0.1 Axiomatická výstavba geometrie

Pravdivost jisté geometrické věty ověřujeme obvykle pomocí jiných platných vět. Podobně nové geometrické pojmy definujeme pomocí jiných, již dříve zavedených, pojmů. Je zřejmé, že takto není možno definovat všechny geometrické pojmy a také nelze všechny geometrické věty dokázat pomocí vět dříve dokázaných. Někde je třeba začít. Proto byly v geometrii vysloveny jisté základní věty, jejichž pravdivost nedokazujeme, ale uznáváme je za pravdivé na základě našich zkušeností. Tyto základní věty nazýváme **axiomy**. Podobně některé pojmy pokládáme v geometrii za zcela základní. Nedefinujeme je výše uvedeným způsobem, ale tyto zcela základní pojmy definujeme tak, že ve větách nazývaných axiomy je zavádíme současně s jejich vlastnostmi a vzájemnými vztahy. Za zcela základní pojmy v geometrii pokládáme pojmy **bod, přímka** a **rovina**. Pomocí základních pojmů pak definujeme pojmy další.

Axiomy jsou tedy nejen nejjednodušší věty, z nichž pak deduktivně odvozujeme věty další, ale slouží i k zavedení těch nejzákladnějších geometrických pojmů, jejich vlastností a vzájemných vztahů. Říkáme také, že jednotlivé axiomy jsou „částí definic“ těchto pojmů. Pojmy definované pomocí axiomů, včetně jejich vlastností a vztahů, nazýváme **axiomatické**. Pomocí těchto axiomatických pojmů pak definujeme další pojmy. Postupujeme-li tímto způsobem, říkáme, že geometrii budujeme axiomaticky.

Příklad 0.1 Příkladem axiomu je věta: „*Dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.*“ Příkladem základních pojmů, které se v ní vyskytují jsou: *bod, přímka.*

Abychom hlouběji pochopili význam axiomatického budování geometrie, nahlédneme v následujících odstavcích, jak tento dnes běžně užívaný axiomatický systém vznikal během historického vývoje lidstva.

Shromažďování geometrických poznatků ve starověku iniciované potřebami praxe na jedné straně (stavby, vytyčování pozemků atd.) a mystickým zaujetím pro geometrii na straně druhé (malby v chrámech, pyramidy, obřadní místa atd.) zaznamenalo zlomový pokrok od 6. století před Kr. Tehdy se poprvé u ionských Řeků objevuje snaha podat nový výklad světa, spíše přírodovědecký než mystický. Významnou součástí tohoto výkladu byla také geometrie, která začala být pěstována jako věda. My si z tohoto období starověkého Řecka a Říma, které bývá souhrně označováno jako *antika,*[1] podrobněji povšimneme spisu Eukleida z Alexandrie[2] *Základy* (řecky *Stoicheia*, latinsky *Elementa*) ze 3. století před Kr. Eukleidův spis *Základy* byl přeložen téměř

[1] Historikové matematiky se všeobecně shodují na tom, že geometrické znalosti přišly do Řecka z Egypta a přinesl je Thalés. Rané období rozmachu řeckého myšlení začíná školou Milétskou - cca 600-550 před Kr. (Thalés, Anaximandros, Anaximenes) a vrcholí v době rozkvětu Athén (Sokratés, Platón, Aristoteles). Toto vrcholné období, nazývané v literatuře *hrdinským věkem*, končí Aristotelovou smrtí roku 322 před Kr. Na počátku 3. století před Kr. se centrem učenců tehdejšího světa stává Alexandrie, shromáždili se sem i tak význační matematici jako Eukleides, Eratostenos a Apollónios. Na základě souhrných prací, které v té době vznikaly, bývá toto období nazýváno historiky vědy *věkem učebnic.* Postupně docházelo ke změně zaměření matematiky od teoretické k aplikované. Kolem 3. století po Kr. pak nastává úpadek nejen geometrie, ale vědy vůbec, jako nutný důsledek úpadku zemí římského impéria. Podrobněji např. [5], [6].

[2] Eukleides z Alexandrie (cca 325 před Kr. – asi 260 před Kr.), řecký matematik a geometr - vedle

do všech kulturních jazyků světa a zcela zásadním způsobem ovlivňoval vývoj nejen geometrie, ale matematiky vůbec, dalších dva tisíce let. V Eukleidových *Základech* byla poprvé geometrie zpracována axiomatickou metodou a až do 19. století sloužily nejrůznější překlady spisu *Základy* jako jediná učebnice geometrie.

Eukleidovy *Základy*

Rozsáhlý Eukleidův spis *Základy* je obsažen ve 13 knihách.[3] Eukleides v něm shrnul všechny důležité, do té doby získané geometrické poznatky, které utřídil. Ve spise jsou nejprve definovány pojmy, o nichž se mluví, poté následují postuláty (něco jako požadavky) a věty, Eukleidem nazývané axiomy. Eukleides v *Základech* zformuloval pět základních postulátů, ze kterých později odvozoval logickým uvažováním další geometrické věty. Správnost pěti postulátů vycházela z vlastních zkušeností a praxe, přímo je nedokazoval. Jednotlivé věty jsou nejdříve formulovány, potom se konstatuje, co je dáno a co je třeba dokázat. Na závěr následuje důkaz se všemi odkazy na předcházející věty, postuláty a axiomy.

základů geometrie se věnoval i teorii čísel, perspektivě, kuželosečkám a sférické geometrii. Mezi jeho žáky snad patřil také Archimédés.

[3]Obsahem první knihy jsou věty o vlastnostech trojúhelníku, podmínky shodnosti trojúhelníků, vlastnosti rovnoběžníků a mnohoúhelníků, věta Pythagorova. Druhá kniha pojednává o proměně mnohoúhelníku na čtverec stejného obsahu. Třetí kniha se zabývá vlastnostmi kružnice a vzájemnou polohou dvou kružnic, čtvrtá pojednává o mnohoúhelnících kružnici opsaných a vepsaných. Pátá kniha obsahuje nauku o poměrech a úměrnosti úseček. Šestá kniha je pojednáním o podobnosti mnohoúhelníků. Sedmá až devátá kniha objasňuje přirozená čísla a prvočísla, desátá pak nauku o souměřitelných a nesouměřitelných veličinách (v podstatě základ teorie iracionálních čísel). Poslední tři knihy obsahují základy stereometrie – poloha přímek a rovin v prostoru, teorie objemů, mnohostěnů a rotačních těles. Podrobněji viz např. český překlad základů [7] nebo studie [8].

Eukleidovy definice:

I. ***Bod*** *je to, co nemá části.*

II. ***Čára*** *je délka bez šířky.*

III. *Hranice čáry se nazývají body.*

IV. ***Přímkou*** *se nazývá čára, jenž je stejně položena ke všem svým bodům.*

V. ***Plocha*** *je to, co má délku a šířku.*

VI. *Hranicemi plochy jsou čáry.*

VII. ***Rovinou*** *se nazývá plocha, jež je stejně položená vzhledem je všem přímkám, které v ní leží.*

VIII. ***Úhlem*** *(rovinným) se nazývá vzájemná odchylka protínajících se čar, ležících v téže rovině, avšak neležících v téže přímce.*

Kniha první uvádí **pět postulátů**, kde se požaduje:

I. *Aby každý bod bylo možné spojit s každým bodem přímky,*[4]

II. *aby každou přímku bylo možno neomezeně prodloužit,*

III. *aby z libovolného středu bylo možno opsat kružnici libovolného poloměru,*

IV. *aby si všechny pravé úhly byly rovny,*

V. *aby přímka proťatá dvěma dalšími přímkami tvořící s nimi po jedné své straně přilehlé úhly o součtu menším než 2R, (R je pravý úhel), měla vždy průsečík oněch dalších přímek na této straně.*

Tento pátý postulát tvoří základ teorie o rovnoběžkách. Pomocí něho dokazuje Eukleides větu, že

Věta 0.1 *K libovolné přímce existuje pouze jediná rovnoběžka, která prochází bodem neležícím na této přímce.*

Až do 19. století byl pátý postulát předmětem mnoha diskuzí, protože ve srovnání se čtyřmi předcházejícími se zdál velmi složitý. Mnozí matematikové se snažili tento postulát odvodit z ostatních Eukleidových postulátů a dokázat jeho nezávislost na předchozích čtyřech, ale jejich snahy byly marné. Teprve v polovině 19. století byla otázka pátého Eukleidova postulátu zodpovězána. Podrobněji se k tomuto problému ještě vrátíme.

[4] Jinak řečeno: I. Každými dvěma různými body lze vést jedinou přímku.

Obr. 1 Ukázka z řeckého přepisu Eukleidových *Základů* z 9. století

Eukleidovy axiomy:

I. *Veličiny rovné třetí veličině jsou si rovny navzájem.*

II. *Jestliže k rovným veličinám připočteme rovné veličiny, obdržíme opět rovné veličiny.*

III. *Jestliže od sobě rovných veličin odečteme sobě rovné veličiny, obdržíme opět sobě rovné veličiny.*

IV. *Jestliže k nerovným veličinám připočteme sobě rovné veličiny, obdržíme nerovné veličiny.*

V. *Jestliže zdvojnásobíme sobě rovné veličiny, získané sobě rovné veličiny.*

VI. *Poloviny sobě rovných veličin jsou si rovny.*

VII. *Splývající veličiny (obrazce) jsou si rovny.*

VIII. *Dvě přímky nemohou omezovat prostor.*

Eukleidovy axiomy jsou obecnější než jeho postuláty. Jak je již zmíněno z definic, postulátů a axiomů plynou pro Eukleida další poučky. Ostatní poučky, na rozdíl od postulátů a axiomů, už nevychází z přímých zkušeností a praxe, a proto je všechny precizně dokazuje. Každý nový pojem a termín definuje pomocí základních definic. Právě tady mají Eukleidovy Základy z matematického hlediska nemalé vady. Například některé základní definice nejsou vyhovující – vyskytují se v nich pojmy jako „část“,

„šířka“, „konec čáry“ atd., které jsou také novými avšak nedefinovanými pojmy. Např. definuje bod jako „to, co nemá částí“, aniž by dříve mluvil o tom, co znamená být částí něčeho. Avšak o části něčeho mluvit nemůžeme, protože ani netušíme, co je to bod. Z toho vyplývá, že nemůžeme definovat ani přímku a rovinu. Dále také výčet Eukleidových axiómů a postulátů není zcela úplný. Eukleidovy *Základy* byly však, i přes některé své vady a nedostatky, po dva tisíce let vzorem učebnice geometrie, kde starořecké abstraktní matematické myšlení dosáhlo svého vrcholu. Tímto matematika získala zvláštní postavení mezi ostatními přírodními vědami. Právě ona začala abstrahovat od vlastností specifických pro mnohé předměty a začala studovat prostorové formy a kvantitativní vztahy, které platí v nejrůznějších oblastech.

Hilbertovy *Základy geometrie*

Eukleidovy *Základy* byly prvním příkladem použití axiomatického systému v matematice. Již od počátku se však objevovaly mnohé pokusy o vylepšení. Původní Eukleidovy poučky a pojmy byly později podrobně prozkoumány matematiky, podle nichž bylo výhodnější volit za axiomy jiné poučky, než které použil Eukleides. V 19. století především Lobačevskij, Bolyai a Gauss zaujali kritické stanovisko k *Základům* a budování jednotlivých matematických disciplín. Podstatně pomohli k vyjasnění otázky základních geometrických pojmů jako jsou bod, přímka a rovina.

Dále se jednalo o snahy dokázat pátý postulát z prvních čtyř, popř. alespoň o snahy nahradit jej jednodušeji formulovaným tvrzením. Mnohokrát se zdálo, že důkaz byl objeven, ale nakonec se vždy ukázalo, že důkaz se opíral o něco, co měl dokázat. Teprve Lobačevski, Bolyai a Gauss poprvé připustili nezávislost V. postulátu a začali uvažovat o „nové geometrii“, v níž místo V. postulátu platí jeho negace.[5] Tyto kroky vedly postupně k budování tzv. **neeukleidovských geometrií**. Podrobněji se k tématu pátého Eukleidova postulátu ještě vrátíme v kapitole 1.7.

Největší přínos zaznamenaly práce D. Hilberta[6] v díle *Grundlagen der Geometrie (Základy geometrie)* vydaném v roce 1899. V díle pojednává o základech elementární geometrie. Systematicky vybudoval disciplínu v současnosti nazývanou **eukleidovská geometrie**. Hilbert vytvořil tzv. **Systém axiomů eukleidovské geometrie**, které rozdělil do pěti skupin podle toho, jakých vlastností a vztahů mezi body, přímkami a rovinami se týkají.

Hilbertův axiomatický systém pro eukleidovskou geometrii je používán dodnes. I my budeme v textu budovat geometrii tímto způsobem[7] tak, abychom postupně došli ke všem pojmům a vztahům, se kterými se pracuje v geometrii na základní škole.

[5] Nikolaj Ivanovič Lobačevski (1792 – 1856), ruský matematik, dokázal nezávislost pátého postulátu na předchozích čtyřech, tedy dokázal, že se z ostatních Eukleidových základních vět odvodit nedá. K tomuto objevu dospěli nezávisle na něm i maďarský matematik János Bolyai (1802 – 1860) a německý matematik Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855).

[6] David Hilbert (1862 – 1943), německý matematik, vedoucí katedry Univerzity v Göttingenu, jeden z největších matematiků 20. století.

[7] Přičemž ale nebudeme vše důsledně dokazovat, k podrobnějšímu studiu odkazujeme na uvedenou literaturu.

Axiómy popisující eukleidovskou geometrii rozdělíme v souladu s Hilbertem do pěti skupin.

- Axiómy incidence (I)
- Axiómy uspořádání (U)
- Axiómy shodnosti (S)
- Axiómy spojitosti (D = A + C)
- Axióm rovnoběžnosti (R)

Jednotlivým skupinám axiomů se postupně budeme věnovat v odstavcích 1.2, 1.3, 1.7, 2.1 a **??**, přičemž k jejich označní budeme v souladu s literaturou užívat písmena uvedená v závorkách.

0.2 Axiomy incidence

Do skupiny axiomů incidence řadíme axiomy, které se týkají bodů, přímek, rovin a vztahů mezi nimi. Vyjadřujeme je např. slovy „bod leží na přímce“, „bod leží v rovině“, „přímka prochází bodem“, „přímka p leží v rovině ρ“ (kterému lze rozumět tak, že rovina ρ prochází přímkou p) a pod. Všechny uvedené vztahy vyjadřujeme stručně názvem **incidence** (nebo-li spojování).

Do skupiny axiomů incidence patří tyto axiomy:

$\boldsymbol{I_1}$: **Každé dva navzájem různé body incidují jedinou přímkou.**[8]

$\boldsymbol{I_2}$: **Každá přímka inciduje alespoň se dvěma různými body.**

$\boldsymbol{I_3}$: **Existuje aspoň jedna trojice bodů, která neinciduje se žádnou přímkou.**

$\boldsymbol{I_4}$: **Tři body, které neincidují se žádnou přímkou, incidují s jedinou rovinou.**

$\boldsymbol{I_5}$: **Každá rovina inciduje aspoň s jedním bodem.**

$\boldsymbol{I_6}$: **Jestliže dva navzájem různé body přímky incidují s rovinou, pak s touto rovinou incidují všechny body této přímky.**

$\boldsymbol{I_7}$: **Incidují-li dvě různé roviny s týmž bodem, pak existuje alespoň jeden další bod, se kterým obě tyto roviny incidují.**

$\boldsymbol{I_8}$: **Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, která neinciduje v žádnou rovinou.**

Uvedené axiomy můžeme formulovat i takto:

I_1 : *Každými dvěma navzájem různými body prochází jediná přímka.*

[8] Všimněme si, že axiom I_1 je shodný s prvním postulátem v Eukleidových základech, viz str. 12.

I_2 : *Na každé přímce leží aspoň dva navzájem různé body.*

I_3 : *Existuje aspoň jedna trojice bodů, které neleží na žádné přímce.*

I_4 : *Třemi body, které neleží v žádné přímce, prochází jediná rovina.*

I_5 : *V každé rovině leží aspoň jeden bod.*

I_6 : *Jestliže dva navzájem různé body přímky leží v rovině, pak v této rovině leží všechny body této přímky.*

I_7 : *Mají-li dvě různé roviny společný bod, pak mají společný ještě aspoň jeden další bod.*

I_8 : *Existuje aspoň jedna čtveřice bodů, která neleží v žádné rovině.*

Užitím axiomů incidence můžeme dokázat některé jednoduché geometrické věty. Ukážeme dvě z nich:

Věta 0.2 *Přímka a bod, který na ní neleží incidují právě s jednou rovinou.*

Uvědomme si, že znění věty 1.2 běžně vyjadřujeme a používáme na základní škole v této podobě: *Rovina je jednoznačně určena přímkou a bodem, který na ní neleží.*

Důkaz: *Označme danou přímku p daný bod A. Podle I_2 existují na přímce p dva různé body. Označme je B, C. Body A, B, C neleží v přímce a podle I_4 jimi prochází jediná rovina, které podle I_6 obsahuje i přímku p. Tím je věta 1.2 dokázána na základě axiomů I_2, I_4 a I_6.* □

Věta 0.3 *Mají-li dvě roviny společný bod, pak existuje přímka patřící oběma těmto rovinám.*

Důkaz: *Označme uvažované roviny α, β. Mají-li tyto roviny společný bod, označme ho např. A, pak mají podle axiomu I_7 ještě další společný bod, označme ho např. B. Body A, B jsou tedy různé a podle I_1 je jimi určena jediná přímka. Podle axiomu I_6 patří tato přímka jak rovině α, tak rovině β. Tím je věta 1.3 dokázána.* □

Axiomy incidence zaručují existenci nejvýše dvou různých bodů na přímce. To že přímka obsahuje více než dva různé body, nelze dokázat pouze užitím těchto axiomů. K dokázání tohoto tvrzení je nutno užít axiomy další skupiny, axiomy uspořádání.

0.3 Axiomy uspořádání

Uspořádání bodů na přímce se zakládá na vztahu *bod leží mezi jinými dvěma body.* Vlastnosti tohoto vztahu vyjadřují následující axiomy uspořádíní:

$\boldsymbol{U_1}$: **Leží-li bod $\boldsymbol{B}$ mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$, jsou $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, tři různé body přímky a platí též, že bod $\boldsymbol{B}$ leží mezi body $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$.**

$\boldsymbol{U_2}$: **Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ dva různé body, pak na přímce procházející body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ existuje aspoň jeden bod $\boldsymbol{C}$ takový, že bod $\boldsymbol{B}$ leží mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{C}$.**

$\boldsymbol{U_3}$: **Ze tří různých bodů na přímce leží nejvýše jeden mezi zbývajícími dvěma.**

$\boldsymbol{U_4}$: **(Paschův[9] axiom) Jsou-li $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ tři body, které neleží v přímce, a $\boldsymbol{p}$ přímka roviny určené body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, která neprochází žádným z bodů $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ a která obsahuje jistý bod $\boldsymbol{D}$ ležící mezi body $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, potom obsahuje přímka $\boldsymbol{p}$ buď jistý bod $\boldsymbol{E}$ ležící mezi body $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ nebo jistý bod $\boldsymbol{F}$ ležící mezi body $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}$.**

Z formulace axiomů uspořádání je zřejmé, že se již předpokládá zavedení pojmu **incidence**. Axiomy $\boldsymbol{U_1} - \boldsymbol{U_3}$ se týkají uspořádání bodů na přímce. V axiomu $\boldsymbol{U_3}$ se netvrdí „právě jeden“, neboť toto tvrzení lze již odvodit.

Užitím axiomů incidence a uspořádání lze již dokázat např. tato tvrzení:

Věta 0.4 *Mezi každými dvěma různými body leží alespoň jeden bod.*

Důkaz: *Nechť A, B jsou dva různé body (obr. 1.2). Podle I_3 existuje bod D tak, že body A, B, D neleží v přímce. Podle I_4 prochází body A, B, D jediná rovina α. Body A, D prochází podle I_1 jediná přímka, která podle I_6 leží v rovině α. Přímky AB a AD jsou tedy různé a mají jediný společný bod A.*

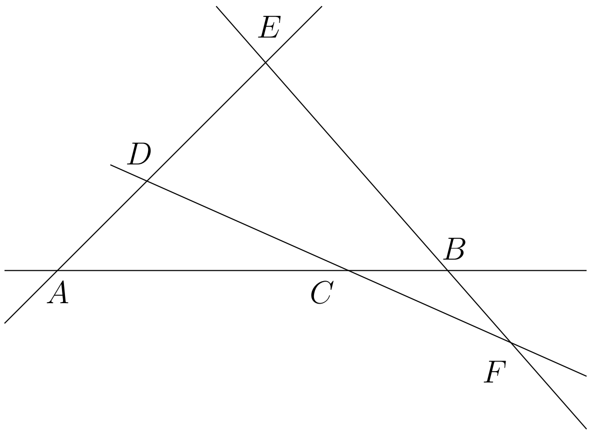
Podle U_2 existuje na přímce AD bod E tak, že D leží mezi body A, E. Bod E leží v rovině α. Není však bodem přímky AB, neboť přímky AB a AD mají společný pouze bod A. Body E, B jsou tedy různé a podle I_1 je jim určena jediná přímka. Podle I_6 leží tato přímka v téže rovině α. Na přímce EB existuje bod F tak, že bod B leží mezi body F, E (podle I_2). Bod F leží v rovině α, ale neleží na přímce AB. Snadno se přesvědčíme, že přímky EB, AB jsou různé a mají jediný společný bod B. Na body A, B, E a přímku DF užijeme Paschův axiom. Odtud vyplývá: Protože bod F přímky DF neleží mezi body E, B a bod D leží mezi body A, E, existuje takový bod C přímky DF, který leží mezi body A, B. Tím je věta 1.4 dokázáná. □

Věta 0.5 *Na každé přímce leží nekonečně mnoho bodů.*

Věta 0.6 *V každé rovině leží nekonečně mnoho bodů.*

Důkaz: *Viz cvičení 1.1.* □

[9]Moritz Pasch (1843 - 1930), německý matematik specializující se na základy geometrie. V Eukleidových *Základech* našel řadu skrytých předpokladů, kterých si nikdo předtím nevšiml.



Obr. 2

Základní pojmy *bod, přímka, rovina* jsou reprezentovány jednotlivými body, přímkami, rovinami, pod nimiž rozumíme objekty vyhovující jednotlivým axiomům. Tyto objekty jsou množinami bodů. Množinu všech bodů nazveme ***prostorem***.

Geometrickým útvarem budeme dále rozumět každou neprázdnou množinu bodů prostoru. Přitom bude-li podmnožinou jisté roviny, budeme ho nazývat rovinný geometrický úrvar. Nebude-li podmnožinou žádné roviny, budeme ho nazývat prostorový geometrický útvar.

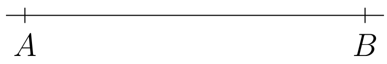
0.4 Úsečka, polopřímka, polorovina, poloprostor

Na základě axiomů incidence a uspořádání je nyní možno definovat úsečku, polopřímku, polorovinu a poloprostor. Pro stručné zápisy těchto definic užijeme geometrickou symboliku zavedenou na základní škole, množinovou symboliku a některé symboly matematické logiky – viz přehled užitých symbolů na straně 5. Nebude-li řečeno jinak, budeme základní množinou Z rozumět prostor.

Definice 0.1 ***Úsečka*** AB je množina všech bodů prostoru, která obsahuje body A, B a dále všechny body, které leží mezi body A, B.

$$AB = \{X \in Z; X = A \vee X = B \vee X\mu AB\}.$$

Zápis $X\mu AB$ čteme „bod X leží mezi body A, B".

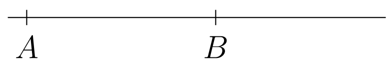


Obr. 3

Definice 0.2 ***Polopřímka*** AB je množina všech bodů prostoru, která obsahuje všechny body úsečky AB a dále všechny takové body X, pro které platí, že bod B leží mezi body A, X.

$$\mapsto AB = \{X \in Z; X \in AB \vee B\mu AX\}.$$

Bod A nazýváme počátek polopřímky AB.



Obr. 4

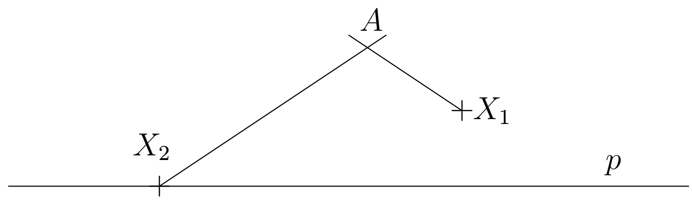
Definice 0.3 ***Polopřímka opačná k polopřímce*** AB je množina všech bodů prostoru, která obsahuje bod A a dále všechny takové body X, pro které platí, že bod A leží mezi body X, B.

$$\mapsto AB = \{X \in Z; X \in AB \vee A\mu XB\}.$$

Bod A nazýváme počátek polopřímky opačné k polopřímce AB.

Definice 0.4 Nechť p je přímka a A bod, který na ní neleží. ***Polorovinou*** pA nazýváme množinu všech bodů X roviny pA, pro které platí, že mezi body A, X neleží žádný bod přímky p.
Přímku p nazýváme *hraniční přímka poloroviny pA*, někdy též *počátek poloroviny pA*.

Je-li X bod poloroviny pA, je průnikem úsečky AX a přímky p buď množina prázdná nebo množina o jediném prvku X, který je bodem přímky p (obr. 1.5). Této skutečnosti lze také užít k definici poloroviny pA. Zapíšeme ji symbolicky



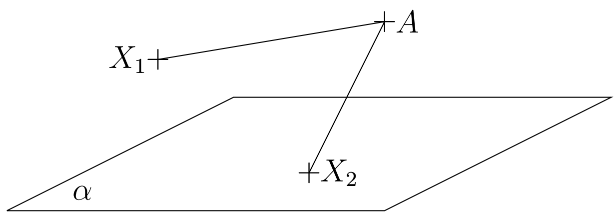
Obr. 5

$$\mapsto pA = \{X \in \leftrightarrow pA; AX \cap p = \emptyset \vee AX \cap p = \{X\}\}\,.$$

Definice 0.5 Nechť α je rovina a A bod, který v ní neleží. ***Poloprostorem*** αA nazýváme množinu všech bodů X prostoru, pro které platí, že mezi body A, X neleží žádný bod roviny α.
Rovinu α nazýváme *hraniční rovinou poloprostoru* αA.

Z definice 1.5 je zřejmé, že průnikem úsečky AX, kde $X \in \mapsto \alpha A$, s rovinou α je buď prázdná množina nebo množina $X \in \alpha$ (obr. 1.6).

Tuto skutečnost lze užít v definici poloprostoru αA ekvivalentní s definicí 1.5, kterou symbolicky zapíšeme



Obr. 6

$$\mapsto \alpha A = \{X \in \ Z; AX \cap \alpha = \emptyset \vee AX \cap \alpha = \{X\}\}\,.$$