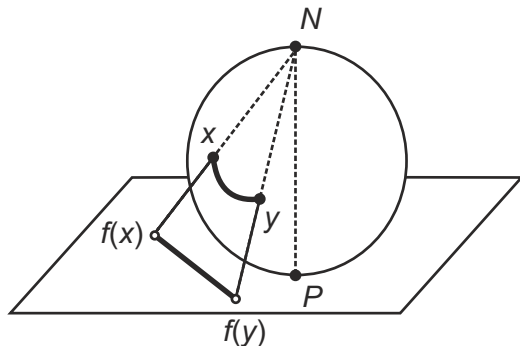
**Definice** (FUCHS, str. 145): Omezená množina  $T \subseteq \mathbb{E}_3$  se nazývá **hvězdovitá**, když existuje bod  $s \in T$  takový, že každá polopřímka s počátečním bodem  $s$  má s hranicí množiny  $T$  právě jeden společný bod.

## Poznámka:

- Většina známých těles (koule, hranol, válec, atd.) jsou hvězdovité množiny. Též pravidelné konvexní mnohostěny jsou hvězdovité.
- Hranici hvězdovité množiny lze zobrazit spojitou bijekcí na sféru (kulovou plochu).

# Stereografická projekce

Stereografická projekce – zobrazení sféry s vyjmutým jedním bodem na rovinu.



Každý bod  $x$  sféry  $S$  (s výjimkou  $N$ ) zobrazíme na rovinu pomocí polopřímky vedené z bodu  $N$  přes  $x$  na rovinu  $\mathbb{E}_2$ . Toto zobrazení  $f$  je spojitá bijekce.



# Jak dokázat, že více Platónových těles není?

- Libovolnou hvězdovitou množinu zobrazíme na sféru  $\Rightarrow$  vznikne “mapa”.
- Mapu na sféře zobrazíme pomocí stereografické projekce na rovinu  $\mathbb{E}_2$   $\Rightarrow$  dostaneme mapu v rovině, pro níž platí Eulerova věta  $\Rightarrow$  i pro mapy na sféře platí Eulerova věta.
- Pomocí Eulerovy věty, několika dalších faktů a algebraického počítání ukážeme, že není více než 5 Platónových těles.
- Uvažujme nyní pravidelný mnohostěn  $T$ . Označme
  - 1  $R$  = počet jeho stěn,
  - 2  $M$  = počet jeho hran,
  - 3  $N$  = počet jeho vrcholů,
  - 4  $n$  = počet stran jedné stěny,
  - 5  $p$  = počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu.
- Řetězec  $[n, p]$  se nazývá *Schläfliův symbol* pravidelného mnohostěnu, např.  $[4, 3]$  označuje krychli.

# Co budeme k důkazu potřebovat?

- Máme pravidelný mnohostěn  $T = [n, p]$ , pro něhož platí toto označení:  $R$  = počet jeho stěn,  $M$  = počet hran,  $N$  = počet vrcholů,  $n$  = počet stran jedné stěny,  $p$  = počet hran sbíhajících se v jednom vrcholu.
- Každá hrana spojuje dva vrcholy a v každém vrcholu se sbíhá  $p$  hran, platí tedy

$$(*) \quad Np = 2M$$

- Každá stěna je omezena  $n$  hranami a každá hrana sousedí se dvěma stěnami, platí tedy

$$(**) \quad Rn = 2M$$

- Platí Eulerova věta:

$$(***) \quad R + N - M = 2$$

Máme tedy tři rovnice o proměnných  $M, N, R$  a parametrech  $n, p$ :

$$Np = 2M$$

$$Rn = 2M$$

$$R + N - M = 2$$

Máme tedy tři rovnice o proměnných  $M, N, R$  a parametrech  $n, p$ :

$$Np = 2M$$

$$Rn = 2M$$

$$R + N - M = 2$$

Úpravou dostaneme následující vyjádření proměnných:

$$M = \frac{2np}{2p + 2n - np}$$

$$N = \frac{4n}{2p + 2n - np}$$

$$R = \frac{4p}{2p + 2n - np}$$

Úpravou dostaneme následující vyjádření proměnných:

$$M = \frac{2np}{2p + 2n - np}$$

$$N = \frac{4n}{2p + 2n - np}$$

$$R = \frac{4p}{2p + 2n - np}$$

Protože všechny proměnné jsou kladné a  $n \geq 3, p \geq 3$ , musí být jmenovatel zlomků  $2p + 2n - np > 0$ . Další úpravou dostaneme:

$$2p + 2n - np > 0$$

$$np - 2p - 2n < 0$$

$$(n - 2)(p - 2) < 4$$

Protože všechny proměnné jsou kladné a  $n \geq 3, p \geq 3$ , musí být jmenovatel zlomků  $2p + 2n - np > 0$ . Další úpravou dostaneme:

$$\begin{aligned}2p + 2n - np &> 0 \\np - 2p - 2n &< 0 \\(n - 2)(p - 2) &< 4\end{aligned}$$

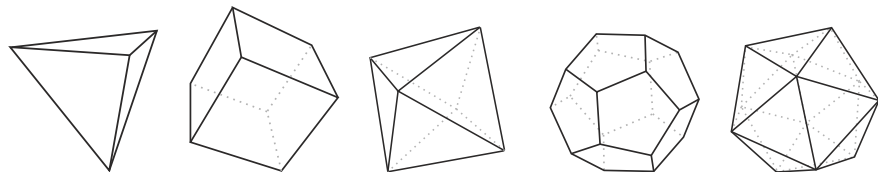
Protože  $n \geq 3 \wedge p \geq 3 \wedge (n - 2)(p - 2) < 4$ , musí  $n, p \in \{3, 4, 5\}$  a máme těchto pět možných případů:

- 1  $(n - 2)(p - 2) = 1 \Rightarrow n = 3, p = 3$  ... čtyřstěn  $[3, 3]$
- 2  $(n - 2)(p - 2) = 2 \Rightarrow (n = 4, p = 3) \vee (n = 3, p = 4)$  ... krychle  $[4, 3]$  nebo osmistěn  $[3, 4]$
- 3  $(n - 2)(p - 2) = 3 \Rightarrow (n = 5, p = 3) \vee (n = 3, p = 5)$  ... dvanáctistěn  $[5, 3]$  nebo dvacetistěn  $[3, 5]$

# Závěrečný přehled

	$R$	$M$	$N$	$n$	$p$
Čtyřstěn	4	6	4	3	3
Krychle	6	12	8	4	3
Osmistěn	8	12	6	3	4
Dvanáctistěn	12	30	20	5	3
Dvacetistěn	20	30	12	3	5

*Legenda:* Počet stěn ( $R$ ), počet hran ( $M$ ), počet vrcholů ( $N$ ), počet stran jedné stěny ( $n$ ), počet hran u vrcholu ( $p$ )



## Příklad 2

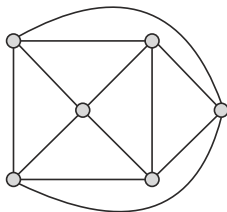
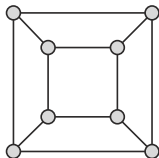
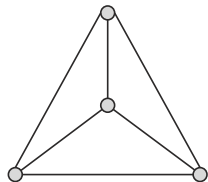
Nakreslete rovinnou reprezentaci pravidelného čtyřstěnu, krychle a osmistěnu. Poté ve všech rovinných grafech najděte hamiltonovskou kružnici.



## Příklad 2

Nakreslete rovinnou reprezentaci pravidelného čtyřstěnu, krychle a osmistěnu. Poté ve všech rovinných grafech najděte hamiltonovskou kružnici.

**Řešení:**



Hamiltonovskou kružnici není těžké nakreslit ani u jednoho z grafů...

- 1 MILKOVÁ, Eva. *Teorie grafů a grafové algoritmy*. 1. vyd. Hradec Králové: Nakladatelství Gaudeamus, 2013. 123 s. ISBN 978-80-7435-267-6.
- 2 FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 178 s. ISBN 80-210-2703-7.
- 3 ŠIŠMA, Pavel. *Teorie grafů 1736–1963*. 1. vyd. Praha: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity v Brně, 1997. ISBN 80-7196-065-9.