Gaussova eliminační metoda

přednáška 3

Př. 1

$$\left.\begin{aligned} x+2y+3z&=9\\ 2x-y+z&=8\\ 3x\qquad -z&=3 \end{aligned}\right]$$

Tento systém lineárních rovnic napíšeme do matice, kterou pomocí elementárních řádkových úprav převedeme na schodový tvar = v každém dalším řádku je více nul směrem zleva než v tom předchozím, popřípadě už je celý další řádek nulový

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 2 & -1 & 1 & 8\\ 3 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1\\ -3\cdot r_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & -5 & -5 & -10\\ 0 & -6 & -10 & -24 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \cdot\left(-\frac{1}{5}\right)\\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 5 & 12 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 9\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

nyní si zjednodušené rovnice vypíšeme ve zpětném chodu (zdola nahoru)

$$x+2\cdot(-1)+3\cdot 3=9 \Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$$

$$y+3=2 \Rightarrow \underline{\underline{y=-1}}$$

$$2z=6 \Rightarrow \underline{\underline{z=3}}$$

řešením rovnice je jediná trojice hodnot

$$\left.\begin{aligned} x&=2\\ y&=-1\\ z&=3 \end{aligned}\right]$$

(tuto trojici považujeme za jedno řešení)

Př. 2

$$\begin{aligned} x+y+2z-5w&=3\\ 2x+5y-z-9w&=-3\\ 2x+y-z+3w&=-11\\ x-3y+2z+7w&=-5 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3\\ 2 & 5 & -1 & -9 & -3\\ 2 & 1 & -1 & 3 & -11\\ 1 & -3 & 2 & 7 & -5 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -2\cdot r_1\\ -2\cdot r_1\\ -r_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3\\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9\\ 0 & -1 & -5 & 13 & -17\\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1)\\ \\ \end{array}$$

vyměníme 2. a 3. řádek, protože na pozici (2,2) bude pak 1 nebo −1, a tak se snáze pomocí $a_{22}=1$ zkonstruují nuly ve 2. sloupci :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -9 \\ 0 & -4 & 0 & 12 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -3\cdot r_2 \\ +4\cdot r_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & -20 & 40 & -60 \\ 0 & 0 & 20 & -40 & 60 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\left(\frac{-1}{20}\right) \\ +r_3 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & -13 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

nenulových řádků v příslušném schodovitém tvaru je méně než počet neznámých, řešení tedy bude nekonečně mnoho; výsledek bude obsahovat parametry (= libovolné reálné číslo), jejich počet je roven

počet parametrů = počet neznámých MINUS počet nenulových řádků ve schodovitém tvaru

$$1 = 4 - 3$$

řešení v našem příkladu bude obsahovat 1 parametr $p \in R$;

dosadíme nyní zpětným chodem dosazování do rovnic a v první rovnici zdola zvolíme jednu neznámou rovnu parametru p:

$$x + (2+3p) + 2\cdot(3+2p) - 5p = 3 \Rightarrow \underline{x = -5-2p}$$

$$y + 5\cdot(3+2p) - 13p = 17 \Rightarrow \underline{y = 2+3p}$$

$$z - 2w = 3: \quad \underline{w = p}, \quad \underline{z = 3+2p}$$

daný systém lineárních rovnic má nekonečně mnoho řešení

$$\begin{aligned} x &= -5-2p \\ y &= 2+3p \\ z &= 3+2p \\ w &= p \end{aligned} \quad \text{pro } p \in R$$

Množinou řešení je přímka ve čtyřrozměrném prostoru

$$\underline{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + p\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

... přímka prochází bodem $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ a má směrový vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Př. 3

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + x_5 \phantom{{}+2x_6} &= 2 \\
x_1 + 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 + 2x_6 &= 3 \\
x_1 + 2x_2 \phantom{{}+x_3} - 3x_4 + 2x_5 + x_6 &= 4 \\
3x_1 + 6x_2 + x_3 - 9x_4 + 4x_5 + 3x_6 &= 9
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 2 & 1 & -3 & 1 & 2 & 3 \\
1 & 2 & 0 & -3 & 2 & 1 & 4 \\
3 & 6 & 1 & -9 & 4 & 3 & 9
\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ -r_1 \\ -r_1 \\ -3\cdot r_1\end{array} \sim \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 3
\end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \\ -r_2-r_3\end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 2 & 0 & -3 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

počet parametrů $= 6 - 3 = 3$

$r, s, t \in \mathbb{R}$

ve zpětném chodu bereme rovnice zdola a volíme za parametry počet neznámých v dané rovnici MINUS jedna, abychom poslední neznámou v každé rovnici mohli dopočítat pomocí ostatních neznámých

$$x_1 + 2x_2 + 0 - 3x_4 + (2-t) = 1 : \quad \begin{cases} x_1 = -1 - 2r + 3s + t \\ x_2 = r \\ x_4 = s \end{cases}$$

$$x_3 + 2t = 1 \Rightarrow x_3 = 1 - 2t$$

$$x_5 + x_6 = 2 : \quad x_6 = t, \quad x_5 = 2 - t$$

řešení je nekonečně mnoho a tvoří trojrozměrný podprostor šestirozměrného prostoru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pro } r, s, t \in \mathbb{R}$$

Podprostor řešení je určen bodem a lineární kombinací tří vektorů, kterou přičítáme k danému bodu

Př. 4

$$\begin{aligned} x+2y+3z+4w&=5\\ x+3y+5z+7w&=11\\ x-z-2w&=-6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 3 & 5 & 7 & 11\\ 1 & 0 & -1 & -2 & -6 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -r_1\\ -r_1\end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & -2 & -4 & -6 & -11 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ +2\cdot r_2\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 1 & 2 & 3 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

sice je ve schodovitém tvaru více neznámých než nenulových řádků, ale řešení neexistuje žádné, protože první nenulová rovnice zdola je

$$0\cdot x+0\cdot y+0\cdot z+0\cdot w=1,$$

a taková rovnice nemá řešení!

Poznámka: nelze jen tak zbůhdarma provádět řádkové úpravy, jak se nám líbí:

cyklus představuje neekvivalentní úpravu:

$$\text{cyklus}\quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -r_3\\ -r_2\end{matrix}$$

vlastně tutéž úpravu uděláme dvakrát a napíšeme ji do dvou různých řádků

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_3 &= r\in R \ \dots \text{parametr}\\ x_2 &= -1\\ x_1 &= 2-r \end{aligned}\right\} \text{toto řešení je špatně!!}$$

dostali jsme závislé řádky, i když původní r_2, r_3 lineárně závislé nebyly

Nejedná se o ekvivalentní úpravu, protože jsme ztratili informaci o třetí rovnici, která není lineárně závislá na druhé rovnici

k cíli vede kaskáda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -2\cdot r_1\\ -r_2\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot(-1)\\ -r_2\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{aligned} x_1&=-1\\ x_2&=-1\\ x_3&=3 \end{aligned}$$

nebo pivotový řádek = jediný řádek, jehož násobky odčítáme od ostatních řádků

1. řádek je pivotový řádek

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -2\cdot r_1\\ -2\cdot r_1\end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -1 & -2\\ 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot(-1)\\ -2\cdot r_2\end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{aligned} x_1&=-1\\ x_2&=-1\\ x_3&=3 \end{aligned}$$

jediné správné řešení zde je $x_1=-1$, $x_2=-1$, $x_3=3$