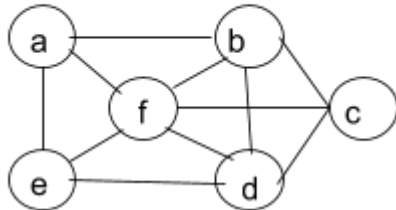


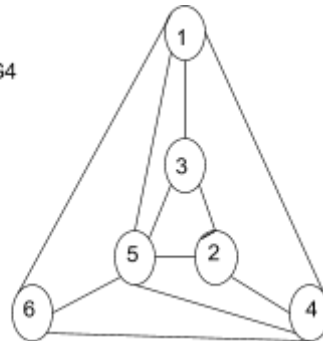
Zadání úkolu:

Rozhodněte, zda následující dvojice grafů jsou nebo nejsou izomorfní grafy. (Rada: Využijte skutečnosti, že v grafech existují vrcholy různých stupňů.)

Graf G3



Graf G4



Teorie potřebná k řešení příkladu:

Definice 1.13 (MILKOVÁ): Graf $G = (V, E)$ je izomorfní s grafem $G' = (V', E')$, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f: V \rightarrow V'$ takové, že platí $\{v, w\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} \in E'$.

Dva izomorfní grafy mají naprosto stejné vlastnosti, tedy zejména

- mají stejný počet vrcholů i hran,
- mají stejné skóre,
- mají stejný počet kružnic dané délky,
- mají stejné doplňky,
- mají stejné podgrafy indukované množinami vrcholů stejného stupně.

Řešení:

Úloha se řeší tak, že ověřujeme vlastnosti uvedené v teorii (počet vrcholů a hran, skóre atd.) a zároveň určujeme zobrazení vrcholů z jednoho grafu na vrcholy v druhém grafu.

1. Stejný počet vrcholů i hran

Graf G₃

6 vrcholů

10 hran

Graf G₄

6 vrcholů

10 hran

Počet hran i vrcholů je stejný, takže vlastnost č. 1 platí.

2. Stejné skóre (řazené vzestupně)

Graf G₃

(3, 3, 3, 4, 4, 5)

Graf G₄

(3, 3, 3, 4, 4, 5)

Skóre grafů je stejné, takže vlastnost č. 2 platí.

U této vlastnosti vidíme, že v obou grafech se nachází jeden vrchol stupně 5 a z toho vyplývá, že tyto vrcholy se zobrazí na sebe, tj. $f \rightarrow 5$ (vrchol f z grafu G_3 se zobrazí na vrchol 5 z grafu G_4 .)

3. Stejný počet kružnic dané délky

Začneme s kružnicemi o délce 3.

<u>Graf G_3</u>	<u>Graf G_4</u>
(a, e, f, a)	(5, 3, 2, 5)
(f, a, b, f)	(5, 1, 3, 5)
(f, b, c, f)	(3, 6, 1, 3)
(c, d, f, c)	(5, 2, 4, 5)
(f, e, d, f)	(6, 4, 5, 6)
(b, d, f, b)	(4, 5, 1, 6)
(b, c, d, b)	(4, 6, 1, 4)

Počet kružnic o délce 3 je u obou grafů je shodný, stejně tak i u kružnic o délce 4 a 5. Vidíme, že kružnice (a, e, f, a) grafu G_3 odpovídá kružnici (5, 3, 2, 5) grafu G_4 a jsme schopni zobrazit další vrchol - vrchol c odpovídá vrcholu 6.

Z těchto kružnic (a, e, f, a) a (5, 3, 2, 5) vidíme, že vrchol a se může zobrazit buď na vrchol 3 nebo vrchol 2. Z toho vyplývá, že existují dvě řešení izomorfismu.

První řešení:

6 \rightarrow c
5 \rightarrow f
2 \rightarrow a
3 \rightarrow e
1 \rightarrow d
4 \rightarrow b

Druhé řešení:

6 \rightarrow c
5 \rightarrow f
2 \rightarrow e
3 \rightarrow a
1 \rightarrow b
4 \rightarrow d

Závěr: Grafy G_3 a G_4 jsou izomorfní.