3. Mocninné a Taylorovy řady

A. Obor a poloměr konvergence

Příklad 3.1. Určeme poloměr konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(kx)^k}{k\,!} = x + \frac{4}{2!}x^2 + \frac{27}{3!}x^3 + \dots .$$

Řešení. Daná mocninná řada má střed $x_0 = 0$ a koeficienty $a_k = k^k/k!$. Její poloměr určíme pomocí $\lim_{k\to\infty} \left|a_{k+1}/a_k\right|$. Nejprve upravíme výraz

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{(k+1)^{k+1}}{(k+1)\,!}\frac{k\,!}{k^k}\right| = \frac{(k+1)^k}{k^k} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^k .$$

Pak

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^k = \mathrm{e},$$

a tedy $R = 1/\rho = 1/\mathrm{e}$.

Příklad 3.2. Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^k}{k^2 2^k} = \frac{3x+1}{2} + \frac{(3x+1)^2}{2^2 2^2} + \frac{(3x+1)^3}{3^2 2^3} + \dots .$$

Řešení. Nejprve k-tý člen řady upravme jako $\frac{3^k (x+\frac{1}{3})^k}{k^2 2^k}$, tj. $a_k = \frac{1}{k^2}\left(\frac{3}{2}\right)^k$, $x_0 = -\frac{1}{3}$. Protože

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{(k+1)^2}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1} \cdot k^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^2,$$

dostáváme

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{3}{2}.$$

Tedy $R = 2/3$ a konvergenční interval má krajní body $x_0 - R = -1$, $x_0 + R = 1/3$. Dosazením těchto krajních bodů do dané řady dostáváme po úpravě řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$, resp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, které obě konvergují (první podle Leibnizova kritéria, a druhá podle integrálního kritéria, viz také příklad 1.10). Odtud

$$I^\star = \langle -1, 1/3 \rangle .$$

Příklad 3.3. Určete obor konvergence mocninné řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3k}}{k 8^k} = \frac{(x-1)^3}{8} + \frac{(x-1)^6}{2\cdot 8^2} + \frac{(x-1)^9}{3\cdot 8^3} + \dots .$$

Řešení. Jde o mocninnou řadu se středem v bodě $x_0 = 1$, která však není zapsána v obvyklém tvaru $\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$. Nebudeme proto postupovat pomocí vzorce pro výpočet poloměru R (ten by bylo třeba modifikovat), nýbrž obecnějším postupem známým pro funkční řady. Užitím např. limitního odmocninového kritéria máme

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|f_k(x)|} = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\frac{(x-1)^{3k}}{k8^k}\right|} = \frac{|x-1|^3}{8} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}} = \frac{|x-1|^3}{8}.$$

Mocninná řada tedy konverguje, je-li $\frac{|x-1|^3}{8} < 1$, tedy $|x-1| < 2$, tj. $-1 < x < 3$. Vně tohoto intervalu pak řada nekonverguje. Dosazením krajních bodů $x = 3$ a $x = -1$ obdržíme (divergentní) harmonickou a (konvergentní) Leibnizovu řadu. Dostáváme tedy, že oborem konvergence je interval $\langle -1, 3)$.

Příklad 3.4. Určete poloměr konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k\,!)^3}{(3k)\,!} x^k$.

Řešení. Nejprve odvodíme vztah $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)^2}{3(3k+2)(3k+1)}$ (viz také příklad 1.18). Odtud $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{1}{27}$, tedy $R = 27$.

Příklad 3.5. Určete obor konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} k\,!(x+1)^k$.

Řešení. Platí $\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}(k+1) = \infty$, tedy $R = 0$ a odtud $I^\star = \{-1\}$.

Příklad 3.6. Udejte příklad mocninné řady, která má obor konvergence:

$$\text{a)}\ (0,4)\,, \quad \text{b)}\ \langle 0,4)\,, \quad \text{c)}\ (0,4\rangle\,, \quad \text{d)}\ \langle 0,4\rangle\,.$$

Řešení. Z tvaru všech intervalů plyne $x_0 = 2$, $R = 2$, tj. $\rho = \frac{1}{2}$. Zvolíme-li tedy např. $a_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k$, pak zřejmě $\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2}$. Příslušná řada $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{2^k}$ pak konverguje na otevřeném intervalu $(0,4)$, o čemž se přesvědčíme dosazením krajních bodů (v tomto případě dokonce není splněna ani nutná podmínka konvergence).

Příklady zbývajících řad nyní můžeme získat modifikací výše uvedené řady. Vynásobením člene a_k faktorem $\frac{1}{k}$ nezměníme poloměr konvergence (neboť $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k} = 1$), avšak můžeme tím ovlivnit konvergenci v krajních bodech. Skutečně, dosazením lze snadno ověřit, že konvergenční interval řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k2^k}$ je $\langle 0,4)$.

Případ za c) zřejmě získáme snadno prohozením znamének v předchozí řadě, tj. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{(x-2)^k}{k2^k}$.

Konečně případu za d) vyhovuje například řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k^2 2^k}$, protože opět platí $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k^2} = 1$ a po dosazení krajních bodů dostáváme konvergentní řady $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k^2}$, resp. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

B. Rozvoje funkcí v Taylorovy řady

Příklad 3.7. Určete rozvoj funkcí $f(x) = \sinh x$, $\cosh x$ a $\operatorname{arctgh} x$ se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Především připomeňme, že $\sinh x = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\cosh x = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$, $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$. K nalezení požadovaných vyjádření tedy užijeme známých rozvojů funkcí e^x a $\ln(1+x)$, ze kterých pomocí substituce $(x \to -x)$ snadno určíme rozvoje e^{-x} a $\ln(1-x)$. Připomeňme ještě, že mocninné řady konvergují uvnitř oboru konvergence absolutně, tj. můžeme zde použít komutativního zákona (tj. zákona o záměně sčítanců).

Platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)\,, \\
\mathrm{e}^{-x} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k!} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)\,.
\end{aligned}$$

Sečtením, resp. odečtením těchto vztahů a následným vynásobením hodnotou $1/2$ dostáváme

$$\begin{aligned}\cosh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)\,,\\ \sinh x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad x \in (-\infty, +\infty)\,.\end{aligned}$$

Na základě vztahů

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad x \in (-1, 1\rangle\,,\\ \ln(1-x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{2k+1} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots, \quad x \in \langle -1, 1)\end{aligned}$$

dostáváme vyjádření

$$\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots, \quad x \in (-1, 1)\,,$$

kde $(-1, 1) = (-1, 1\rangle \cap \langle -1, 1)$.

Příklad 3.8. Pomocí rozvojů funkcí $\ln(1+x)$ a $\operatorname{arctgh} x$ vyjádřete hodnotu $\ln 2$ ve tvaru číselné řady (tj. pomocí základních aritmetických operací).

Řešení. Dosazením $x = 1 \in (-1, 1\rangle$ do rozvoje funkce $\ln(1+x)$ dostáváme

$$\ln 2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\,,$$

tedy hodnota $\ln 2$ je součtem tzv. Leibnizovy řady.

Nyní k vyjádření $\ln 2$ užijeme rozvoje funkce $\operatorname{arctgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$. Protože

$$\frac{1+x}{1-x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3} \in (-1, 1),$$

dostáváme dosazením hodnoty $x = \frac{1}{3}$ do rozvoje $\operatorname{arctgh} x$

$$\ln 2 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)3^{2k+1}} = \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{9}\right)^k = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots\right).$$

Mezi oběma vyjádřeními $\ln 2$ je však podstatný rozdíl, a to v rychlosti konvergence. Určíme, kolik členů v obou řadách je třeba sečíst k vypočtení hodnoty $\ln 2$ např. s chybou menší než 10^{-4}. V případě Leibnizovy řady platí

$$|R_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < 10^{-4} \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 10^4,$$

tj.

$$\ln 2 \approx 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{10000} = 0{,}6931.$$

V druhém vyjádření $\ln 2$ lze zbytek odhadnout pomocí součtu majorantní geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{9}$. Platí

$$\begin{aligned}R_n = \frac{2}{3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \left(\frac{1}{9}\right)^k \le \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2n+3} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^k = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{\frac{1}{9^{n+1}}}{1 - \frac{1}{9}} =\\ = \frac{3}{4(2n+3)9^{n+1}} < 10^{-4} \iff n \ge 3.\end{aligned}$$

S požadovanou přesností tedy máme

$$\ln 2 \approx 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 3^5} + \frac{1}{7\cdot 3^7}\right) = 0,6931.$$

Příklad 3.9. Je dána funkce $f(x) = \frac{1}{x^2}\sin\frac{x^2}{2}$. Nalezněte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninnou řadu se středem $x_0 = 0$, určete obor konvergence a pomocí tohoto rozvoje pak vypočtěte $\lim_{x\to 0} f(x)$ a $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ s chybou menší než 10^{-4}.

Řešení. Provedeme rozvoj pomocí substituce. Platí

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3\,!} + \frac{t^5}{5\,!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{t^{2k+1}}{(2k+1)\,!}\,, \qquad t\in(-\infty,\infty).$$

Zavedeme substituci $t = \frac{x^2}{2}$, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} \sin\frac{x^2}{2} &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{2^3\cdot 3\,!} + \frac{x^{10}}{2^5\cdot 5\,!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k+2}}{2^{2k+1}(2k+1)\,!}\,, \quad x\in(-\infty,\infty)\,,\\ \frac{1}{x^2}\sin\frac{x^2}{2} &= \frac{1}{2} - \frac{x^4}{2^3\cdot 3\,!} + \frac{x^8}{2^5\cdot 5\,!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{4k}}{2^{2k+1}(2k+1)\,!}\,, \quad x\in(-\infty,\infty)\,. \end{aligned}$$

Odtud pak snadno

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{x^2}{2}\right) = \frac{1}{2} - 0 + 0 - \cdots = \frac{1}{2}.$$

Ježto mocninné řady lze uvnitř oboru konvergence integrovat člen po členu, dostáváme dále

$$\begin{aligned} \int_0^1\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x &= \int_0^1\left(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2^3\cdot 3\,!} + \frac{x^8}{2^5\cdot 5\,!} - \cdots\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\frac{1}{2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1\frac{x^4}{2^3\cdot 3\,!}\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_0^1\frac{x^8}{2^5\cdot 5\,!}\,\mathrm{d}x - \cdots = \frac{1}{2}[x]_0^1 - \frac{1}{5\cdot 2^3\cdot 3\,!}[x^5]_0^1 + \frac{1}{9\cdot 2^5\cdot 5\,!}[x^9]_0^1 - \cdots\\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{5\cdot 2^3\cdot 3\,!} + \frac{1}{9\cdot 2^5\cdot 5\,!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(4k+1)2^{2k+1}(2k+1)\,!}\,. \end{aligned}$$

Protože tato alternující řada splňuje podmínky Leibnizova kritéria a platí

$$|a_2| = \frac{1}{9\cdot 2^5\cdot 5\,!} < 10^{-4},$$

dostáváme s požadovanou přesností

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x^2}\sin\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{5\cdot 2^3\cdot 3\,!} \approx 0,4958.$$

Příklad 3.10. Určete rozvoj funkce $f(x) = \sin^2 x$ v Taylorovu řadu se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Pomocí vztahu $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$ a rozvoje funkce

$$\cos 2x = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2x)^{2k}}{(2k)\,!} = 1 - \frac{2^2x^2}{2\,!} + \frac{4^2x^4}{4\,!} - \ldots, \quad x\in(-\infty,\infty)$$

máme

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2x)^{2k}}{(2k)!} = \frac{1}{2}\left(\frac{2^2x^2}{2\,!} - \frac{4^2x^4}{4\,!} + \ldots\right), \quad x\in(-\infty,\infty)\,.$$

Příklad 3.11. Určete první dva nenulové členy rozvoje funkce $f(x) = \operatorname{tg} x$ v Taylorovu řadu se středem v bodě $x_0 = 0$.

Řešení. Platí $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$, přičemž $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $f''(x) = 2\frac{\sin x}{\cos^3 x}$, $f'''(x) = 2\frac{1+2\sin^2 x}{\cos^4 x}$, tedy $a_0 = 0$, $a_1 = \frac{1}{1!}$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{2}{3!} = \frac{1}{3}$ a odtud

$$\operatorname{tg} x \approx x + \frac{1}{3}x^3 .$$

Příklad 3.12. Vyjádřete $\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ s chybou menší než 10^{-2}.

Řešení. Pomocí substituce ukážeme, že platí

$$\cos\sqrt{x} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^k}{(2k)!} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \dots, \qquad x \geq 0$$

a tedy integrací člen po členu máme

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k+1)(2k)!} = 1 - \frac{1}{2\cdot 2!} + \frac{1}{3\cdot 4!} - \frac{1}{4\cdot 6!} + \dots .$$

Protože $\frac{1}{4\cdot 6!} < 10^{-2}$, s požadovanou přesností máme

$$\int_0^1 \cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{72} \approx 0,76.$$

Příklad 3.13. Určete přibližně číslo $\sqrt{\mathrm{e}}$ s chybou menší jak 10^{-4}.

Řešení. Využijeme rozvoje

$$\mathrm{e}^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pro $x = 1/2$ máme

$$\sqrt{\mathrm{e}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Pro n-tý zbytek r_n platí

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}(k-1)!} \leq \frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{n!}\frac{1}{2^n}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} < 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{n!2^n} < \frac{1}{10000} \Rightarrow n!2^n > 20000 \Rightarrow n \geq 6 .$$

Požadované přesnosti tedy dosáhneme sečtením prvních 6 členů:

$$\sqrt{\mathrm{e}} \doteq \frac{1}{2^0 0!} + \frac{1}{2^1 1!} + \frac{1}{2^2 2!} + \frac{1}{2^3 3!} + \frac{1}{2^4 4!} + \frac{1}{2^5 5!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{48} + \frac{1}{384} + \frac{1}{3840} = 1,648698 .$$

Příklad 3.14. Určete přibližně číslo π s chybou menší jak 10^{-4}.

Řešení. Využijeme vztahu $\pi = 4\operatorname{arctg} 1$. Přibližnou hodnotu tedy lze spočítat dosazením bodu $x = 1$ do řady

$$4\operatorname{arctg} x = 4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}, \qquad \forall x \in \langle -1; 1\rangle .$$

Problémem je, že tato řada konverguje velmi pomalu – požadovanou přesnost bychom dostali až po sečtení 20 000 členů, což je ručně neproveditelné (viz Leibnizovo kritérium). Potřebujeme tedy rychleji konvergentní řadu. Využijeme-li vztahu $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$ pro $xy < 1$, potom lze psát

$$\operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\,,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{1}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{2n-1}(2n-1)}\,, \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3^{2n-1}(2n-1)}$$

$$4 \operatorname{arctg} 1 = \left(\frac{4}{2^1 1} + \frac{4}{3^1 1}\right) - \left(\frac{4}{2^3 3} + \frac{4}{3^3 3}\right) + \left(\frac{4}{2^5 5} + \frac{4}{3^5 5}\right) - \left(\frac{4}{2^7 7} + \frac{4}{3^7 7}\right) + \left(\frac{4}{2^9 9} + \frac{4}{3^9 9}\right) - \\ - \left(\frac{4}{2^{11} 11} + \frac{4}{3^{11} 11}\right) + \underbrace{\left(\frac{4}{2^{13} 13} + \frac{4}{3^{13} 13}\right)}_{<10^{-4}} - \cdots + \,.$$

Sečtením prvních 6 členů tedy dostáváme $\pi \doteq 3,141562$.