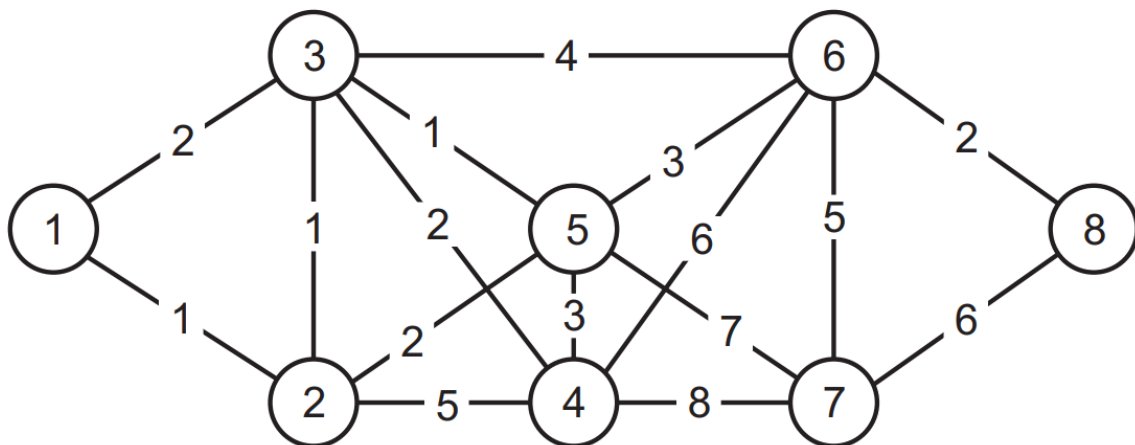


Zadání příkladu:

Úkol k samostatnému řešení: Taha – Problem 6-7

Na následujícím obrázku je znázorněna vzdálenost (v mílích) mezi osmi různými městy. Najděte nejkratší cestu mezi městem 1 a 8. Použijte Dijkstrův algoritmus.

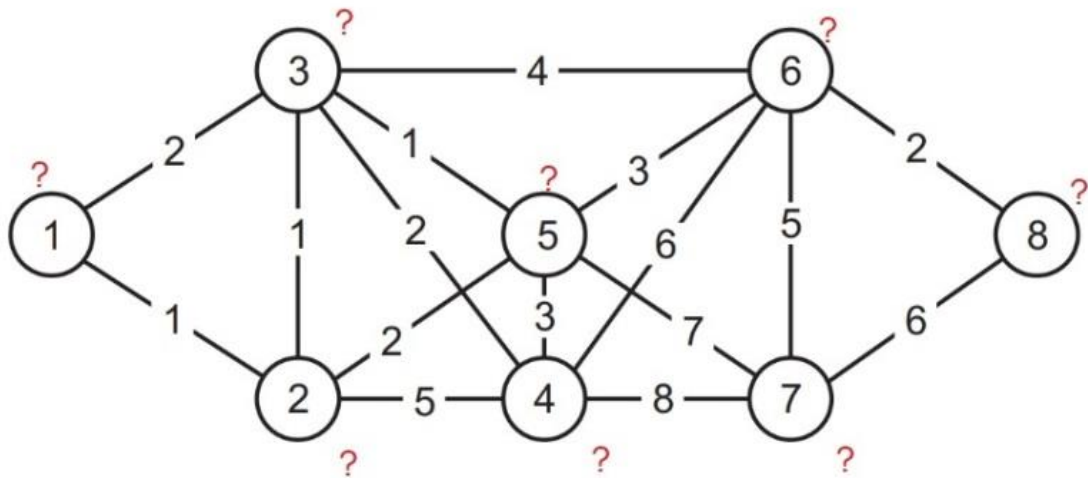


Dijkstrův algoritmus

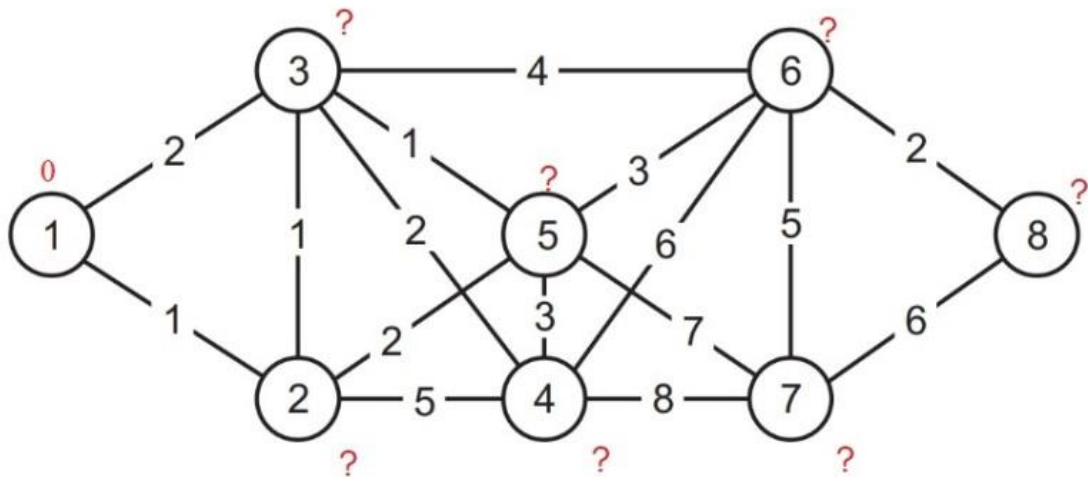
- Je algoritmus pro nalezení nejkratší cesty.
- Funguje u hranově (kladně) ohodnoceného grafu.
- Algoritmus uchovává seznam vrcholů v prioritní frontě a bere si z ní prvek vždy s nejvyšší prioritou. (nejmenší cenou cesty)
- Vrcholy jsou do fronty přidány v případě, že je nalezený vrchol ještě neuzavřený a není již obsazen v prioritní frontě.
- Po zpracování vrcholu je vrchol prohlášen za uzavřený.
- Vzdálenost do jednotlivých vrcholů je počítaná od počátečního. (Ten má vzdálenost 0.)
- Vzdálenost mezi vrcholy grafu se počítá jako součet (od aktuálního vrcholu do počátku) a cenou hrany k zpracovávanému vrcholu.

POSTUP ŘEŠENÍ

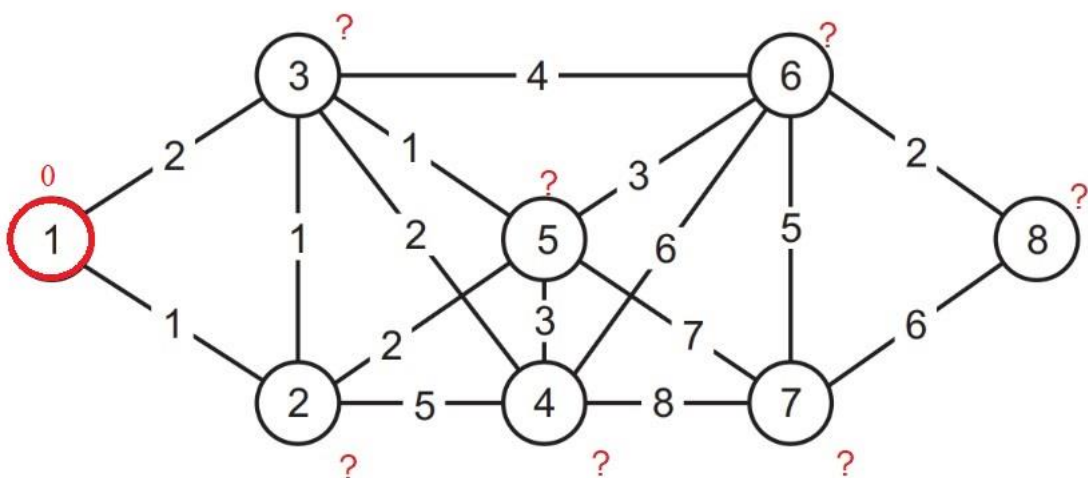
1) Na začátku máme u každého vrcholu neznámou vzdálenost.



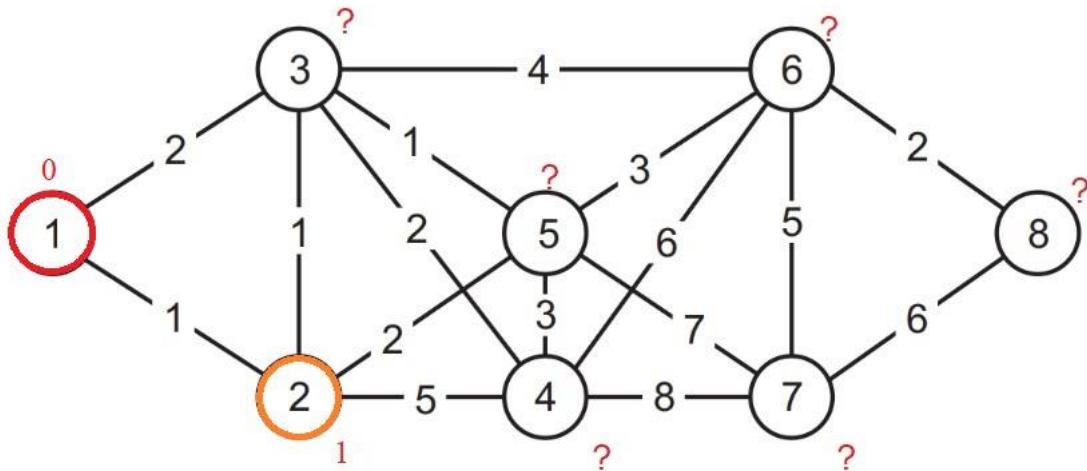
2) Při náš startovní vrchol si nastavíme vzdálenost 0.



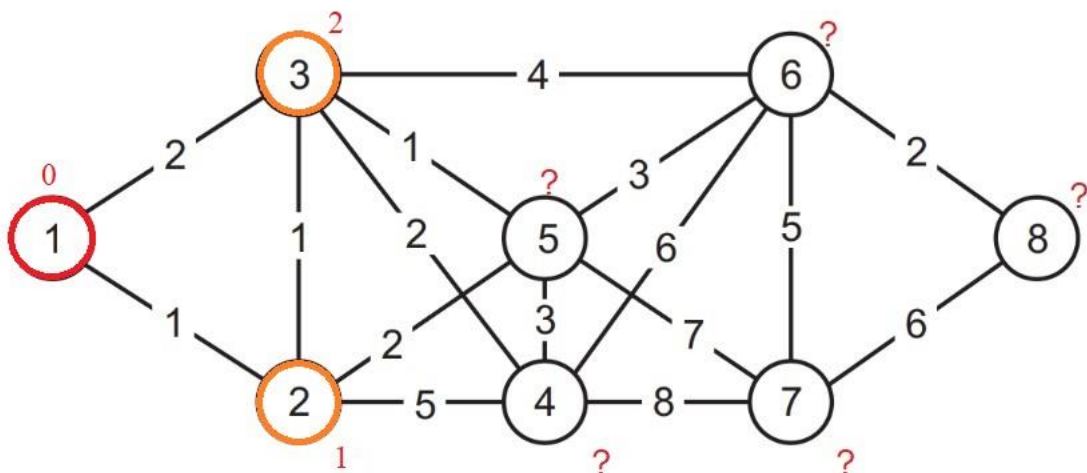
3) Označíme si vrchol 1. Vrchol s nejmenší vzdáleností, který budeme zkoumat, je vrchol 1. Podíváme se na vrcholy, se kterými je spojen, a zkontrolujeme cesty.



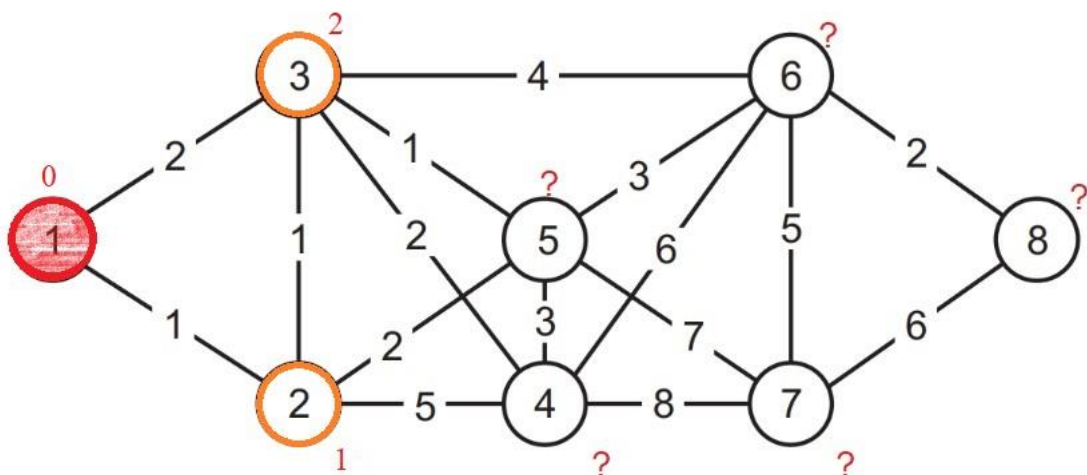
4) Vrchol 1 je spojený s vrcholem 2. Vrchol 2 není uzavřen, tak se na něj podíváme (označíme). Víme že vzdálenost mezi 1 a 2 je (1). Našli jsme tak zatím nejkratší cestu, kterou napíšeme k vrcholu 2 a jdeme na další cestu.



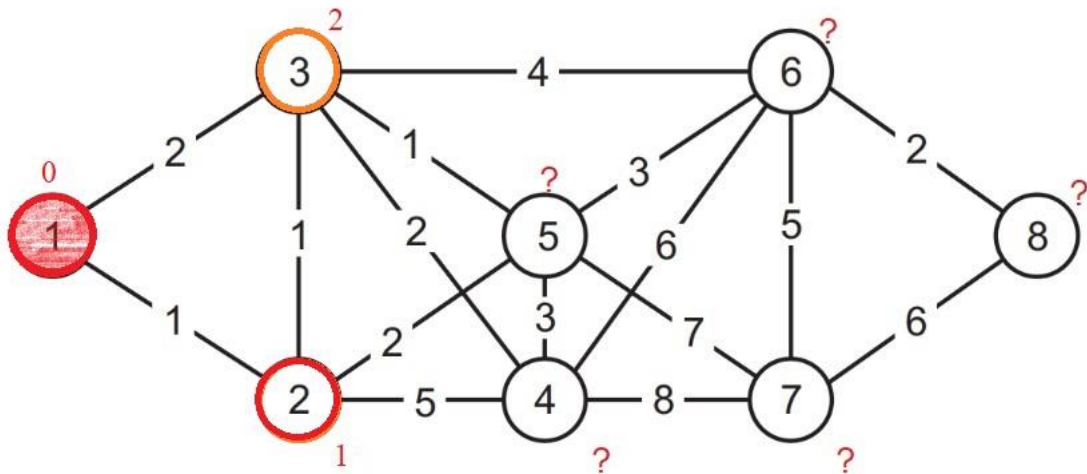
5) Vrchol 1 je spojen s vrcholem 3, který není uzavřený. Označíme si ho. Vzdálenost mezi vrcholy 1 a 3 je (2). Zatím jsme našli nejkratší vzdálenost do vrcholu 3, tak ji napíšeme k vrcholu.



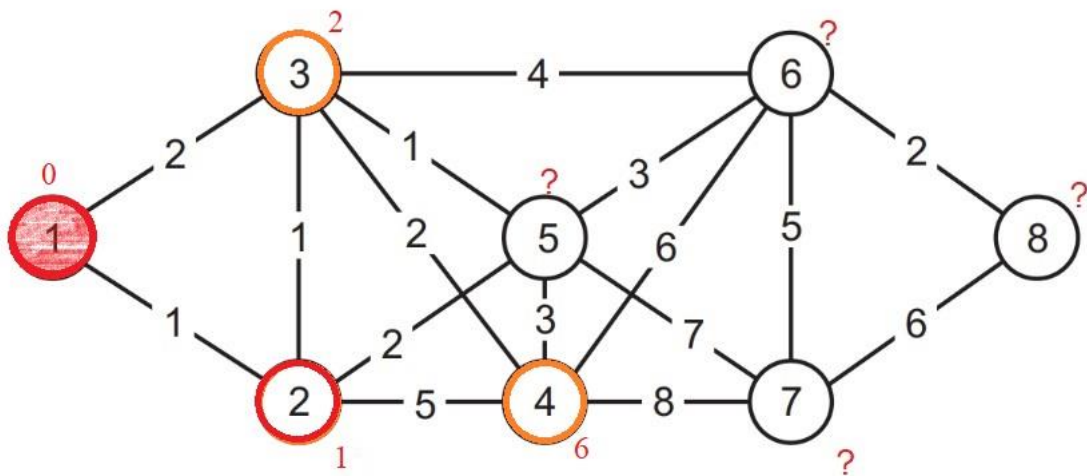
6) Vrchol 1 už nemá další sousední vrchol. Nyní vrchol uzavřeme a přesuneme se na další.



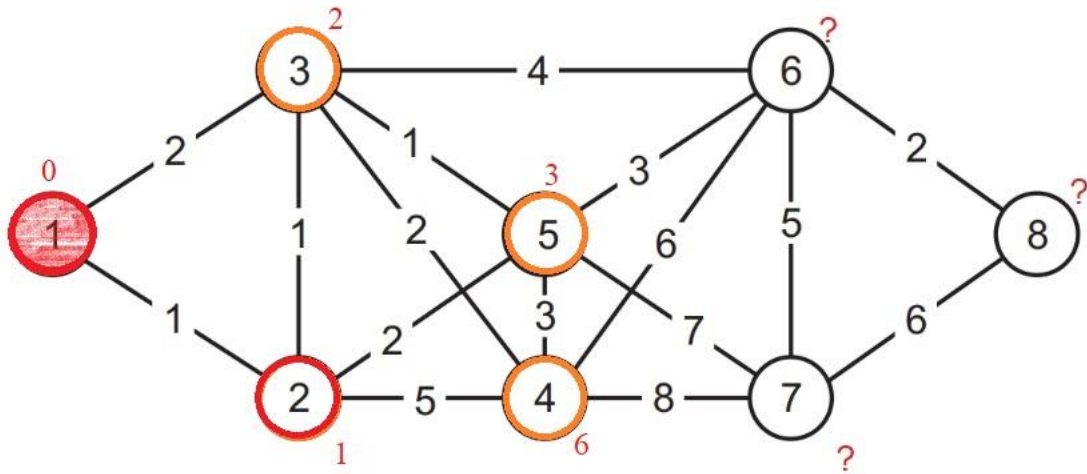
7) Vrchol s nejmenší vzdáleností je vrchol číslo 2, který si označíme. Podíváme se na jeho sousedy. Vrchol 2 je spojený s vrcholem 3, který je již uzavřený, tak se podíváme na další. Vrchol 2 je spojen s vrcholem 3, který uzavřený není, tak se na něj podíváme. Vidíme, že vzdálenost mezi vrcholy 2 a 3 je $(1 + 1 = 2)$. Aktuální známá vzdálenost do vrcholu 3 je (2), kratší cesta sem nevede. Ponecháme (2) a jdeme hledat dál.



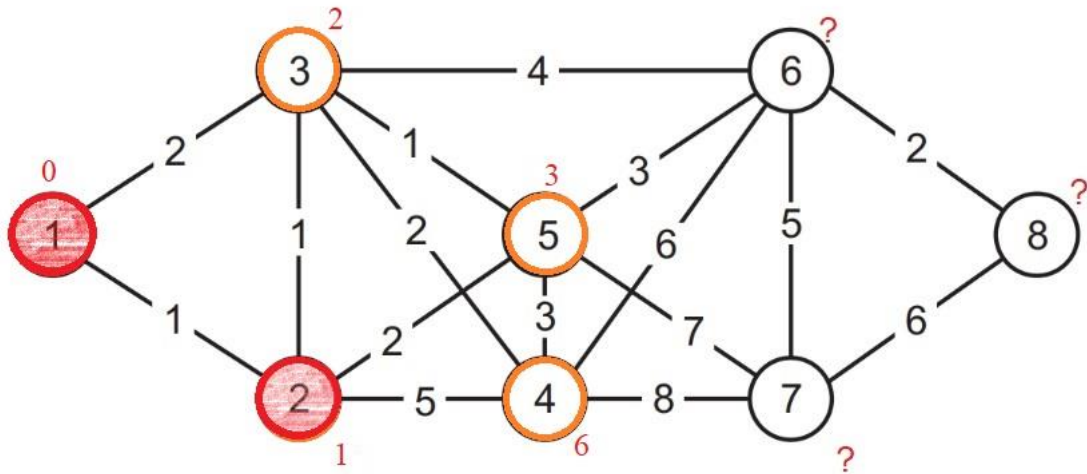
8) Vrchol 2 je spojený s vrcholem 4, který není uzavřený, tak se na něj podíváme. Vrchol 4 je nový, tak si ho označíme. Víme, že vzdálenost mezi vrcholy 2 a 4 je $(1+5=6)$. Je to zatím nejkratší cesta, kterou si tedy připišeme k vrcholu 4 a jdeme na další vrchol.



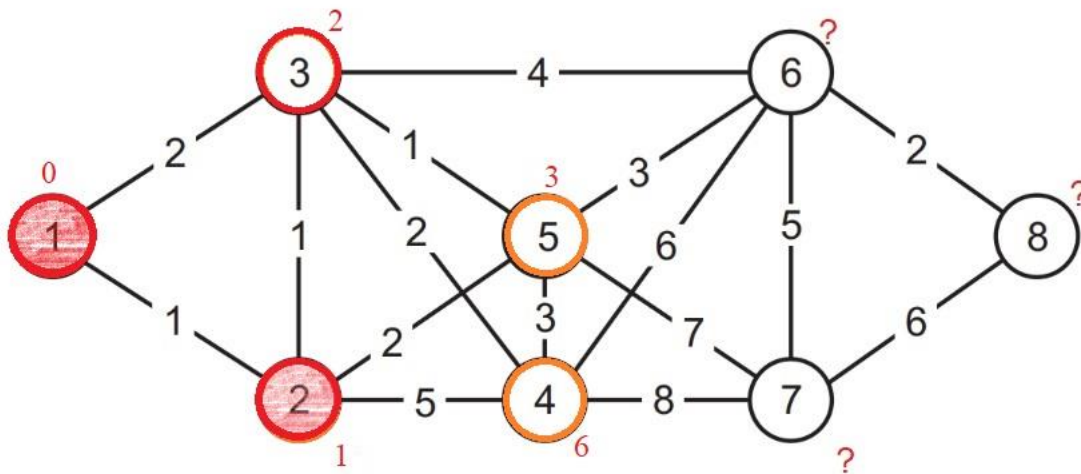
9) Vrchol 2 je spojený s vrcholem 5, který také není uzavřený, a tak se na něj podíváme a označíme si ho. Víme, že vzdálenost mezi vrcholy 2 a 5 je $(1+2=3)$. Je to zatím nejkratší cesta, tak ji zapíšeme k vrcholu 5.



10) Aktuální prohledávaný vrchol 2 již nemá víc sousedních vrcholů, takže ho uzavřeme a jdeme na další.



11) Vezmeme si vrchol s nejkratší cestou od počátečního vrcholu, kterým je pro nás vrchol 3, který si označíme a prozkoumáme jeho cesty. Podíváme se na jaké vrcholy je napojen a cesty zkontrolujeme.



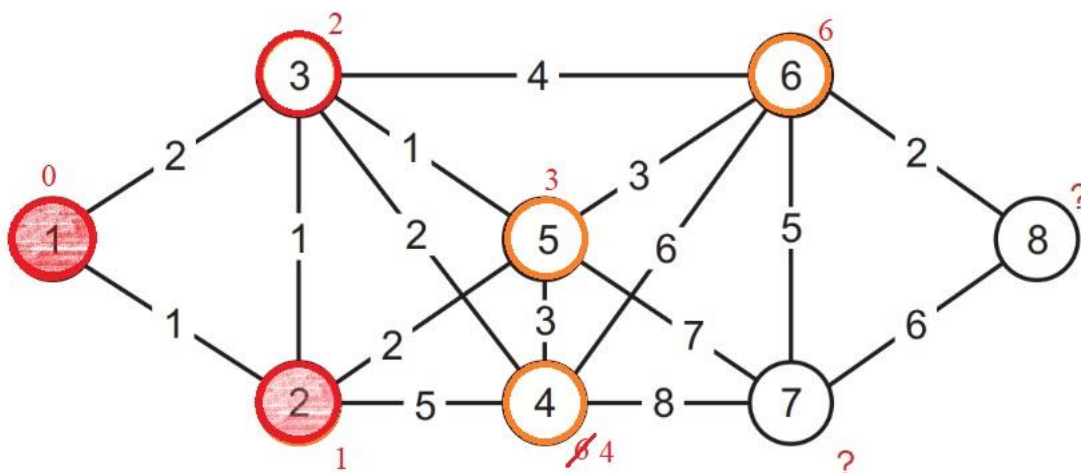
12) Vrchol 3 je spojen s vrcholem 1, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

Vrchol 3 je spojen s vrcholem 2, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

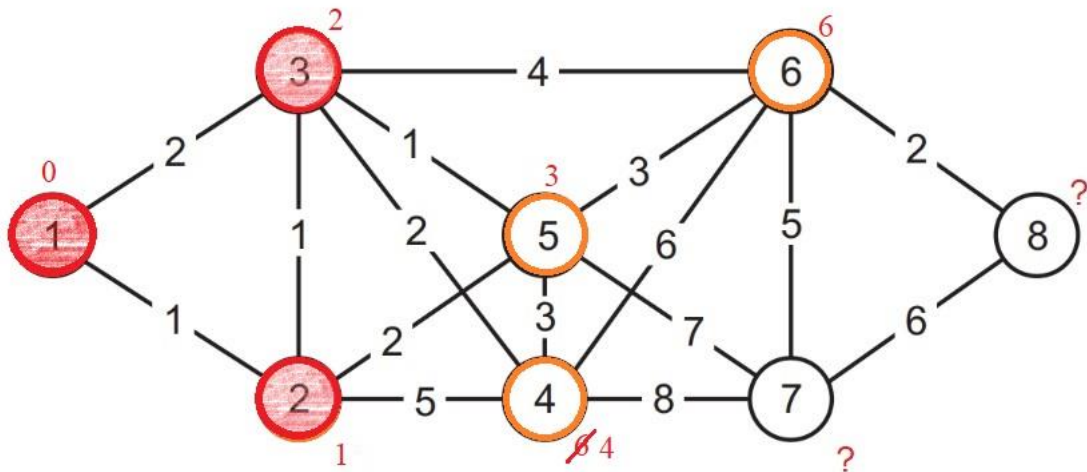
Vrchol 3 je spojen s vrcholem 5, ten ještě není uzavřen tak se na něj podíváme. Vidíme, že naše vzdálenost mezi vrcholy 3 a 5 je $(2 + 1 = 3)$. Naše aktuální známá vzdálenost je také (3). Takže ponecháme (3) jako nejkratší.

Vrchol 3 je spojen s vrcholem 6, který není uzavřen, tak se na něj podíváme. Vrchol 6 je nový, takže si ho označíme. Víme, že vzdálenost mezi 2 a 6 je $(2 + 4 = 6)$. Zatím je to nejkratší cesta, tak ji přepíšeme k vrcholu 6.

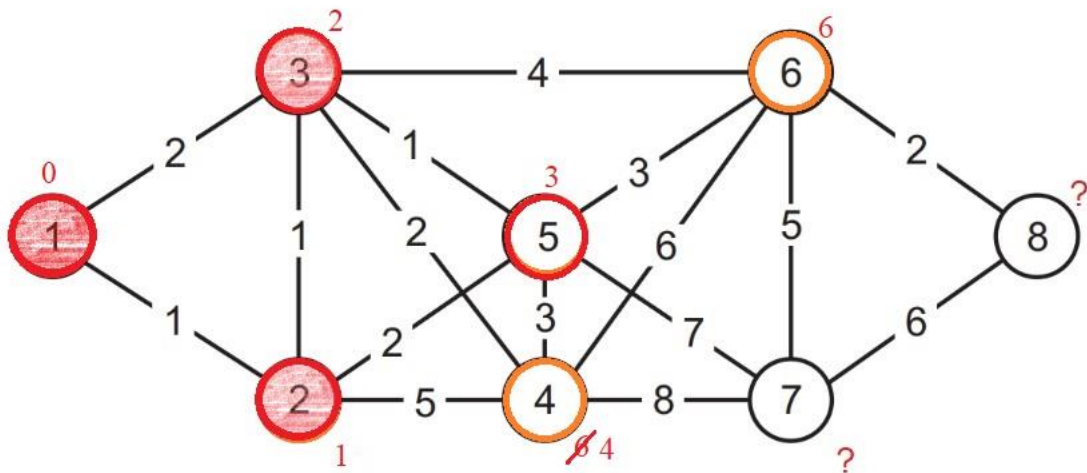
Vrchol 3 je spojen s vrcholem 4, který není uzavřený, tak se na něj podíváme. Víme, že vzdálenost mezi 2 a 4 je $(2 + 2 = 4)$. Naše aktuální známá vzdálenost, kterou jsme měli určenou je (6). Takže přepíšeme na (4) jako nejkratší.



13) Vrchol 3 již nemá další sousedy, takže ho uzavřeme a jdeme na další vrchol.



14) Vezmeme si vrchol s nejkratší cestou od počátečního vrcholu. V tomto případě je to vrchol 5, který si označíme. Dále se podíváme na jeho sousední vrcholy a cesty zkontrolujeme.



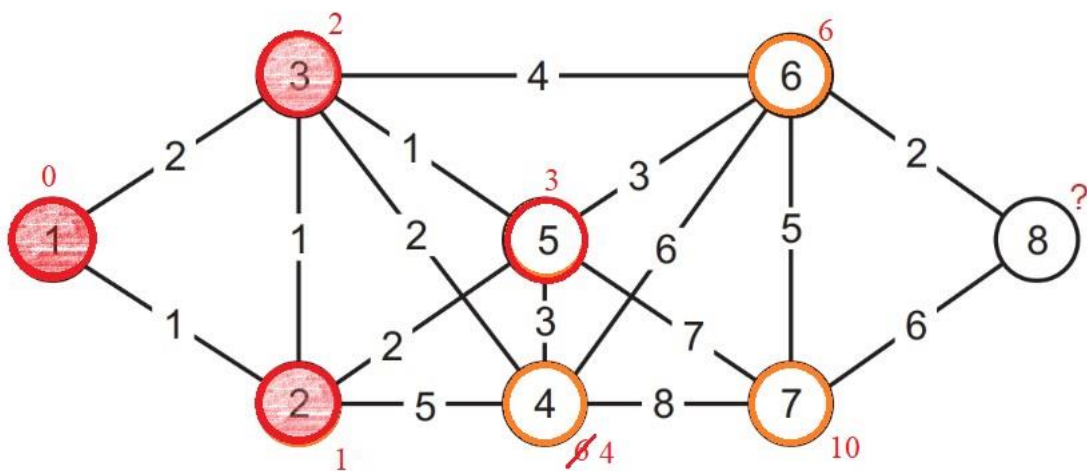
15) Vrchol 5 je spojen s vrcholem 3, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

Vrchol 5 je spojen s vrcholem 2, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

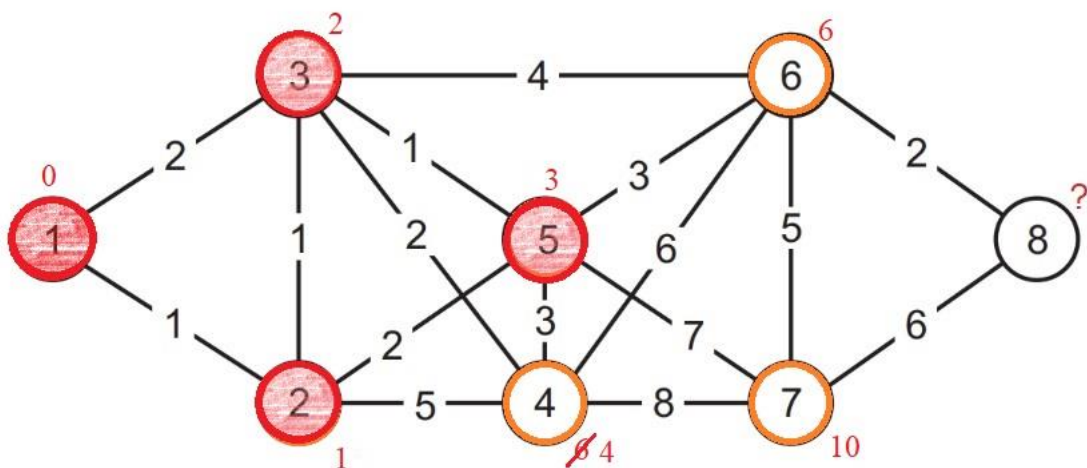
Vrchol 5 je spojený s vrcholem 6, který není ještě uzavřený, tak se na něj podíváme. Vidíme, že naše vzdálenost mezi vrcholy 5 a 6 je $(3 + 3 = 6)$. Naše aktuální vzdálenost, kterou máme již určenou je též (6). Takže ponecháme (6) jako nejkratší.

Vrchol 5 je spojený s vrcholem 4, který není uzavřený, tak se na něj podíváme. Vidíme, že naše vzdálenost mezi vrcholy 5 a 4 je $(3 + 3 = 6)$. Naše aktuální vzdálenost, kterou jsme již určili je 4. Takže ponecháme nejkratší vzdálenost, která je určena a to je 4.

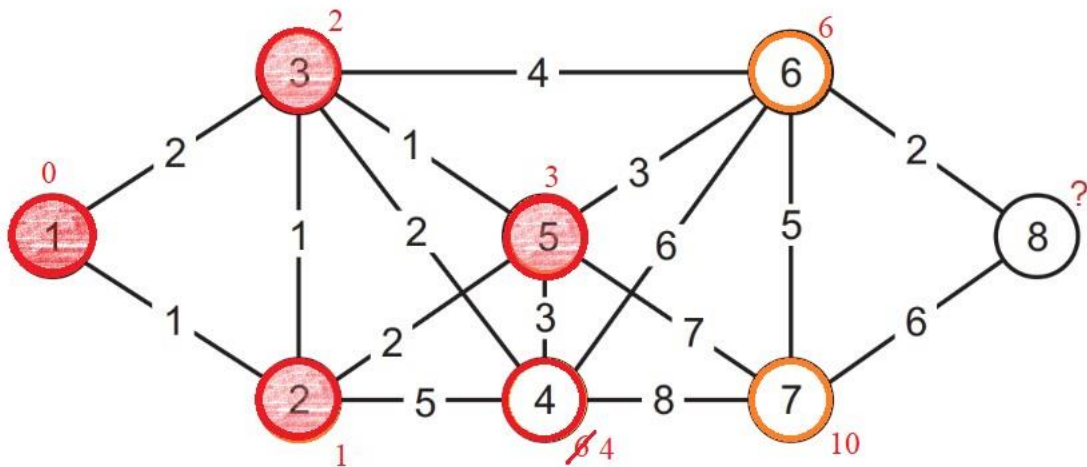
Vrchol 5 je spojený s vrcholem 7, který není uzavřený, tak se na něj podíváme. Vidíme, že vzdálenost mezi vrcholy 5 a 7 je $(3+7=10)$. Zatím je to nejkratší cesta, tak ji zapíšeme k vrcholu 7.



16) Aktuálně prohledaný vrchol 5 už nemá další sousedy, takže ho uzavřeme a jdeme na další.



17) Vezmeme vrchol s nejkratší cestou od počátečního vrcholu a to je vrchol 4, který si označíme a prohledáme jeho cesty. Podíváme se, na jaké vrcholy je napojený a cesty zkontrolujeme.



18) Vrchol 4 je spojen s vrcholem 2, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

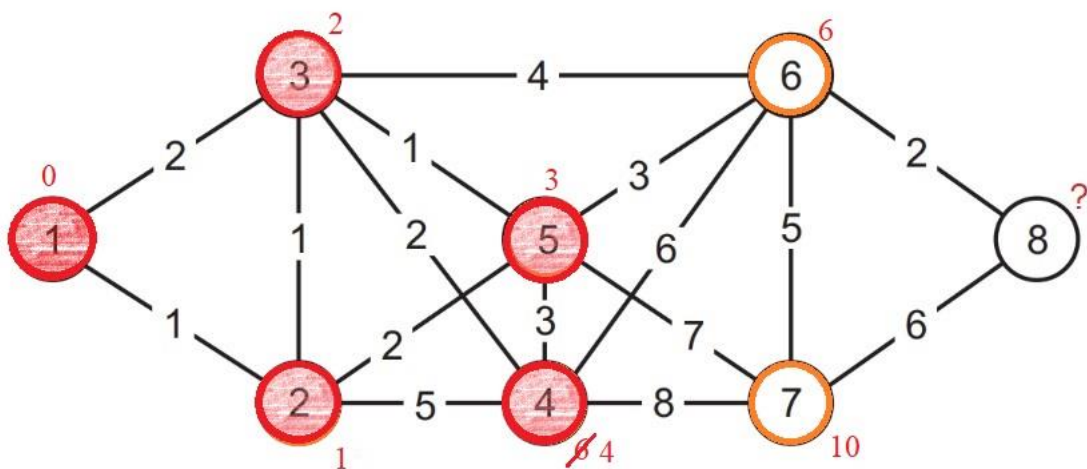
Vrchol 4 je spojen s vrcholem 5, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

Vrchol 4 je spojen s vrcholem 3, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

Vrchol 4 je spojen s vrcholem 7, který ještě není uzavřený, tak se na něj podíváme. Vidíme, že naše vzdálenost mezi vrcholy 4 a 7 je $(4 + 8 = 12)$. Naše aktuální známá vzdálenost, kterou máme již určenou je (10). Takže necháme u vrcholu 7 vzdálenost (10), neboť je kratší.

Vrchol 4 je také spojen s vrcholem 6, který není uzavřený tak se na něj podíváme. Vidíme, že naše vzdálenost mezi vrcholy 4 a 6 je $(4 + 6 = 10)$. Naše aktuální známá vzdálenost, kterou máme již určenou je (6). Takže ponecháme (6) jako nejkratší.

Aktuálně prohledávaný vrchol 4 již nemá další sousedy, tak ho uzavřeme a jdeme na další vrchol.



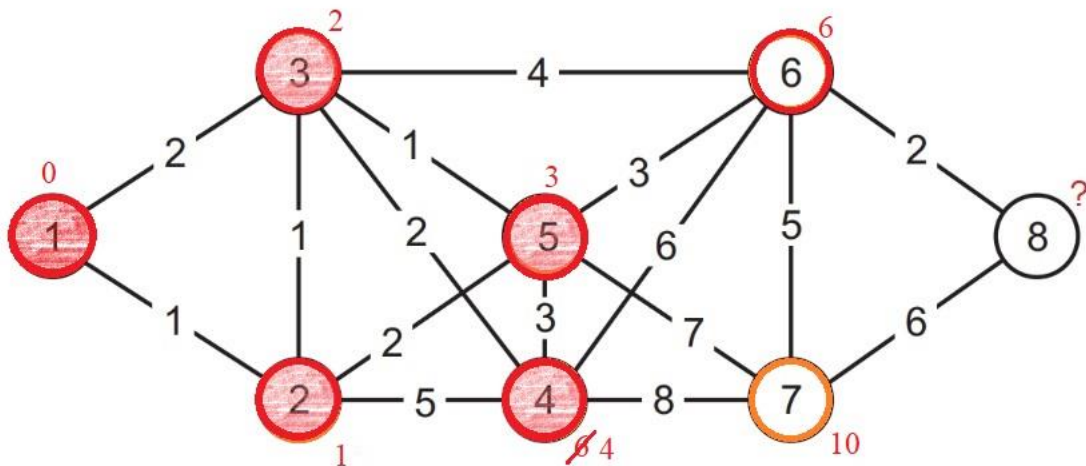
19) Vezmeme vrchol s nejkratší cestou od počátečního vrcholu a to je vrchol 6, který si označíme a prohledáme jeho cesty. Podíváme se, na jaké vrcholy je napojený a cesty zkontrolujeme.

Vrchol 6 je spojen s vrcholem 3, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

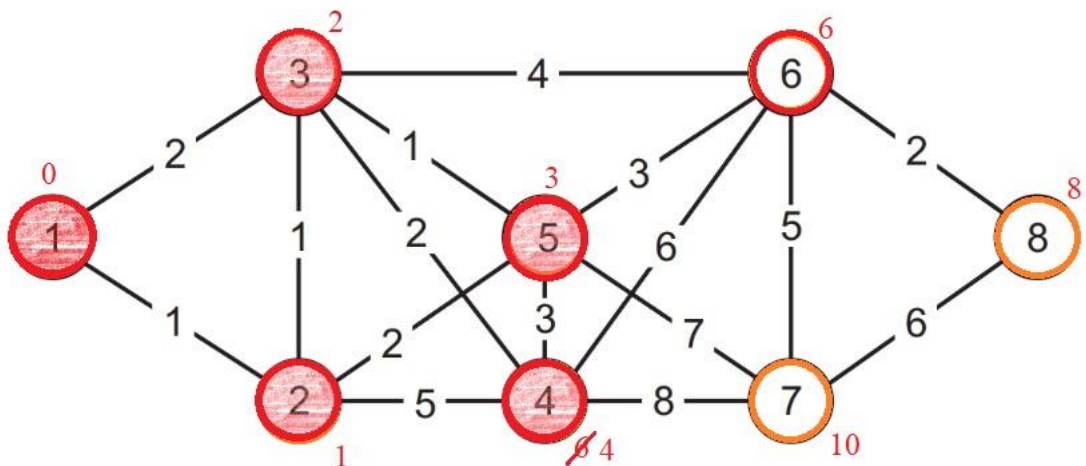
Vrchol 6 je spojen s vrcholem 5, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

Vrchol 6 je spojen s vrcholem 4, ale ten je již uzavřen tak jdeme na další.

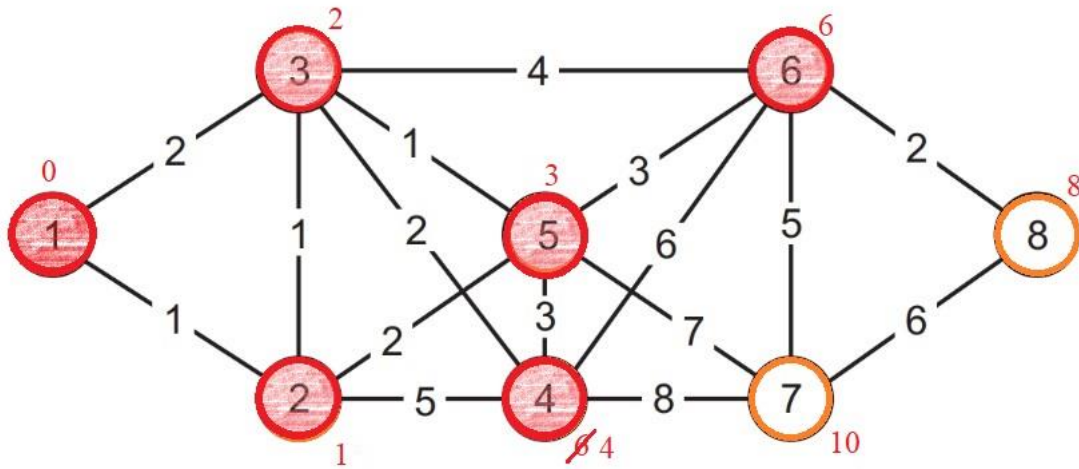
Vrchol 6 je spojen s vrcholem 7, ten ještě není uzavřen tak se na něj podíváme. Vidíme, že naše vzdálenost mezi vrcholy 6 a 7 je $(6 + 5 = 11)$. Naše aktuální známá vzdálenost je (10) . Takže ponecháme (10) jako nejkratší.



20) Vrchol 6 je spojen s vrcholem 8, který není uzavřen, tak se na něj podíváme. Vrchol 8 je nový tak si ho označíme. Víme, že vzdálenost mezi 6 a 8 je $(6 + 2 = 8)$. Zatím je to nejkratší cesta, tak ji připsáme k vrcholu 8.



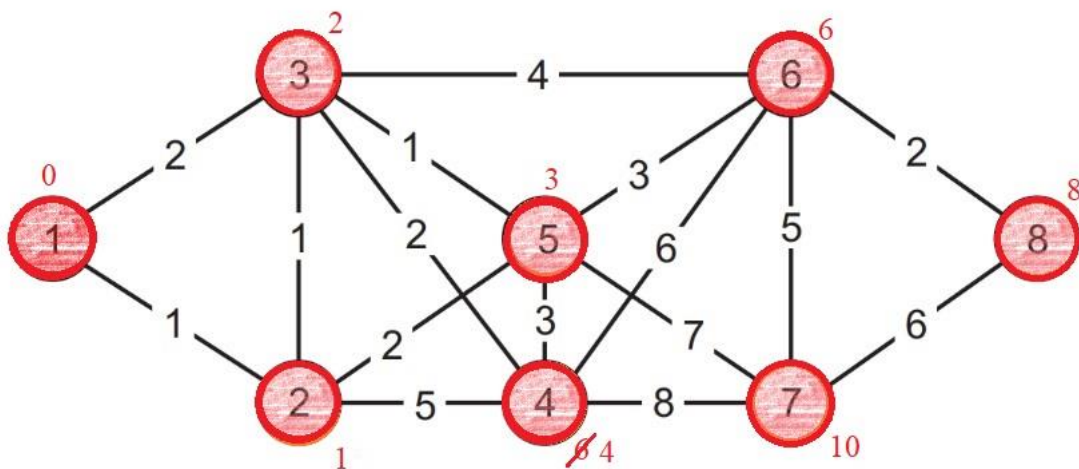
21) Aktuálně prohledaný vrchol 6 již nemá žádné sousedy, tudíž daný vrchol uzavřeme a jdeme na další vrchol.



22) Vezmeme vrchol s nejkratší cestou od počátečního vrcholu. Je to vrchol číslo 8. Tento vrchol označíme.

Cílem bylo dostat se do vrcholu 8. Můžeme prohlásit, že nejkratší cesta z vrcholu 1 do vrcholu 8 je (8).

Můžeme uzavřít všechny vrcholy.



ZÁVĚR

Nejkratších cest se vzdáleností (8) existuje více. Musíme si pamatovat cesty a vzdálenosti.

Nejkratší cesty:

- 1) Přes vrcholy (1,3,6,8)
- 2) Přes vrcholy (1,2,3,6,8)
- 3) Přes vrcholy (1,2,3,5,6,8)
- 4) Přes vrcholy (1,3,5,6,8)
- 5) Přes vrcholy (1,2,5,6,8)