Zápočtový test z kombinatoriky 14. 12. 2017, sk. B

Příklad 1: Určete, kolika způsoby je možné rozdělit mezi 3 děti 5 bonbónů tak, aby každé dítě dostalo alespoň jeden bonbon. Řešení vyčíslete.

a) Děti rozlišujeme, bonbóny ne. (2 body)

Řešení: Tři bonbóny mezi děti rozdělíme (každému jeden), zbylé dva rozdělíme libovolně, klidně oba jednomu dítěti. vybíráme tedy ze tří dětí 2x, s opakováním.

Výsledek: $K_o(2,3) = P_o(2,2) = \frac{4!}{(2!)^2} = 6$

b) Děti i bonbóny rozlišujeme. (2 body)

Řešení: Od všech možností (každému bonbónu určíme majitele) odečteme nevyhovující, tj. případy, kdy bonbóny rozdělujeme mezi některé dva majitele. Pozor, jsou zde zahrnuty i případy, kdy mají všechny bonbóny jediného majitele, tyto možnosti jsme odečetli vždy 2x, jednou je proto musíme přičíst (opět princip inkluze a exkluze).

Výsledek: $3^5 - \binom{3}{2}2^5 + \binom{3}{1}1^5 = 243 - 3 \cdot 32 + 3 = 150$

Příklad 2: Určete, kolik existuje přesmyček slova STAROPRAMEN, v nichž žádná stejná písmena neleží vedle sebe. (2 body)

Řešení: Od všech přesmyček (permutace s opakováním) odečteme ty, v nichž leží vedle sebe A nebo R. Takto ale odečteme 2x ty případy, kdy vedle sebe leží jak A, tak R, musíme je proto jednou přičíst (princip inkluze a exkluze).

Výsledek: $\frac{11!}{(2!)^2} - 2\frac{10!}{2!} + 9!$

Příklad 3: Určete, kolika způsoby lze z balíčku s 32 kartami (7 – A, $\diamondsuit$, $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$) vybrat 5 karet tak, aby mezi vybranými kartami byly nejvýše tři osmičky. (2 body)

Řešení: Od všech možností odečteme ty, v nichž jsme vybrali čtyři osmičky. Jiný postup: sečteme možnosti, kdy jsme vybrali jednu, dvě, tři nebo žádnou osmičku.

Výsledek: $\binom{32}{5} - \binom{4}{4}\binom{28}{1}$, resp. $\binom{4}{1}\binom{28}{4} + \binom{4}{2}\binom{28}{3} + \binom{4}{3}\binom{28}{2} + \binom{4}{0}\binom{28}{5}$

Příklad 4: Je následující tvrzení chybné? Zdůvodněte (nestačí uvést pouze ano/ne).

Tvrzení: Počet všech možností, jak vybrat tři písmena z abecedy tvořené 27 znaky, je $27 \cdot 26 \cdot 25$. (2 body)

Řešení: Pokud rozlišujeme pořadí vybraných písmen, je tvrzení správné. Pokud pořadí vybraných písmen nerozlišujeme, je tvrzení chybné, neboť počet takových výběrů je $\binom{27}{3} = \frac{27!}{24! \cdot 3!} = \frac{27 \cdot 26 \cdot 25}{3!}$.

Poznámka: Ze zadání není zřejmé, zda nutně musí být vybraná písmena různá. Pokud bychom připustili opakovaný výběr stejných písmen, je tvrzení chybné, neboť správný výsledek je 27^3 v případě, že rozlišujeme pořadí písmen, resp. $K_o(3, 27) = \binom{29}{26} = \frac{29!}{26! \cdot 3!}$, pokud pořadí písmen nerozlišujeme.

Příklad 5: Určete počet všech lichých přirozených čísel, která lze sestavit z cifer 3, 4, 5, 6, 7 lze-li každou cifru v každém čísle použít nejvýše jednou. (3 body)

Řešení: Lichá čísla mají na poslední pozici lichou cifru, vzhledem k počtu cifer můžeme mít jedno- až pěticiferná čísla.

Výsledek: jednociferná ... 3, dvouciferná ... $3 \cdot 4$, tříciferná ... $3 \cdot 4 \cdot 3$, čtyřciferná ... $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, pěticiferná ... $3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$; celkem $3 + 12 + 36 + 72 + 72 = 195$

Příklad 6: Určete počet všech čtyřciferných přirozených čísel dělitelných čtyřmi, v nichž se objevují (i opakovaně) pouze cifry 0, 1, 2, 3, 4. (3 body)

Řešení: Čísla dělitelná čtyřmi mají poslední dvojčíslí dělitelné čtyřmi. Na posledních dvou pozicích tak dostáváme možnosti 00, 04, 12, 20, 24, 32, 40, 44, první dvě pozice můžeme obsadit libovolně, cifry se mohou opakovat, pozor si musíme dát na 0 na první pozici.

Výsledek: $4 \cdot 5 \cdot 8 = 160$