

## Cvičení z diskretní matematika – řešení příkladu

Zadání příkladu:

Situace tří výrobců a tří odběratelů jednoho výrobku je popsána v následující tabulce (viz následující slajd), a to včetně jednotkových cen dopravy.

- 1 Proved'te rozdělení dopravy metodou severozápadního rohu.
- 2 Najděte optimální rozdělení dopravy dostatečným opakováním optimalizačního kroku.

– z ložské zápočtové písemky, zadání pro skupinu A

	$O_1$	$O_2$	$O_3$	
$V_1$	2	3	1	10
$V_2$	3	2	2	12
$V_3$	1	4	4	6
	14	8	6	

1

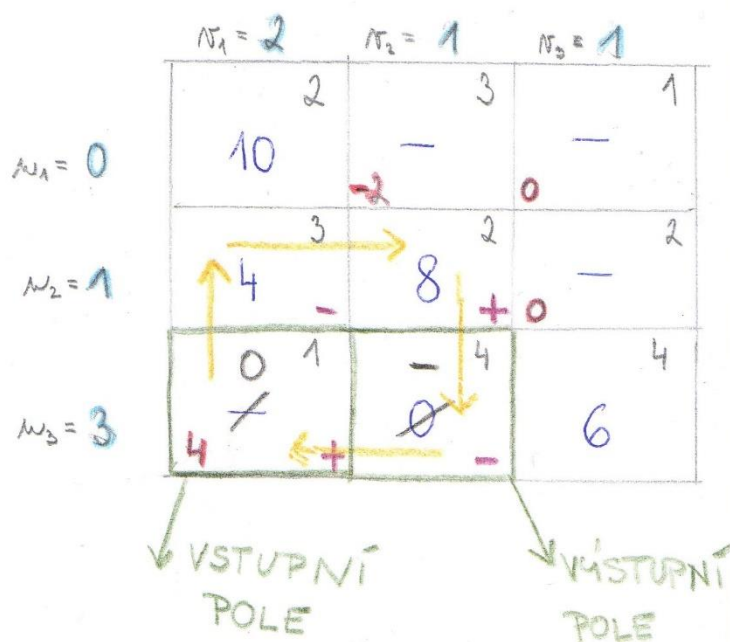
	$O_1$	$O_2$	$O_3$	
$V_1$	10	—	—	10
$V_2$	4	8	—	12
$V_3$	—	0	6	6
	14	8	6	

*(Handwritten solution showing the first step of the Northwest Corner Rule. Blue arrows indicate the path: starting at (V1, O1) with 10 units, then moving down to (V2, O1) with 4 units, then right to (V2, O2) with 8 units, then down to (V3, O2) with 0 units, and finally right to (V3, O3) with 6 units. Dashed lines and dashes indicate the remaining capacity in each cell.)*

- 1) Příklad začneme řešit v poli, které je dáno průsečíky  $V_1$  a  $O_1$ . Snažíme se naplnit požadavek  $O_1$ , tak aby nebyla překročena kapacita  $V_1$ , proto do daného pole doplníme číslo 10. Jelikož jsme vyčerpali kapacitu výrobce  $V_1$ , doplníme na zbylá pole v tomto řádku pomlčky a přesouváme se do dalšího řádku.
- 2) Řešíme pole  $V_2O_1$ , Odběratel  $O_1$  už požaduje pouze 4 kusy, což splňuje kapacitu výrobce  $V_2$ , a proto do tohoto pole můžeme doplnit číslo 4. Jelikož jsme vyčerpali požadavky odběratele  $O_1$ , tak v tomto sloupci na zbylá místa doplníme pomlčku a přesouváme se do vedlejšího sloupce.

- 3) Řešíme pole  $V_2O_2$ , požadavek  $O_2$  je 8, což se shoduje se zbytkem kapacity  $V_2$ , proto do tohoto pole doplníme číslo 8. Protože jsme vyčerpali požadavky odběratele  $O_2$  i kapacitu výrobce  $V_2$ , tak musíme do jednoho z vedlejších nevyřešených polí napsat nulu, abychom prošli celým grafem. Z možných polí ( $V_3O_2$  a  $V_2O_3$ ) jsme zvolili pole  $V_3O_2$ .
- 4) Přesouváme se do posledního nevyřešeného pole, tedy  $V_3O_3$ . Zde zjišťujeme, že požadavky se shodují s kapacitou, a proto do tohoto pole doplníme číslo 6.
- 5) Nakonec stanovíme cenu dopravy:  $10*2 + 4*3 + 8*2 + 4*0 + 6*4 = 72$ .

2



- 1) Zjistíme počet nepomlčkových polí (5) a určíme počet multiplikátorů (6), protože jejich rozdíl je roven 1, můžeme si jeden multiplikátor zvolit ( $u_1 = 0$ ). Díky tomu můžeme vypočítat multiplikátor  $v_1$ , protože víme, že hodnota multiplikátoru  $u_1$  + hodnota multiplikátoru  $v_1$  se musí rovnat ceně v daném poli ( $0 + ? = 2$ ), z toho víme, že multiplikátor  $v_1 = 2$ .
- 2) Přesuneme se na další nepomlčkové pole v tomto sloupci ( $u_2v_1$ ). Podle předchozího algoritmu určíme  $u_2 = 1$ .
- 3) Přesuneme se na další nepomlčkové pole v daném řádku ( $u_2v_2$ ). Podle předchozího algoritmu určíme  $v_2 = 1$ .
- 4) Stejným způsobem dopočítáme  $u_3 = 3$  a  $v_3 = 1$  (značeno modře).
- 5) Následně vypočítáme pomocnou cenu v pomlčkových polích (značena červeně), poté určíme pole s největší pomocnou cenou, jako vstupní pole (označeno zeleně). Pomocnou cenu vypočítáme pomocí vzorce:  $u_n + v_n - \text{cena daného pole} = \text{pomocná cena}$ . Například pro pole  $u_1v_2$  dosadíme do vzorce  $0 + 1 - 3 = -2$ , takto získáme i pomocné ceny pro zbývající pomlčková pole:  $u_1v_3 = 0$ ,  $u_2v_3 = 0$ ,  $u_3v_1 = 4$ . Nejvyšší pomocná cena je v poli  $u_3v_1$ , a proto toto pole označíme za vstupní.
- 6) Hledáme uzavřený okruh, který začíná i končí ve vstupním poli, přičemž směr můžeme měnit pouze v nepomlčkovém poli (vyznačeno žlutě). Máme dvě možnosti, ale rozdíl je pouze ve směru.
- 7) Ve vstupním poli vyznačíme plus a následně, v každém poli kde jsme změnili směr, píšeme střídavě - a + (v obr. značeno hnědě).

- 8) Zjistíme, že nejvyšší číslo, které můžeme odečíst, tak abychom nezískali v buňce záporné číslo je číslo 0. Tímto krokem zjistíme, výstupní pole:  $u_3v_3$ . Pomlčku ve vstupním poli přepíšeme na přičítané číslo (0). Do výstupního pole nepíšeme 0, ale pomlčku. Následně opíšeme tabulku s cenou a novými hodnotami buněk.
- 9) Celý proces opakujeme do doby, než jsou všechny pomocné ceny záporné nebo rovny nule, pak jsme získali optimální rozdělení dopravy:

$\pi_1 = 2$      $\pi_2 = 1$      $\pi_3 = 5$

	2	3	1	
$u_1 = 0$ VÝSTUPNÍ POLE	10	-	-	
$u_2 = 1$	4	8	4	
$u_3 = -1$	4	-	2	
				VÝSTUPNÍ POLE

(Handwritten annotations: Red arrows show flow from (1,2) to (1,3) and (1,3) to (1,1). From (2,1) to (2,2) and (2,2) to (2,3). From (3,1) to (3,2) and (3,2) to (3,3). Signs: (1,2) -, (1,3) -, (2,1) -, (2,2) +, (2,3) +, (3,1) +, (3,2) -, (3,3) -.

$\pi_1 = 2$      $\pi_2 = 5$      $\pi_3 = 5$

	2	3	1	
$u_1 = 0$	8	-	2	
$u_2 = -3$	-	8	4	
$u_3 = -1$	6	-	2	
				VÝSTUPNÍ POLE

(Handwritten annotations: Red arrows show flow from (1,2) to (1,3) and (1,3) to (1,1). From (2,1) to (2,2) and (2,2) to (2,3). From (3,1) to (3,2) and (3,2) to (3,3). Signs: (1,2) -, (1,3) -, (2,1) -, (2,2) +, (2,3) +, (3,1) +, (3,2) -, (3,3) -.

Výsledná tabulka, optimální řešení:

	$\pi_1 = 2$	$\pi_2 = 1$	$\pi_3 = 1$
$\omega_1 = 0$	8 <sup>2</sup>	- <sup>3</sup>	2 <sup>1</sup>
$\omega_2 = 1$	- <sup>3</sup>	8 <sup>2</sup>	4 <sup>2</sup>
$\omega_3 = -1$	6 <sup>1</sup>	- <sup>4</sup>	- <sup>4</sup>

Výsledná optimální cena:  $8 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = \underline{48}$