

# Zápočtový test z kombinatoriky

14. 12. 2017, sk. A

**Příklad 1:** Určete, kolik existuje přesmyček slova STAROBRNO, v nichž žádná stejná písmena neleží vedle sebe. (2 body)

**Řešení:** Od všech přesmyček (permutace s opakováním) odečteme ty, v nichž leží vedle sebe R nebo O. Takto ale odečteme 2x ty případy, kdy vedle sebe leží jak R, tak O, musíme je proto jednou přičíst (princip inkluze a exkluze).

**Výsledek:**  $\frac{9!}{(2!)^2} - 2\frac{8!}{2!} + 7!$

**Příklad 2:** Určete, kolika způsoby je možné rozdělit mezi 3 děti 5 bombónů tak, aby každé dítě dostalo alespoň jeden bombón. Řešení vyčíslete.

a) Děti rozlišujeme, bombóny ne. (2 body)

**Řešení:** Tři bombóny mezi děti rozdělíme (každému jeden), zbylé dva rozdělíme libovolně, klidně oba jednomu dítěti. vybíráme tedy ze tří dětí 2x, s opakováním.

**Výsledek:**  $K_o(2, 3) = P_o(2, 2) = \frac{4!}{(2!)^2} = 6$

b) Děti i bombóny rozlišujeme. (2 body)

**Řešení:** Od všech možností (každému bombónu určíme majitele) odečteme nevyhovující, tj. případy, kdy bombóny rozdělujeme mezi některé dva majitele. Pozor, jsou zde zahrnuty i případy, kdy mají všechny bombóny jediného majitele, tyto možnosti jsme odečetli vždy 2x, jednou je proto musíme přičíst (opět princip inkluze a exkluze).

**Výsledek:**  $3^5 - \binom{3}{2}2^5 + \binom{3}{1}1^5 = 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150$

**Příklad 3:** Určete počet všech sudých přirozených čísel, která lze sestavit z cifer 1, 2, 3, 4, 5, lze-li každou cifru v každém čísle použít nejvýše jednou. (3 body)

**Řešení:** Sudá čísla mají na poslední pozici sudou cifru, vzhledem k počtu cifer můžeme mít jedno- až pěticiferná čísla.

**Výsledek:** jednociferná ... 2, dvouciferná ... 2 · 4, tříciferná ... 2 · 4 · 3, čtyřciferná ... 2 · 4 · 3 · 2, pěticiferná ... 2 · 4 · 3 · 2 · 1; celkem 2 + 8 + 24 + 48 + 48 = 130

**Příklad 4:** Určete, kolika způsoby lze z balíčku s 32 kartami (7 – A,  $\diamond$ ,  $\spadesuit$ ,  $\heartsuit$ ,  $\clubsuit$ ) vybrat 5 karet tak, aby mezi vybranými kartami bylo alespoň jedno eso. (2 body)

**Řešení:** Od všech možností odečteme ty, v nichž jsme nevybrali žádné eso. Jiný postup: sečteme možnosti, kdy jsme vybrali jedno, dvě, tři a čtyři esa.

**Výsledek:**  $\binom{32}{5} - \binom{4}{0} \binom{28}{5}$ , resp.  $\binom{4}{1} \binom{28}{4} + \binom{4}{2} \binom{28}{3} + \binom{4}{3} \binom{28}{2} + \binom{4}{4} \binom{28}{1}$

**Příklad 5:** Je následující tvrzení chybné? Zdůvodněte (nestačí uvést pouze ano/ne).

Počet všech možností, jak z deseti (různých) barev vybrat tři (různé), je  $10 \cdot 9 \cdot 8$ . (2 body)

**Řešení:** Pokud rozlišujeme pořadí vybraných barev je tvrzení správné. Pokud pořadí vybraných barev nerozlišujeme, je tvrzení chybné, neboť počet takových výběrů je  $\binom{10}{3} = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!}$ .

**Příklad 6:** Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se mohou objevit (i opakovaně) pouze cifry 6, 7, 8, 9, 0. (3 body)

**Řešení:** Čísla dělitelná čtyřmi mají poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi. Na posledních dvou pozicích tak dostáváme možnosti 00, 08, 60, 68, 76, 80, 88, 96, první dvě pozice můžeme obsadit libovolně, cifry se mohou opakovat, pozor si musíme dát na 0 na první pozici.

**Výsledek:**  $4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$