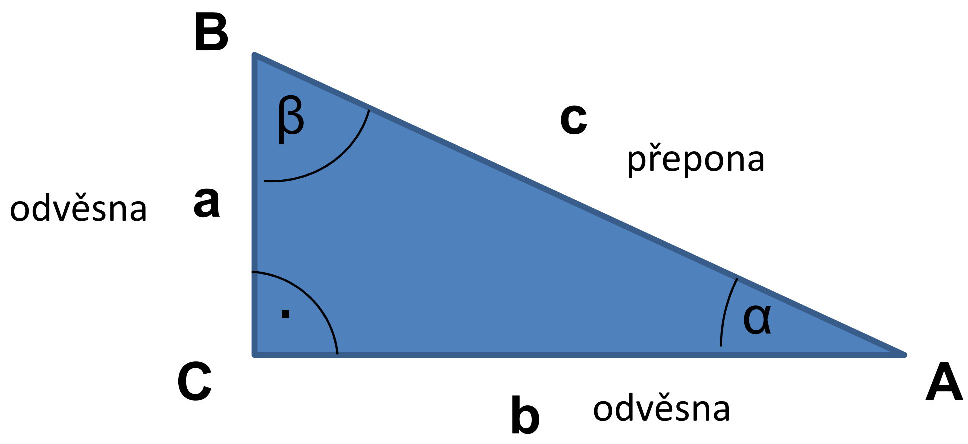
Goniometrické funkce a rovnice

Repetitorium z matematiky

Podzim 2012

Ivana Medková

1 GONIOMETRICKÉ FUNKCE OSTRÉHO ÚHLU



$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

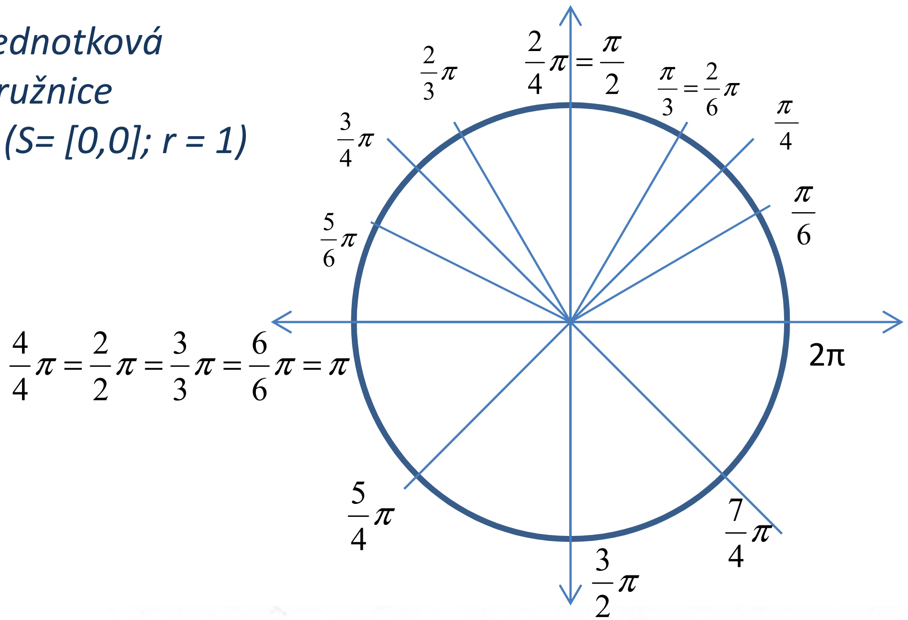
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka přepony}}$$

$$tg\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{délka protilehlé odvěsny}}{\text{délka přilehlé odvěsny}}$$

$$\text{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \frac{\text{délka přilehlé odvěsny}}{\text{délka protilehlé odvěsny}}$$

2 Velikost úhlů v obloukové a stupňové míře

Jednotková kružnice
k (S= [0,0]; r = 1)



$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\mathrm{rad}$$

$$1\,\mathrm{rad} = \frac{180^\circ}{\pi} \cong 57^\circ 17'$$

$$\frac{x \cdot 180^\circ}{\pi} = \alpha^\circ$$

$$\frac{\alpha^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = x$$

α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Úlohy

Př.1: Vyjádřete v míře obloukové:

$a)\ \alpha = 40^\circ$

$b)\ \alpha = 150^\circ$

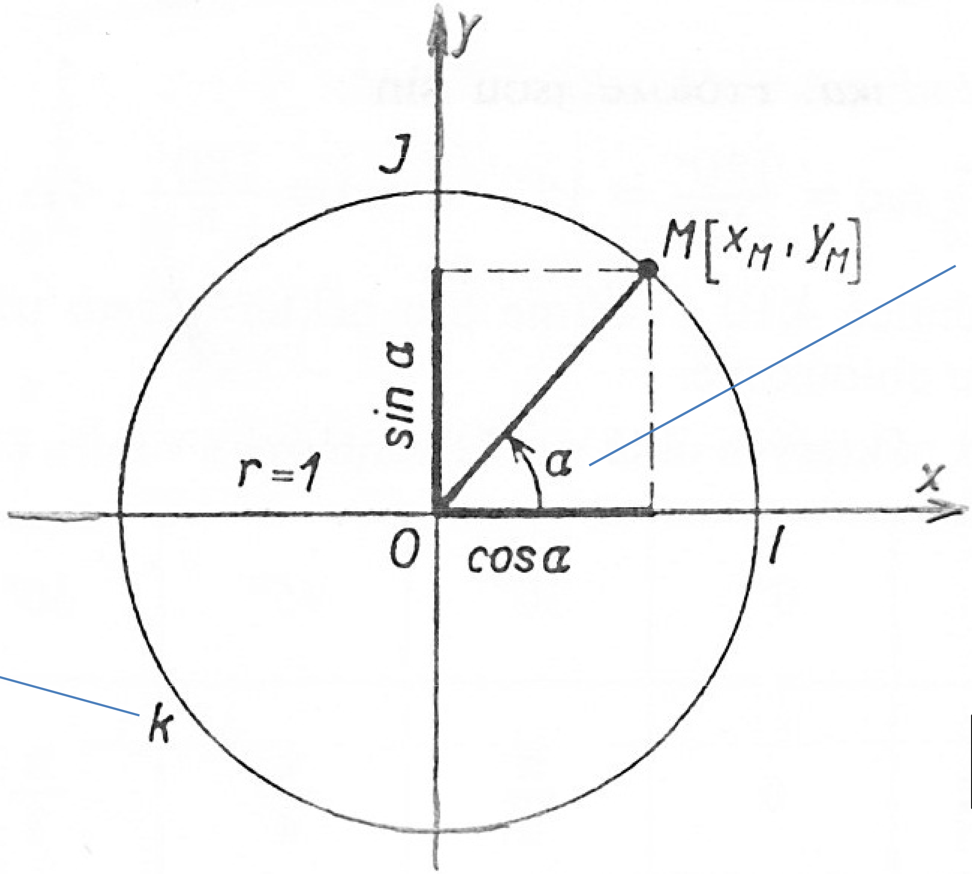
Př.2: Vyjádřete v míře stupňové:

$a)\ x = \frac{9}{10}\pi$

$b)\ x = \frac{7}{2}\pi$

3 GONIOMETRICKÉ FUNKCE SINUS A KOSINUS

Definice:



Jednotková kružnice
k (0; r = 1)

Orientovaný úhel α v základní poloze.
Ke každému α ϵ *R* lze přiřadit 1!orientovaný úhel velikosti α (v obloukové míře), jehož počáteční rameno je polopřímka OI.

Pro každé α ϵ R platí:

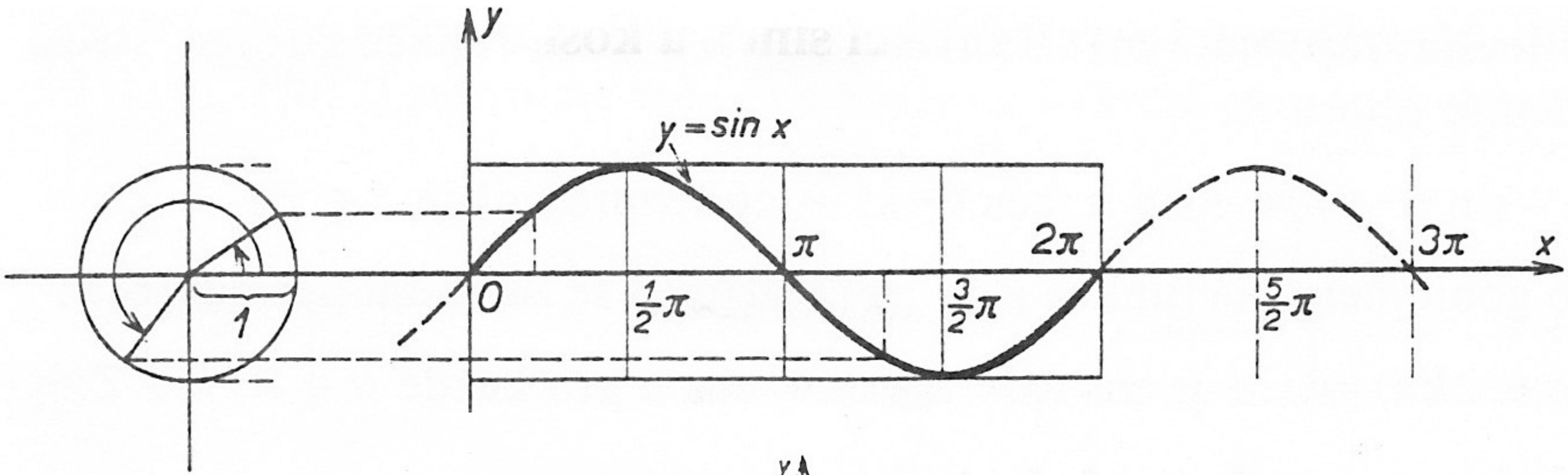
$$\sin \alpha = y_M \ , \cos \alpha = x_M$$

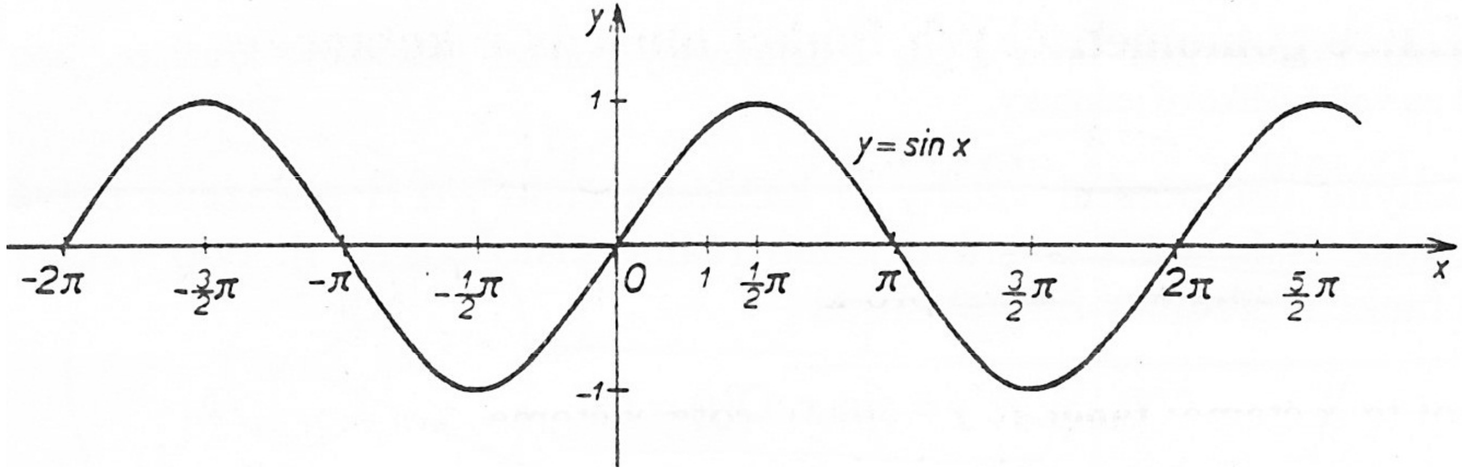
Funkční předpisy: $f: y = \sin x, \quad D(f) = R$ $\quad$ $f: y = \cos x, \quad D(f) = R$

3.1 Graf funkce sinus

$f: y = \sin x$

= sinusoida





Vlastnosti:

$D(f) = R,\ H(f) = \langle -1;1 \rangle$

Je **lichá:** sin (-x) = - sin x.

Je **rostoucí** pro x ϵ <-π/2 + 2kπ ; π/2 + 2kπ >, kϵ Z.

Je **klesající** pro x ϵ < π/2 + 2kπ ; 3π/2 + 2kπ >, kϵ Z.

Omezená v celém definičním oboru shora i zdola.

Maximum [π/2 + 2kπ , 1], **minimum** [3π/2 + 2kπ , -1].

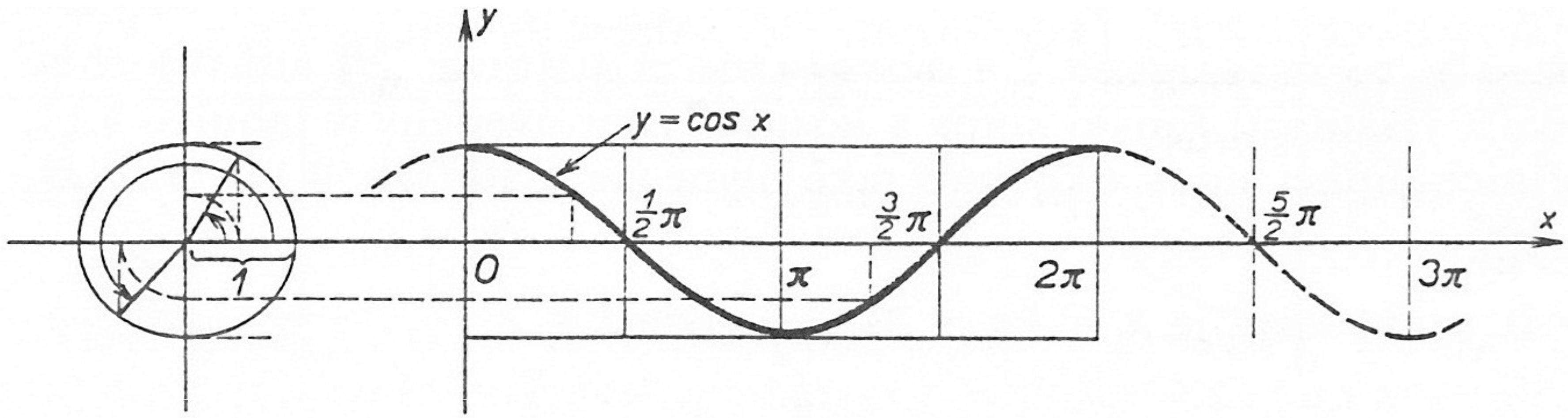
Perioda 2π: sin x = sin (x + 2kπ), kϵ Z.

Je **spojitá** v R.

3.2 Graf funkce cosinus

$f : y = \cos x$

= cosinusoida



Vlastnosti:

$D(f) = R,\ H(f) = \langle -1;1 \rangle$

Je **sudá**: cos (-x) = cos x.

Je **rostoucí** pro x ϵ <π + 2kπ ; 2π + 2kπ >, kϵ Z.

Je **klesající** pro x ϵ <2kπ ; π + 2kπ >, kϵ Z.

Omezená v celém definičním oboru shora i zdola.

Maximum [2kπ , 1], **minimum** [π + 2kπ , -1].

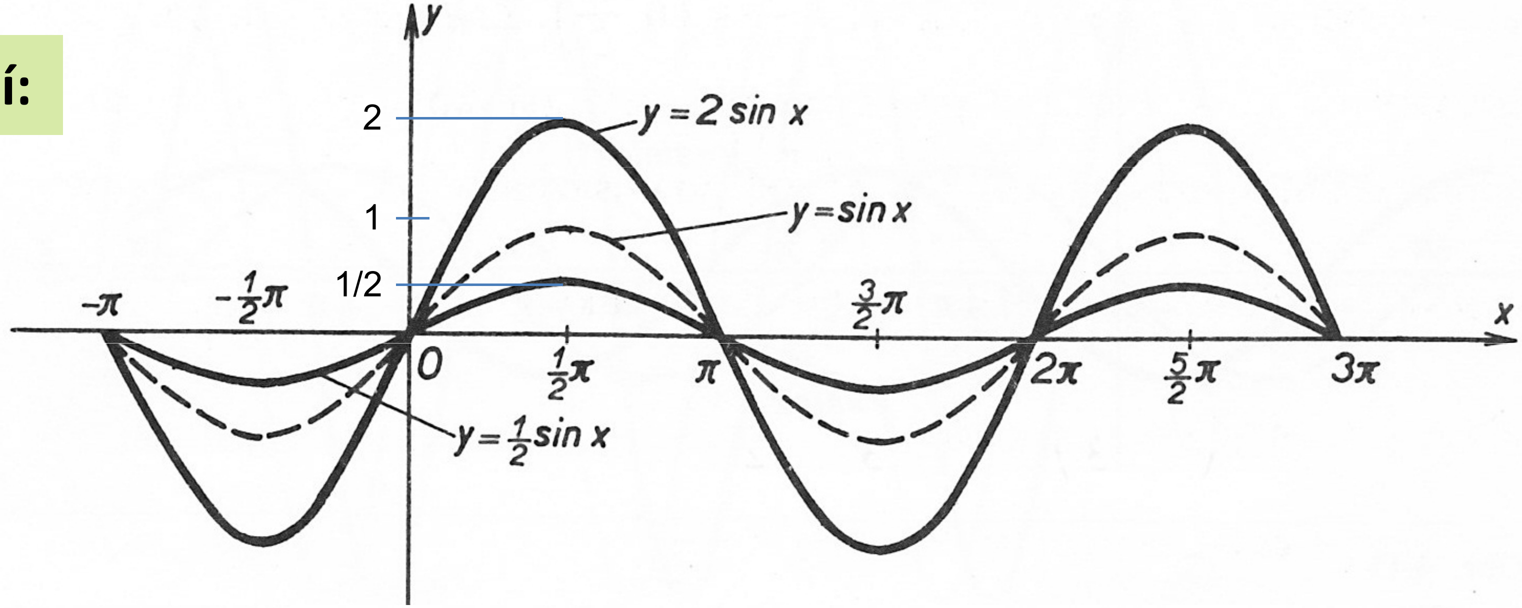
Perioda 2π: cos x = cos (x + 2kπ), kϵ Z.

Je **spojitá** v R.

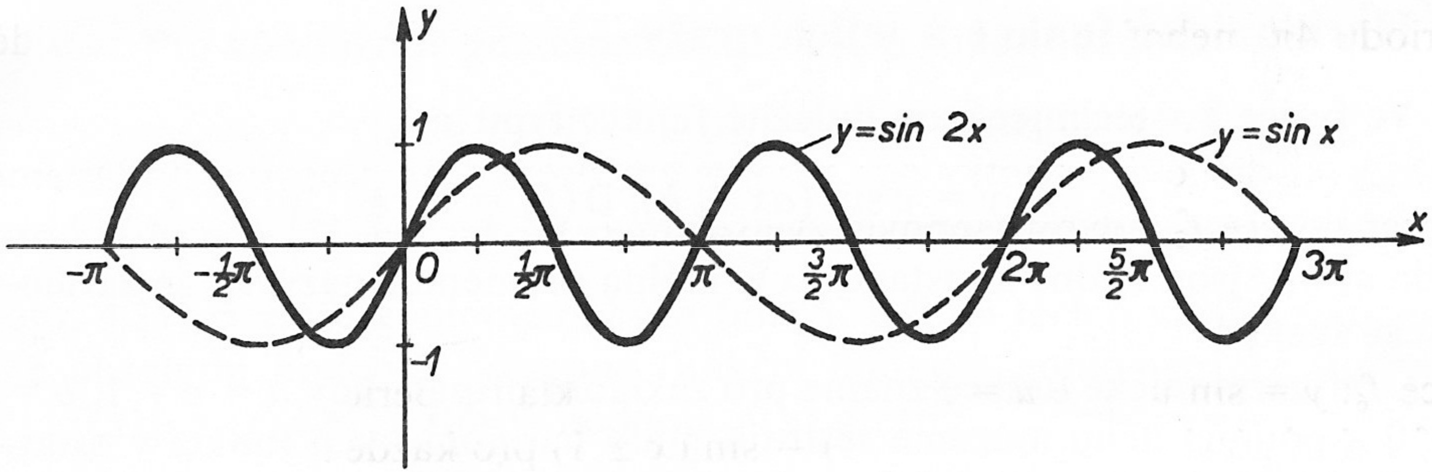
Příklady grafů funkcí:

$$f: y = 2\sin x$$

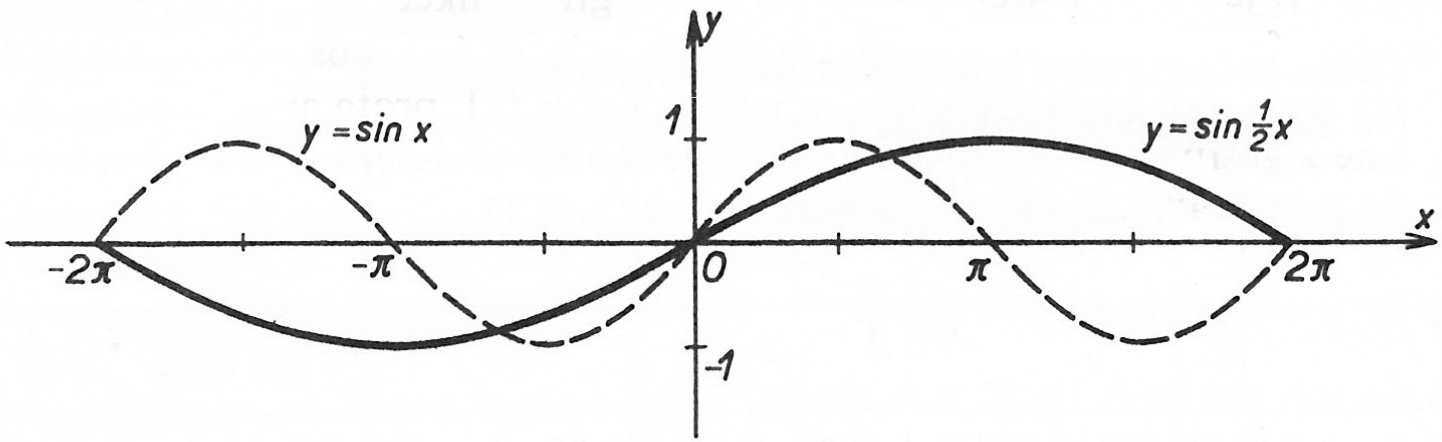
$$f: y = \frac{1}{2}\sin x$$



$$f: y = \sin 2x$$

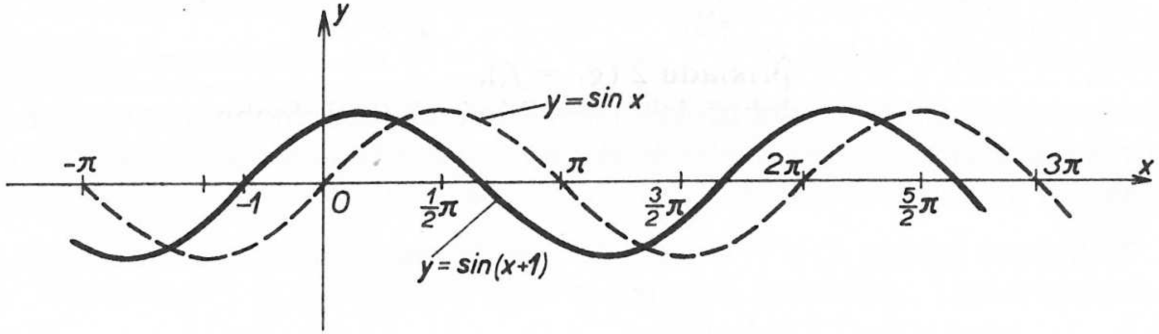


$$f: y = \sin\frac{1}{2}x$$

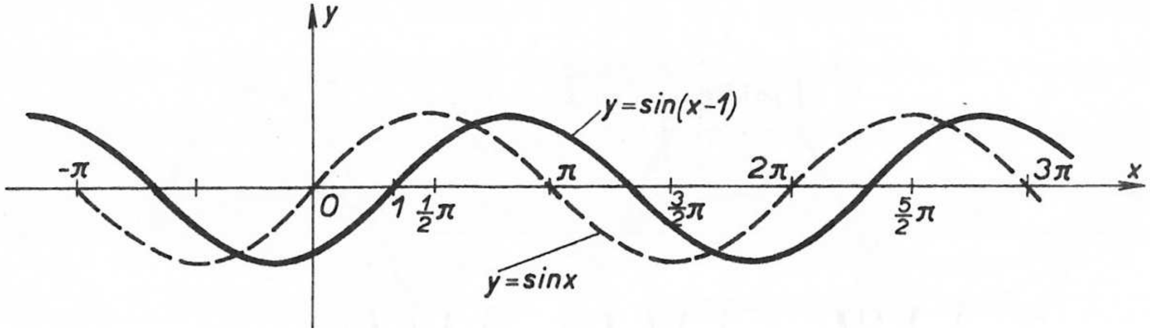


Příklady grafů funkcí:

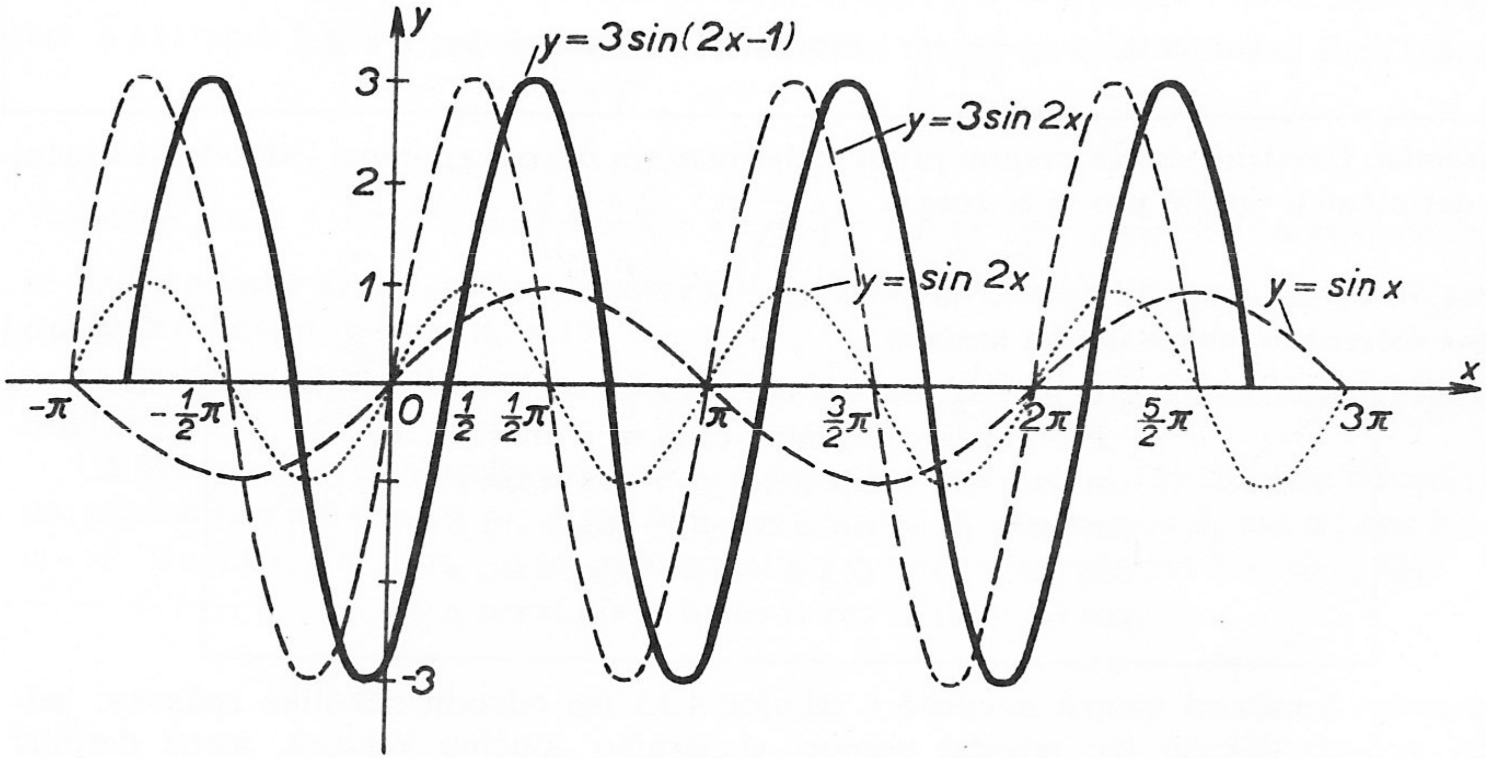
$$f : y = \sin(x+1)$$



$$f : y = \sin(x-1)$$



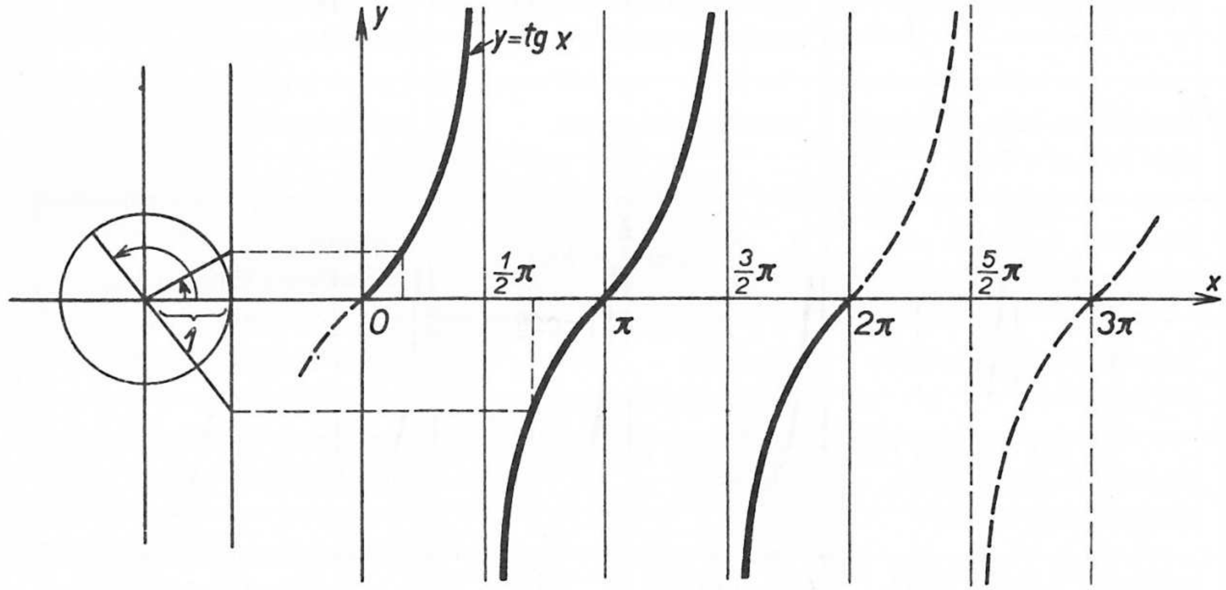
$$f : y = 3\sin(2x-1)$$



4 Graf funkce tangens

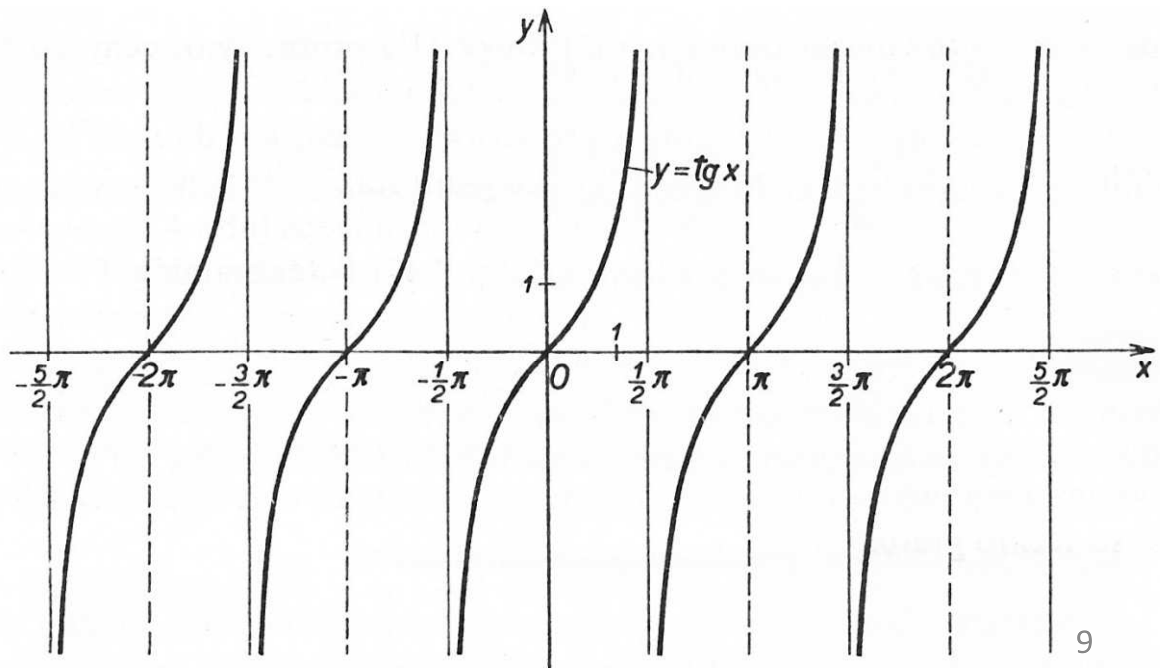
$f : y = tg\ x$

= **tangentoida**



Vlastnosti:

$$D(f) = R - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}, k \in Z,\ H(f) = R$$

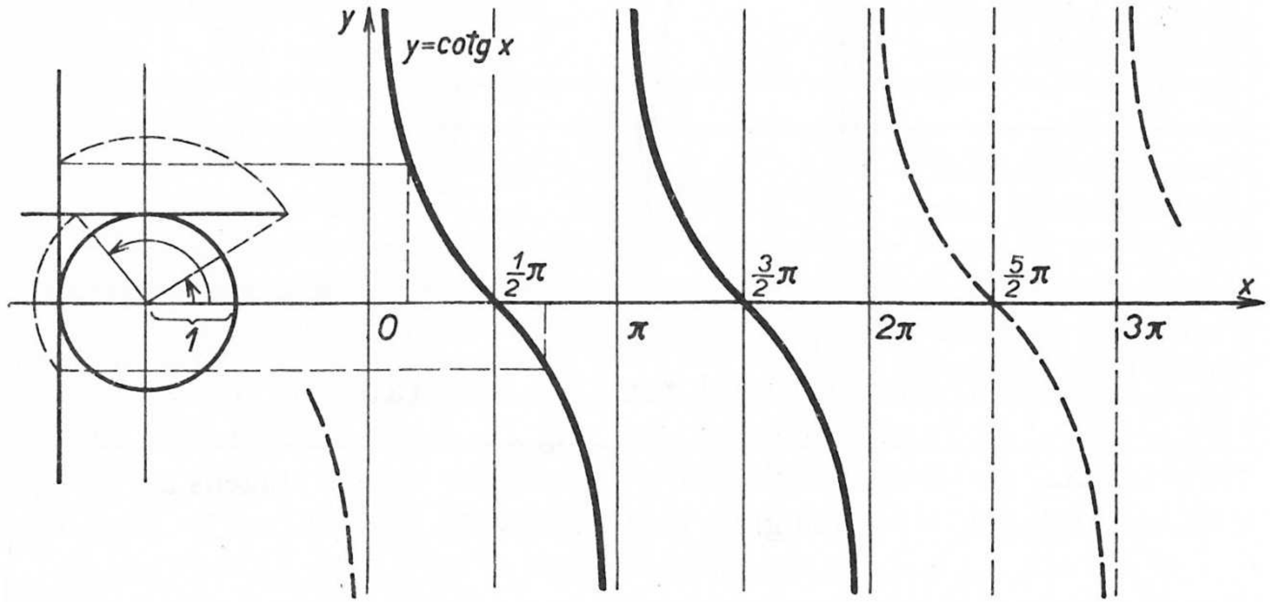


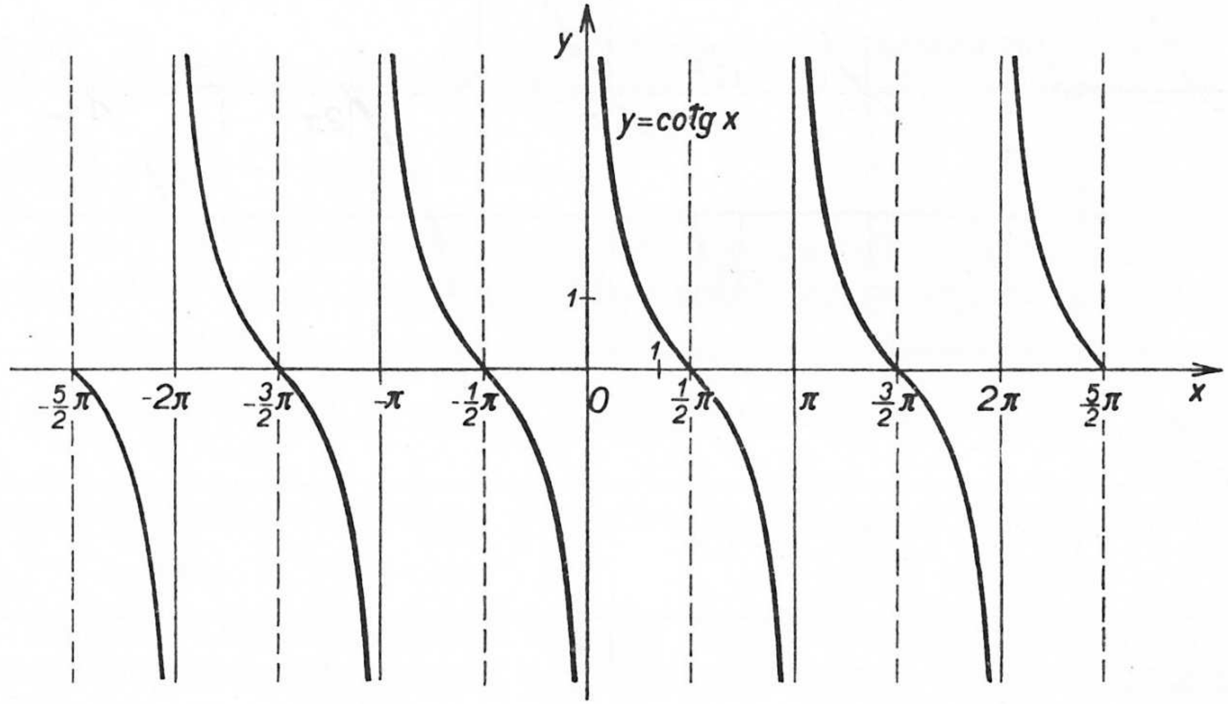
Je **lichá**: tg (-x) = - tg x.
Je **rostoucí** pro x ϵ (-π/2 + kπ ; π/2 + kπ), kϵ Z.
Není omezená shora ani zdola.
Maximum ani minimum neexistuje.
Perioda π: tg x = tg (x + kπ), kϵ Z.
Spojitost: Není definována pro x=(2k+1) π/2), kϵ Z.

5 Graf funkce cotangens

$f : y = \text{cotg}\, x$

= **cotangentoida**





Vlastnosti:

$D(f) = R - \{k\pi\}, k \in Z,\ H(f) = R$

Je **lichá**: cotg (-x) = - cotg x.
Je **klesající** pro x ϵ (kπ ; π + kπ), kϵ Z.
Není omezená shora ani zdola.
Maximum ani minimum neexistuje.
Perioda π: cotg x = cotg (x + kπ), kϵ Z.
Spojitost: Není definována pro x=2kπ/2, kϵ Z.

6 Důležité hodnoty goniometrických funkcí

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	není def.	0	není def.	0
cotg x	není def.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	není def.	0	není def.

7 Znaménka hodnot goniometrických funkcí

Kvadrant	I.	II.	III.	IV.
Interval argumentu x	$\left(0, \frac{1}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{1}{2}\pi, \pi\right)$	$\left(\pi, \frac{3}{2}\pi\right)$	$\left(\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right)$
$\sin x$	+	+	-	-
$\cos x$	+	-	-	+
$\operatorname{tg} x$	+	-	+	-
$\operatorname{cotg} x$	+	-	+	-

Úlohy

<u>Př.:</u> Vypočítejte:

$$a)\sin\frac{\pi}{2}=$$

$$b)\cos\frac{7}{6}\pi=$$

$$c)\cos\frac{13}{4}\pi=$$

$$d)\sin\frac{14}{3}\pi=$$

$$e)\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right)=$$

$$f)\sin\left(-\frac{21}{4}\pi\right)=$$

$$g)tg\left(-\frac{19}{6}\pi\right)=$$

8 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Základní vzorce:

$$\boxed{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathrm{R},$$

a tedy

$$|\sin \alpha| = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathrm{R}$$

$$|\cos \alpha| = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \quad \text{pro každé } \alpha \in \mathrm{R}$$

$$\boxed{\operatorname{cotg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k\frac{\pi}{2},\ k \in \mathrm{Z}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq (2k + 1)\frac{\pi}{2},\ k \in \mathrm{Z}$$

$$\boxed{1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}} \quad \text{pro každé reálné } \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathrm{Z}$$

$$\boxed{tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}} \qquad \boxed{\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}}$$

8 Vztahy mezi goniometrickými funkcemi

Vztahy pro dvojnásobek a polovinu argumentu:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$
$$\left|\sin \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$
$$\left|\cos \frac{\alpha}{2}\right| = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Součtové vzorce:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \,.\, \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin (\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$
$$\sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$
$$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$
$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

Úlohy

<u>Př.:</u> Zjednodušte goniometrické výrazy:

$$a)\ \sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x =$$

$$b)\ \frac{\sin 2x}{\cos^2 x} =$$

$$c)\ \frac{1 - tg^2 x}{\cos 2x} =$$

$$d)\ \frac{1 + \cos x + \cos 2x}{\sin x + \sin 2x} =$$

$$e)\ \frac{1 + \cot g^2 x}{\mathrm{cotg}^2 x} \cdot \frac{tg^2 x}{tg^2 x + 1} =$$

9 GONIOMETRICKÉ ROVNICE

9.1 Základní goniometrické rovnice - jsou dány ve tvaru:

$$\boxed{g(x) = a}$$

g – některá z goniometrických funkcí sin, cos, tg, cotg

a – reálné číslo

Úlohy

Př.1:

$a)\ \sin x = -0{,}5$

$b)\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$c)\ tg\, x = \sqrt{3}$

$d)\ \text{cotg}\, x = 1$

$e)\ \sin x = -1$

$f)\ \cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

9.2 Složitější goniometrické rovnice – řešíme převedením na základní goniometrické rovnice (pomocí substituce, nebo s použitím vzorců pro goniometrické funkce).

Úlohy

Př.1: *Řešte užitím substituce:*

$a)\ 2\sin(3x+\pi) = -1$

$b)\ 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$

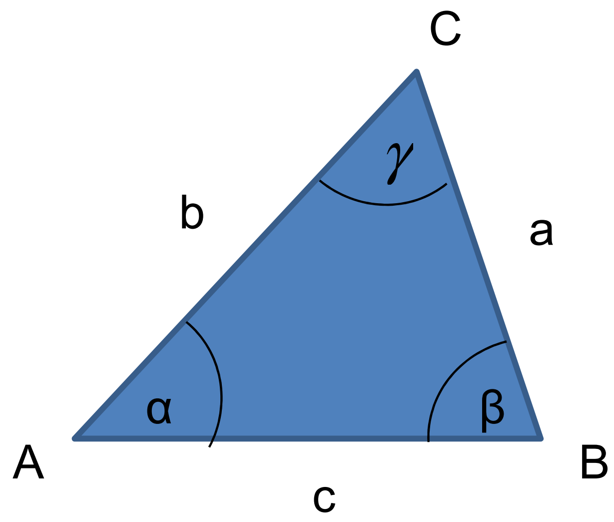
Př.2: *Řešte užitím goniometrických vzorců*:

$a)\ \cos x + \text{cotg}\, x = 1 + \sin x$

10 Další využití goniometrických funkcí: TRIGONOMETRIE

Sinová věta:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



Kosinová věta:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Užití sinové a kosinové věty:

Např.: Při výpočtu výslednice dvou sil, které spolu svírají úhel α.

Literatura

- Delventhal, K., M., Kissner, A., Kulick, M. Kompendium matematiky. Praha: Euromedia Group k. s., 2003.
- Bušek, I. a kol. Základní poznatky z matematiky. Matematika pro gymnázia, Praha: Prometheus, 1992.
- Odvárko, O. a kol. Matematika pro gymnázia – Goniometrie. Praha: Prometheus, 1997.
- Polák, J. Přehled středoškolské matematiky. Praha: Prometheus, 1998.
- Vošický Zdeněk. Matematika v kostce pro střední školy. Havlíčkův Brod: Fragment, 2003.