MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

7. Eulerovské grafy

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

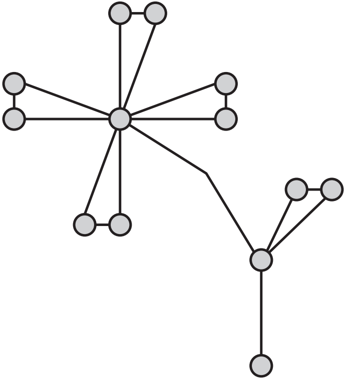
28. 11. 2017

Program prezentace

1. Zavedení Eulerovských grafů
2. Procházení labyrintů
3. Hledání eulerovských tahů
4. Použité zdroje

Úvodní příklad

Nakreslete jedním tahem květinu zobrazenou na následujícím grafu.



Úkol spočívající v nakreslení eulerovského tahu.

Eulerovský tah a graf

Definice 2.3 (MILKOVÁ):

- **Eulerovský tah** v grafu G je uzavřený nebo otevřený tah, který obsahuje všechny hrany grafu G.
- **Eulerovský graf** je souvislý graf G, ve kterém existuje eulerovský tah.

Historická poznámka: Název se vztahuje ke slavnému švýcarskému matematikovi Leonardovi Eulerovi (1707–1783), který v r. 1736 řešil

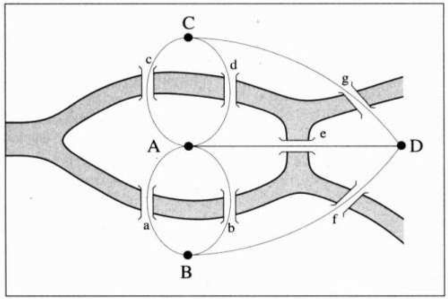
Problém sedmi mostů města Královce

(původně Königsberg, dnes Kaliningrad na Kaliningradském území Ruska mezi Polskem a Litvou, do r. 1945 hlavní město Východního Pruska).

Jde o první příspěvek k teorii grafů a rok 1736 je pokládán za počátek teorie grafů.

Problém sedmi mostů města Královce

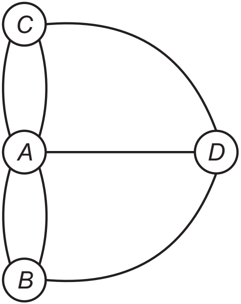
Ve městě Královec jsou v centru města na řece Pregel (dnes Pregolya) dva ostrovy, které v 18. století spojovalo s oběma břehy sedm mostů:



Obyvatelé města při procházkách často přemýšleli, zda by bylo možné projít se městem tak, aby procházku začali v jednom místě, přešli všechny mosty, přes každý právě jednou, a vrátili se tam, kde začali.

Problém sedmi mostů města Královce

Převedeno do teorie grafů: existuje v následujícím grafu uzavřený eulerovský tah?



Leonard Euler ukázal, že to není možné, a dokonce formuloval obecnou charakteristiku úloh daného typu.

Nutná a postačující podmínka pro Eulerovský graf

Věta 2.2 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je eulerovský *právě tehdy, když* G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

Nutná a postačující podmínka pro Eulerovský graf

Věta 2.2 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je eulerovský *právě tehdy, když* G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky): jedná se tvrzení tvaru logické ekvivalence, je tedy třeba ukázat oba implikační směry:

1. "$\Rightarrow$:" Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.
2. "$\Leftarrow$:" Graf G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně $\Rightarrow$ G je eulerovský.

Nutná a postačující podmínka pro Eulerovský graf

Věta 2.2 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je eulerovský *právě tehdy, když* G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky): jedná se tvrzení tvaru logické ekvivalence, je tedy třeba ukázat oba implikační směry:

1. "$\Rightarrow$:" Graf G je eulerovský $\Rightarrow$ G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.
2. "$\Leftarrow$:" Graf G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně $\Rightarrow$ G je eulerovský.

Směr "$\Rightarrow$" si nyní ukážeme. Pro směr "$\Leftarrow$" budeme potřebovat několik pomocných tvrzení.

Důkaz Věty 2.2 ve směru “$\Rightarrow$”

Předpokládejme, že je graf G eulerovský. Z definice 2.1 tedy je souvislý a existuje v něm (uzavřený či otevřený) eulerovský tah T obsahující všechny hrany grafu G.

1

2

Důkaz Věty 2.2 ve směru “$\Rightarrow$”

Předpokládejme, že je graf G eulerovský. Z definice 2.1 tedy je souvislý a existuje v něm (uzavřený či otevřený) eulerovský tah T obsahující všechny hrany grafu G.

1. Je-li T **uzavřený**, pak každý vrchol G, kterým tah minimálně jednou prochází, je sudého stupně. Pro každý $v \in V$ totiž platí $\deg_G(v) = 2p$, kde p počet výskytů vrcholu v v tahu T.
2.

Důkaz Věty 2.2 ve směru “$\Rightarrow$”

Předpokládejme, že je graf G eulerovský. Z definice 2.1 tedy je souvislý a existuje v něm (uzavřený či otevřený) eulerovský tah T obsahující všechny hrany grafu G.

1. Je-li T **uzavřený**, pak každý vrchol G, kterým tah minimálně jednou prochází, je sudého stupně. Pro každý $v \in V$ totiž platí $\deg_G(v) = 2p$, kde p počet výskytů vrcholu v v tahu T.
2. Je-li T **otevřený**, pak počáteční a koncový vrchol tahu T mají lichý stupeň. Ostatní *vnitřní* vrcholy tahu T mají sudý stupeň.

Připomenutí a první pomocné tvrzení

Pro připomenutí:

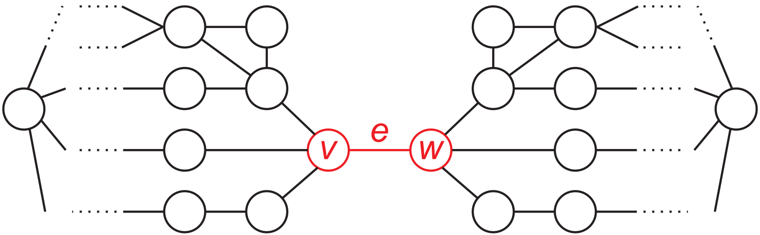
- **Důsledek 1.1** (Milková): Počet vrcholů lichého stupně v grafu G je sudý.
- **Důsledek 1.2** (Milková): Hrana grafu je buď most nebo leží na nějaké kružnici grafu.
- **Definice:** Graf $G = (V, E)$ nazveme **sudým grafem**, jsou-li všechny vrcholy $v \in V$ sudého stupně.

Tvrzení 2.1 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Jestliže je graf G sudý, pak G neobsahuje most.

Důkaz: provedeme sporem, tj. předpokládejme, že existuje sudý graf $G = (V, E)$, který obsahuje most: hranu $e = \{v, w\}$, viz následující slajd.

Důkaz Tvrzení 2.1

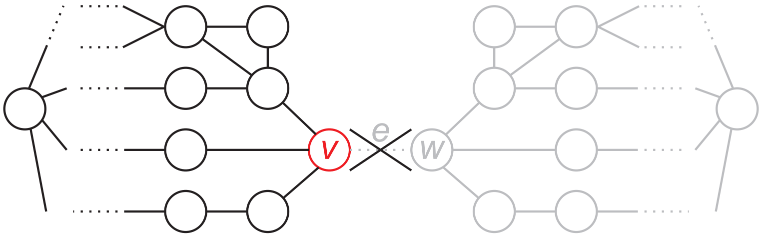
Graf G s mostem $e = \{v, w\}$:



Z grafu odebereme hranu e a podíváme se na komponentu Q_1 obsahující vrchol v.

Důkaz Tvrzení 2.1

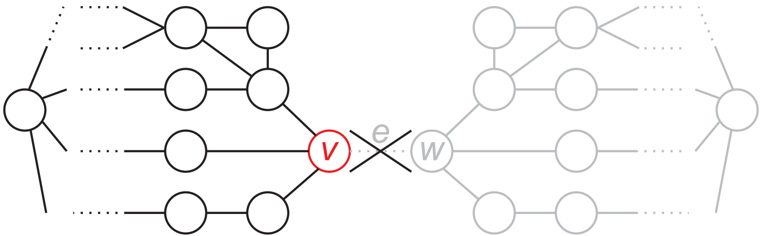
Komponenta Q_1 s vrcholem v:



Protože graf G byl sudý, jsou všechny vrcholy komponenty Q_1 sudého stupně s výjimkou vrcholu v, u něhož se po odebrání hrany e změnil stupeň ze sudého na lichý.

Důkaz Tvrzení 2.1

Komponenta Q_1 s vrcholem v:



Protože graf G byl sudý, jsou všechny vrcholy komponenty Q_1 sudého stupně s výjimkou vrcholu v, u něhož se po odebrání hrany e změnil stupeň ze sudého na lichý.

Spor s Důsledkem 1.1 (počet vrcholů lichého stupně grafu musí být sudý) $\Rightarrow$ platí Tvrzení 2.1: *Sudý graf neobsahuje most.*

Druhé pomocné tvrzení

Tvrzení 2.2 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Jestliže graf G je sudý, pak každá hrana grafu G leží na nějaké kružnici grafu G.

Důkaz:

Druhé pomocné tvrzení

Tvrzení 2.2 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Jestliže graf G je sudý, pak každá hrana grafu G leží na nějaké kružnici grafu G.

Důkaz:

1. Dle Důsledku 1.2 je hrana libovolného grafu buď most nebo leží na nějaké kružnici grafu.
2. Dle Tvrzení 2.1 sudý graf neobsahuje most.

Druhé pomocné tvrzení

Tvrzení 2.2 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Jestliže graf G je sudý, pak každá hrana grafu G leží na nějaké kružnici grafu G.

Důkaz:

1. Dle Důsledku 1.2 je hrana libovolného grafu buď most nebo leží na nějaké kružnici grafu.
2. Dle Tvrzení 2.1 sudý graf neobsahuje most.

Z toho vyplývá, že každá hrana sudého grafu leží na nějaké kružnici.

Třetí pomocné tvrzení

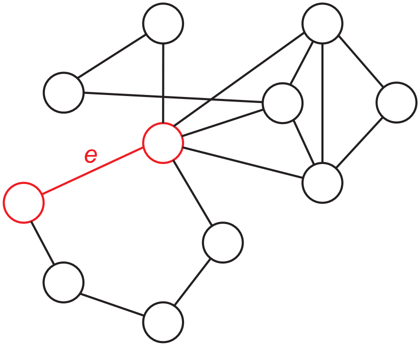
Tvrzení 2.3 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Jestliže graf G je sudý, pak graf G lze zapsat jako sjednocení kružnic, které jsou navzájem po dvou hranově disjunktní.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky):

Třetí pomocné tvrzení

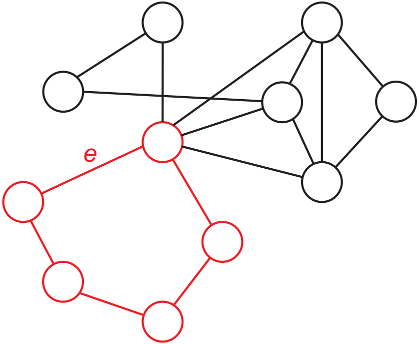
Tvrzení 2.3 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Jestliže graf G je sudý, pak graf G lze zapsat jako sjednocení kružnic, které jsou navzájem po dvou hranově disjunktní.

Důkaz (nebude vyžadován u zkoušky): Nechť $G = (V, E)$ je sudý graf a e jeho libovolná hrana, viz následující ilustrační obrázek.



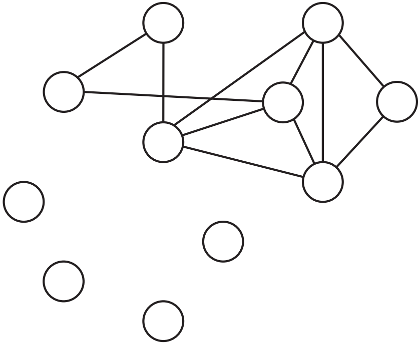
Důkaz Tvrzení 2.3

Dle Tvrzení 2.2 leží hrana e na nějaké kružnici C:



Důkaz Tvrzení 2.3

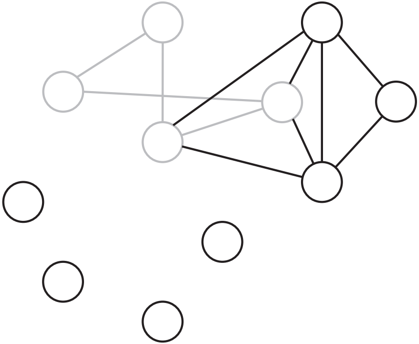
Když odebereme všechny hrany kružnice C z grafu G, dostaneme opět sudý graf:



Proč? Vyjmutím hran kružnice se stupeň libovolného vrcholu kružnice sníží přesně o dva, tj. zůstane sudý.

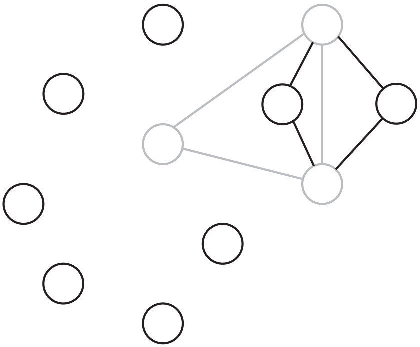
Důkaz Tvrzení 2.3

Postup opakujeme tak dlouho, dokud získáme graf $G' = (V, \emptyset)$:



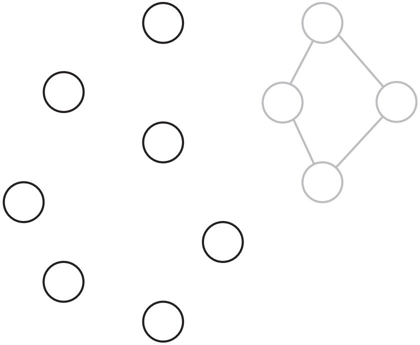
Důkaz Tvrzení 2.3

Postup opakujeme tak dlouho, dokud získáme graf $G' = (V, \emptyset)$:



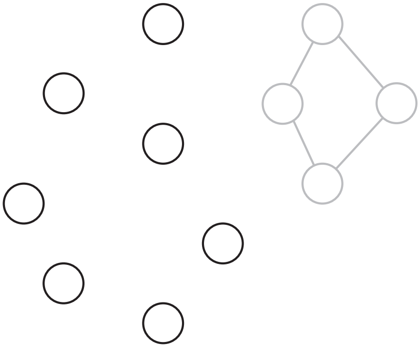
Důkaz Tvrzení 2.3

Postup opakujeme tak dlouho, dokud získáme graf $G' = (V, \emptyset)$:



Důkaz Tvrzení 2.3

Postup opakujeme tak dlouho, dokud získáme graf $G' = (V, \emptyset)$:



Když postupně sjednotíme kružnice, které jsme před chvílí odebírali (a které byly hranově disjunktní), dostaneme původní graf G.

Dokončení důkazu Věty 2.2

Vraťme se zpátky k Větě 2.2:

Věta 2.2 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je eulerovský *právě tehdy, když* G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

Už jsme dokázali směr "$\Rightarrow$".

Dokončení důkazu Věty 2.2

Vraťme se zpátky k Větě 2.2:

Věta 2.2 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je eulerovský *právě tehdy, když* G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

Už jsme dokázali směr "$\Rightarrow$".

Chybí dokázat směr "$\Leftarrow$:"
(*) Graf G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně $\Rightarrow$ G je eulerovský.

Dokončení důkazu Věty 2.2

Vraťme se zpátky k Větě 2.2:

Věta 2.2 (MILKOVÁ): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí:
Graf G je eulerovský *právě tehdy, když* G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně.

Už jsme dokázali směr "$\Rightarrow$".

Chybí dokázat směr "$\Leftarrow$:"
(*) Graf G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně $\Rightarrow$ G je eulerovský.

Nejdříve si tvrzení (*) dokážeme pro souvislý graf, v němž jsou všechny vrcholy sudého stupně. Provedeme to matematickou indukcí vzhledem k počtu hran m, $m \geq 1$.

Důkaz Věty 2.2 ve směru "$\Leftarrow$"

Mějme sudý souvislý graf G.

Důkaz Věty 2.2 ve směru "$\Leftarrow$"

Mějme sudý souvislý graf G.

Báze: Nejmenší sudý souvislý graf G má 3 hrany – jedná se o kružnici (trojúhelník) $C_3 \Rightarrow$ kružnice C_3 je uzavřený eulerovský tah.

Důkaz Věty 2.2 ve směru “$\Leftarrow$”

Mějme sudý souvislý graf G.

Báze: Nejmenší sudý souvislý graf G má 3 hrany – jedná se o kružnici (trojúhelník) $C_3 \Rightarrow$ kružnice C_3 je uzavřený eulerovský tah.

Indukční předpoklad: Sudý souvislý graf s počtem hran $\leq m$ obsahuje uzavřený eulerovský tah.

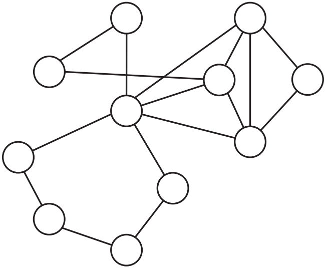
Důkaz Věty 2.2 ve směru “$\Leftarrow$”

Mějme sudý souvislý graf G.

Báze: Nejmenší sudý souvislý graf G má 3 hrany – jedná se o kružnici (trojúhelník) C_3 $\Rightarrow$ kružnice C_3 je uzavřený eulerovský tah.

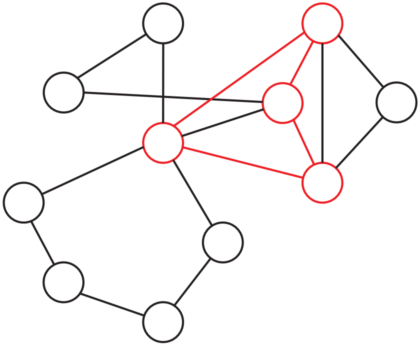
Indukční předpoklad: Sudý souvislý graf s počtem hran $\leq m$ obsahuje uzavřený eulerovský tah.

Indukční krok: Uvažujme sudý souvislý graf, který má $m + 1$ hran.



Indukční krok důkazu Věty 2.2 ve směru “$\Leftarrow$”

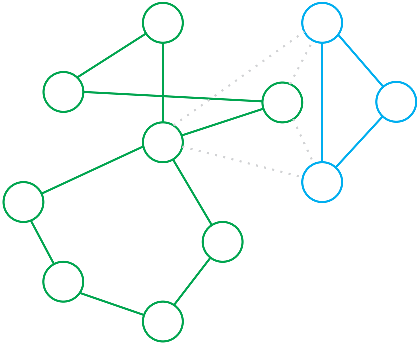
Dle Tvrzení 2.3 je sudý graf sjednocením několika kružnic navzájem hranově disjunktních. Vybereme některou z těchto kružnic a označíme ji C:



Po odebrání hran kružnice C bude graf $G' = (V, E - \{e \in C\})$ sudý, ne však nutně souvislý.

Indukční krok důkazu Věty 2.2 ve směru "$\Leftarrow$"

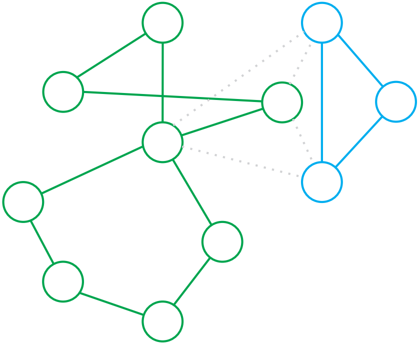
Zbylé komponenty grafu G' jsou sudé grafy, které mají určitě $\leq m$ hran:



Tyto komponenty obsahují dle IP uzavřené eulerovské tahy (jsou souvislé a mají $\leq m$ hran).

Indukční krok důkazu Věty 2.2 ve směru “$\Leftarrow$”

Komponenty (uzavřené eulerovské tahy) spojíme do grafu G hranami kružnice C a získáme uzavřený eulerovský tah o $m + 1$ hranách.



Platí tedy:
(**) *Sudý souvislý graf obsahuje uzavřený eulerovský tah.*

Indukční krok důkazu Věty 2.2 ve směru “$\Leftarrow$”

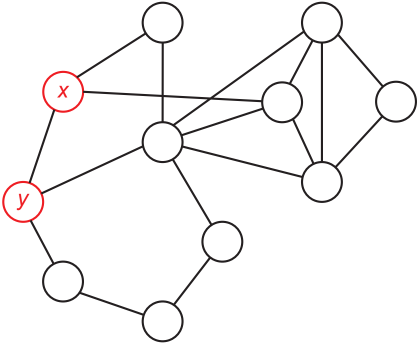
Chtěli jsme dokázat Větu 2.2 ve směru “$\Leftarrow$”, tj. tvrzení:

(*) Graf G je souvislý a má buď všechny vrcholy sudého stupně nebo právě dva vrcholy lichého stupně $\Rightarrow$ G je eulerovský.

Pro sudé souvislé grafy je již tvrzení (*) je dokázáno.

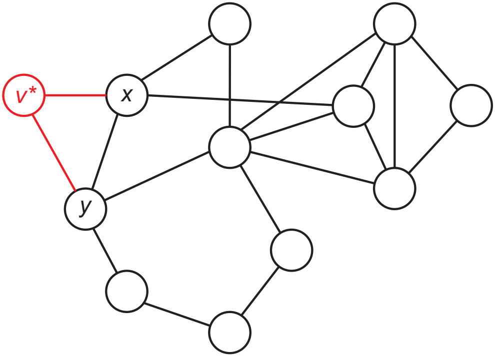
Indukční krok důkazu Věty 2.2 ve směru “$\Leftarrow$”

Uvažujme tedy souvislý graf $G = (V, E)$ s právě dvěma vrcholy $x, y \in V$ lichého stupně. Chceme ukázat, že G obsahuje otevřený eulerovský tah.



Indukční krok důkazu Věty 2.2 ve směru "$\Leftarrow$"

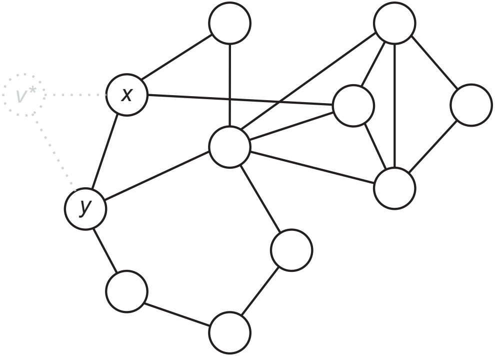
Spojíme vrcholy x, y s novým uzlem v^* a vytvoříme **sudý** graf $G' = (V \cup \{v^*\}, E \cup \{\{x, v^*\}, \{y, v^*\}\}$:



Nový sudý a souvislý graf G' obsahuje, dle dokázaného tvrzení (**), uzavřený eulerovský tah.

Indukční krok důkazu Věty 2.2 ve směru "$\Leftarrow$"

Odebráním uzlu v^* z grafu G' získáme otevřený eulerovský tah v grafu G.



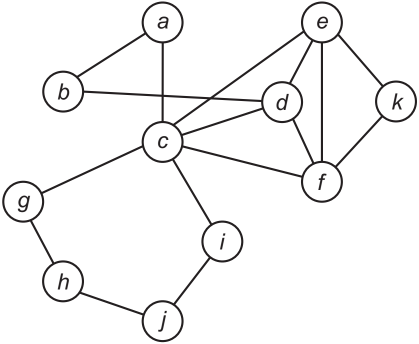
Souvislý graf G s právě dvěma vrcholy lichého stupně je tudíž eulerovský.

Eulerovské vs. Hamiltonovské grafy

- Věta 2.2 je jednoznačným kritériem pro rozhodnutí, zda je zadaný graf eulerovský. Takovou nutnou a postačující podmínku jsme pro hamiltonovské grafy neměli.
- K rozlišení obou typů grafů nám pomůže následující srovnání:
  1. **Eulerovský** graf = problém **průzkumníka** (vydává se na průzkum všech ulic města nebo jeho části, chtěl by každou ulici projít právě jednou).
  2. **Hamiltonovský** graf = problém **cestujícího** (vyjíždí na putování po určených městech a chtěl by si trasu naplánovat tak, aby každé navštívil právě jednou).

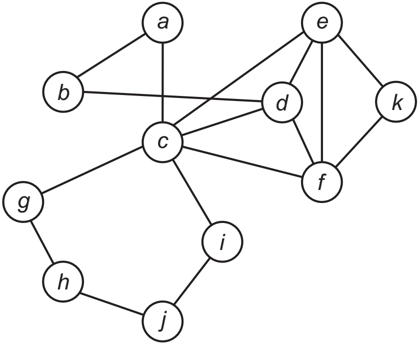
Příklad 2.4

Určete, zda je následující graf eulerovský.



Příklad 2.4

Určete, zda je následující graf eulerovský.



Řešení: zapíšeme si skóre grafu: (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 6). Jedná se o souvislý a sudý graf, obsahuje tedy uzavřený eulerovský tah. Graf je eulerovský.

Odklízení sněhu z chodníků

Představte si, že jste na brigádě a Vaším úkolem je odklízení sněhu z chodníků v ulicích jisté části města Brna, jejíž plánek máte k dispozici. Víte, že se jedná o ulice, které mají chodníky po obou stranách.

Jak si naplánujete úklid, aby průchod ulicemi byl efektivní (tj. abychom každou stranu ulice prošli právě jednou)?

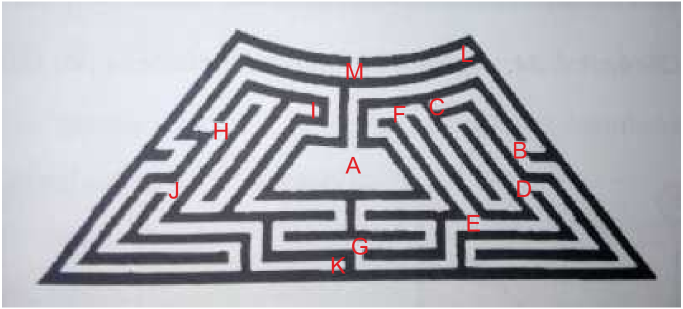
Procházení labyrintů

Ukázka bludiště v zahradě Hampton Court Palace (jihozápadní Londýn) – viz plánek:

První pokusy o nalezení algoritmu pro procházení labyrintu byly učiněny v letech 1873 až 1895 (Wiener, Trémaux, Tarry).

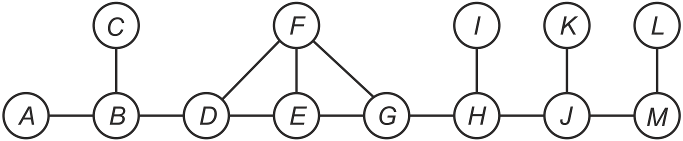
Jak labyrinty převést do grafu?

Křižovatky a konce chodeb označíme písmeny:



Jak labyrinty převést do grafu?

Písmena budou vrcholy grafu. Dva uzly x, y propojíme hranou, pokud mezi nimi existuje chodba:



Edmons-Johnsonův algoritmus

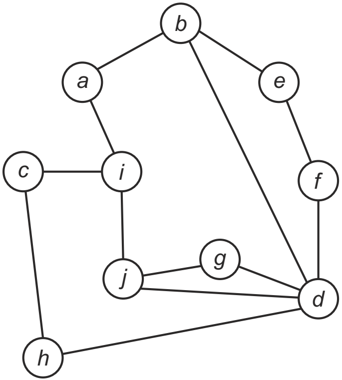
- Tarryho a Trémauxův algoritmus pro procházení labyrintu inspirovaly v r. 1973 **Edmonse a Johnsona** k formulaci vlastní metody procházení labyrintem.
- Edmons-Johnsonův algoritmus slouží k nalezení průchodu labyrintem, přičemž každou chodbu (hranu) procházíme v obou směrech (tam i zpět).
- Hlavní zásady algoritmu:
  1. Každou hranou (chodbou) můžeme projít v jednom směru nejvýše jednou.
  2. Po hraně, po které jsme do vrcholu přišli poprvé, se můžeme vracet pouze tehdy, nemáme-li jinou možnost.
  3. Z hran, které máme k odchodu z vrcholu k dispozici, upřednostňujeme tu hranu, kterou jsme dosud nikdy nešli.

Edmons-Johnsonův algoritmus – principy

1. **Označení chodby**, kterou procházíme poprvé:
   - na jejím začátku vkládáme dvě značky ••
   - na jejím konci vkládáme
     1. jednu značku •, vede-li chodba k již navštívené křižovatce,
     2. tři značky • • •, vede-li chodba k dosud nenavštívené křižovatce.
2. **Označení chodby**, kterou procházíme podruhé (tj. jdeme v opačném směru):
   - na svém začátku má jednu značku •,
   - k této značce na začátku chodby přidáme druhou značku •.
3. **Výběr chodby** k procházení, jsme-li na křižovatce:
   - primárně vybíráme chodbu, která nemá značení;
   - pokud žádná taková neexistuje, vybereme chodbu s jednou značkou • na svém začátku;
   - není-li k dispozici chodba bez značení či s jednou značkou •, vybereme chodbu se třemi značkami • • •.

Příklad 6.1

Mějme plánek města, v jehož ulicích (s chodníky na obou stranách) máme odklidit sníh. Pomocí Edmons-Johnsonova algoritmu najděte posloupnost orientovaných hran označujících průchod ulicemi při odklízení sněhu tam i zpět.

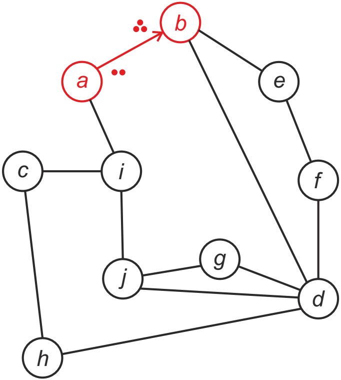


Příklad 6.1 – několik zásad

- Poprvé navštívenou chodbu budeme značit uspořádanou dvojicí (x, y), kde x je začátek chodby, y konec chodby.
- Při druhém průchodu chodbou v opačném směru zapíšeme $(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, čímž naznačíme, že už je sníh odklizen z obou chodníků ulice.
- Máme-li více možností, jakou chodbou se vydat, respektujeme lexikografické (abecední) pravidlo.

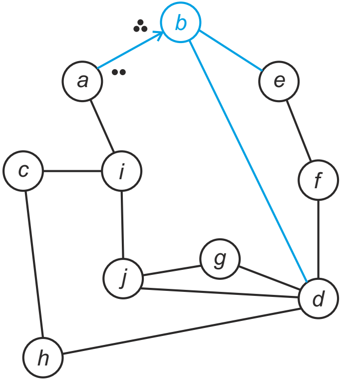
Příklad 6.1 – řešení

Začínáme ve vrcholu a, s nímž sousedí vrcholy b, i. Lexikograficky je blíž b, vydáme se chodbou do b, přičemž na její začátek vložíme ••, na její konec • • •, jelikož křižovatku b jsme ještě nenavštívili.
Navštívené chodby: $\emptyset$
Aktuální chodba: (a, b)



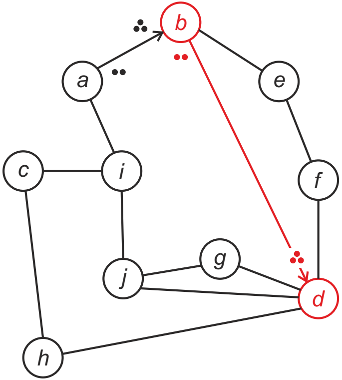
Příklad 6.1 – řešení

V křižovatce b vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Máme ještě k dispozici neoznačené chodby, takže vybereme “lexikograficky” hranu (b, d).
Navštívené chodby: (a, b)
Aktuální chodba: (b, d)



Příklad 6.1 – řešení

Označíme chodbu (b, d), přičemž na její začátek vložíme ••, na její konec • • •, jelikož křižovatku d jsme ještě nenavštívili.
Navštívené chodby: (a, b)
Aktuální chodba: (b, d)

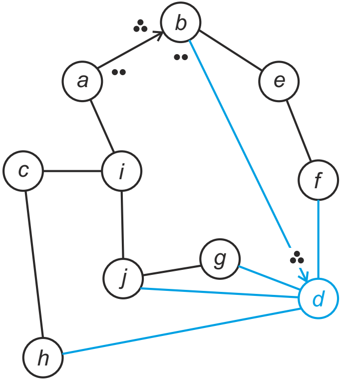


Příklad 6.1 – řešení

V křižovatce d vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Máme ještě k dispozici neoznačené chodby, takže vybereme "lexikograficky" hranu (d, f).

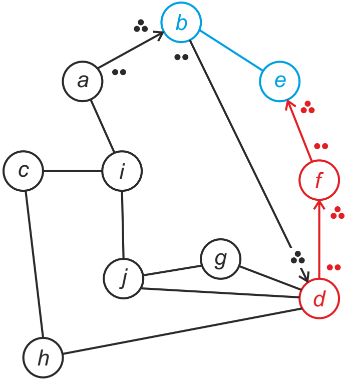
Navštívené chodby: (a, b); (b, d)

Aktuální chodba: (d, f)



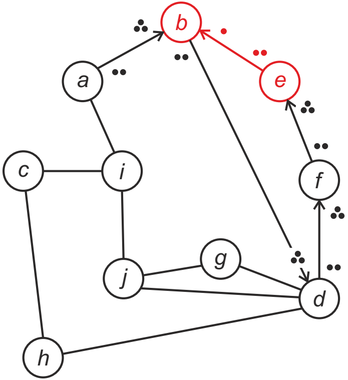
Příklad 6.1 – řešení

Ve dvou krocích projdeme hranami $(d, f); (f, e)$, jejich začátek označíme ••, konec • • •. Další hrana v pořadí je (e, b).
Navštívené chodby: $(a, b); (b, d)$
Aktuální chodba: (e, b)



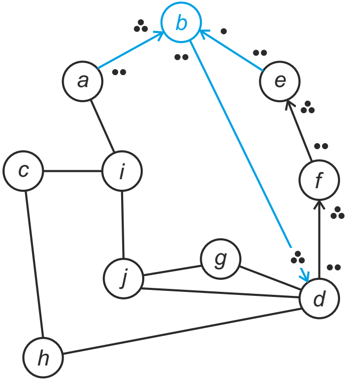
Příklad 6.1 – řešení

Označíme chodbu (e, b), přičemž na její začátek vložíme ••, na její konec pouze •, jelikož křižovatku d jsme již navštívili.
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e)
Aktuální chodba: (e, b)



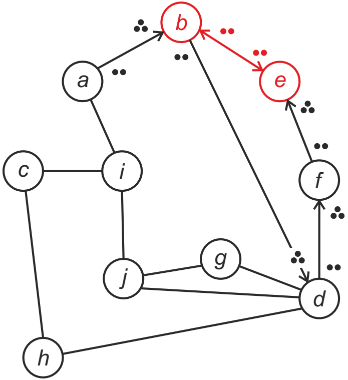
Příklad 6.1 – řešení

V křižovatce b vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Nemáme už k dispozici neoznačené chodby, vybereme tedy *zpětnou* hranu $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$ s $\bullet$.
Navštívené chodby: $(a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b)$
Aktuální chodba: $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$



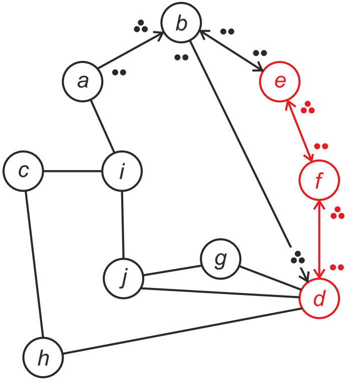
Příklad 6.1 – řešení

Označíme chodbu $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$, přičemž na její začátek doplníme • navíc, její konec necháme beze změny.
Navštívené chodby: $(a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b)$
Aktuální chodba: $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$



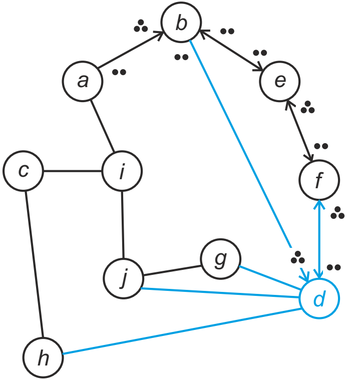
Příklad 6.1 – řešení

Ve dvou krocích projdeme zpětnými hranami $(\mathbf{e}, \mathbf{f}); (\mathbf{f}, \mathbf{d})$ a jejich značení ponecháme beze změny.
Navštívené chodby: $(a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); (\mathbf{b}, \mathbf{e}); (\mathbf{e}, \mathbf{f}); (\mathbf{f}, \mathbf{d})$



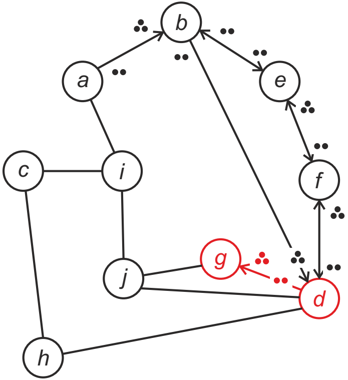
Příklad 6.1 – řešení

V křižovatce d vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Máme ještě k dispozici neoznačené chodby, takže vybereme “lexikograficky” hranu (d, g).
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$
Aktuální chodba: (d, g)



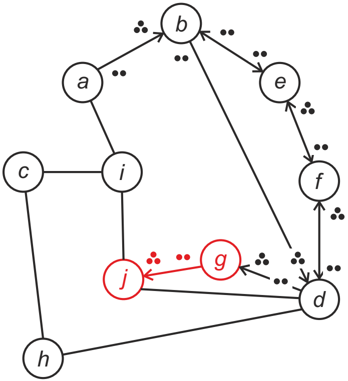
Příklad 6.1 – řešení

Označíme chodbu (d, g), přičemž na její začátek vložíme ••, na její konec • • •, jelikož křižovatku g jsme ještě nenavštívili.
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$
Aktuální chodba: (d, g)



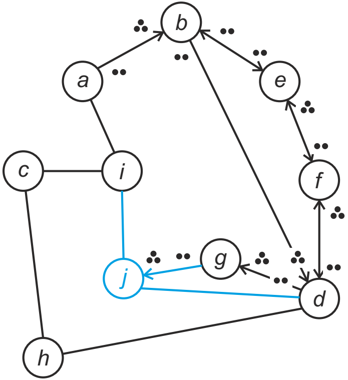
Příklad 6.1 – řešení

Označíme chodbu (g, j), přičemž na její začátek vložíme ••, na její konec • • •, jelikož křižovatku j jsme ještě nenavštívili.
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g);
Aktuální chodba: (g, j)



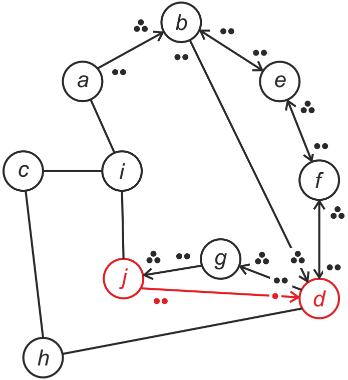
Příklad 6.1 – řešení

V křižovatce j vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Máme ještě k dispozici neoznačené chodby, takže vybereme “lexikograficky” hranu (j, d).
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j)



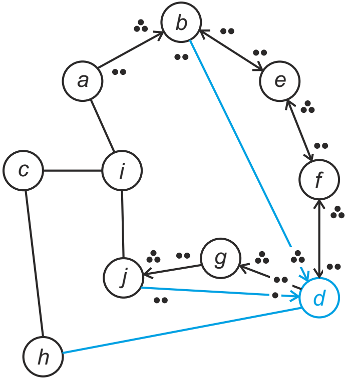
Příklad 6.1 – řešení

Označíme chodbu (j, d), přičemž na její začátek vložíme ●●, na její konec pouze ●, jelikož křižovatku d jsme již navštívili.
Navštívené chodby: $(a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); (\mathbf{b}, \mathbf{e}); (\mathbf{e}, \mathbf{f}); (\mathbf{f}, \mathbf{d});$ $(d, g); (g, j)$



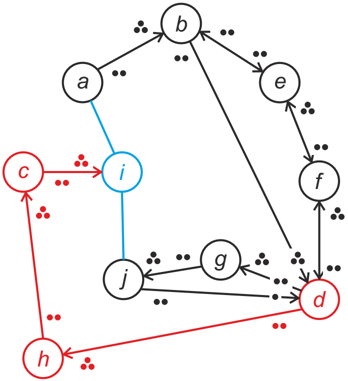
Příklad 6.1 – řešení

V křižovatce d vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Máme ještě k dispozici neoznačenou chodbu (d, h).
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d)



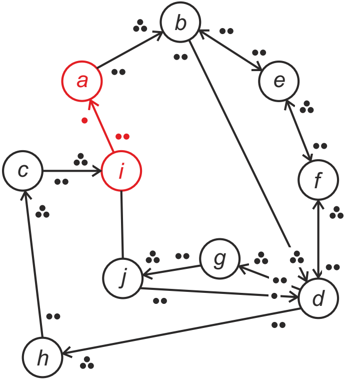
Příklad 6.1 – řešení

V několika krocích zpracujeme chodby (d, h); (h, c); (c, i), na jejichž konci jsou neznámé vrcholy – dostaneme se až ke křižovatce i, u níž "lexikograficky" vybereme hranu (i, a).
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$
(d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i)



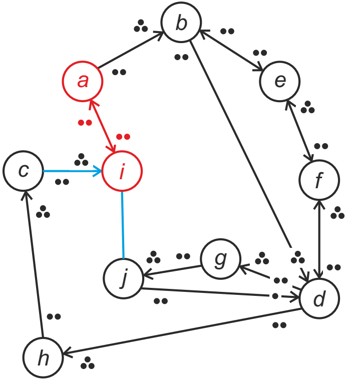
Příklad 6.1 – řešení

Hranu (i, a) projdeme v jednom směru...
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a)



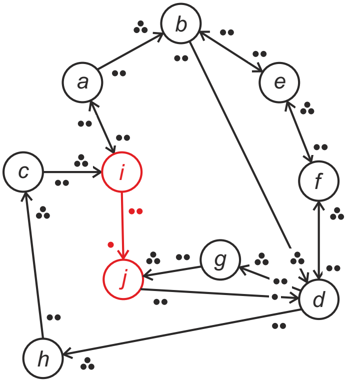
Příklad 6.1 – řešení

...i ve zpětném směru. V křižovatce i vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Máme ještě k dispozici neoznačenou chodbu (i, j).
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a); **(a, i)**



Příklad 6.1 – řešení

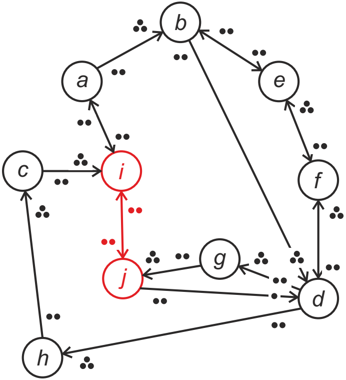
Označíme chodbu (i, j). V křižovatce j vybíráme chodbu, kterou půjdeme. Nemáme už k dispozici neoznačené chodby, vybereme tedy *zpětnou* hranu $(\mathbf{j}, \mathbf{i})$ s $\bullet$.
Navštívené chodby: $(a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); (\mathbf{b}, \mathbf{e}); (\mathbf{e}, \mathbf{f}); (\mathbf{f}, \mathbf{d});$
$(d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a);$ **(a, i)**; (i, j)



Příklad 6.1 – řešení

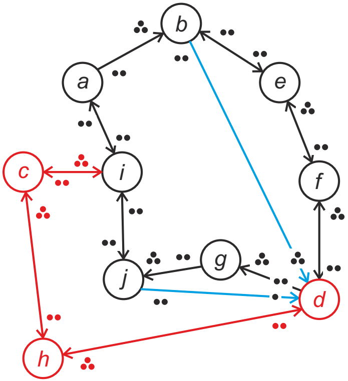
Označíme chodbu $(\mathbf{j}, \mathbf{i})$, na začátku přidáme •, protože pomocí ní přijdeme ke známé křižovatce i.

Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a); $(\mathbf{a}, \mathbf{i})$; (i, j); $(\mathbf{j}, \mathbf{i})$



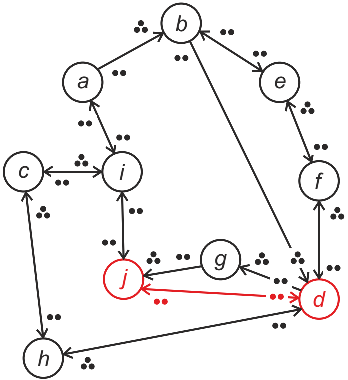
Příklad 6.1 – řešení

V několika krocích zpracujeme chodby $(\mathbf{i}, \mathbf{c}); (\mathbf{c}, \mathbf{h}); (\mathbf{h}, \mathbf{d})$ a dostaneme se až ke křižovatce d, u níž vybereme hranu $(\mathbf{d}, \mathbf{j})$ s •.
Navštívené chodby: $(a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); (\mathbf{b}, \mathbf{e}); (\mathbf{e}, \mathbf{f}); (\mathbf{f}, \mathbf{d})$; $(d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a)$; **(a, i)**; $(i, j); (\mathbf{j}, \mathbf{i}); (\mathbf{i}, \mathbf{c}); (\mathbf{c}, \mathbf{h})$; $(\mathbf{h}, \mathbf{d})$



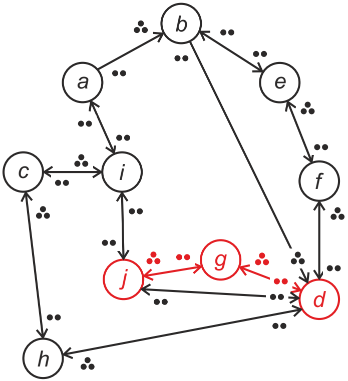
Příklad 6.1 – řešení

Označíme chodbu $(\mathbf{d}, \mathbf{j})$, na začátku přidáme •, protože pomocí ní přijdeme ke známé křižovatce j.
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a); **(a, i)**; (i, j); $(\mathbf{j}, \mathbf{i})$; $(\mathbf{i}, \mathbf{c})$; $(\mathbf{c}, \mathbf{h})$ $(\mathbf{h}, \mathbf{d})$; $(\mathbf{d}, \mathbf{j})$



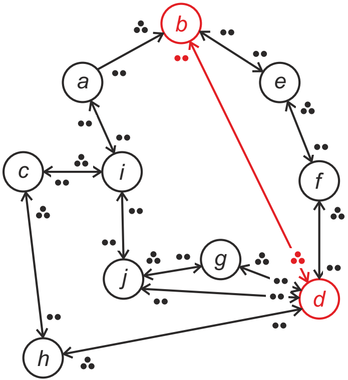
Příklad 6.1 – řešení

Ve dvou krocích projdeme zpětnými hranami $(\mathbf{j}, \mathbf{g})$; $(\mathbf{g}, \mathbf{d})$ a jejich značení ponecháme beze změny.
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a); **(a, i)**; (i, j); $(\mathbf{j}, \mathbf{i})$; $(\mathbf{i}, \mathbf{c})$; $(\mathbf{c}, \mathbf{h})$; $(\mathbf{h}, \mathbf{d})$; $(\mathbf{d}, \mathbf{j})$; $(\mathbf{j}, \mathbf{g})$; $(\mathbf{g}, \mathbf{d})$



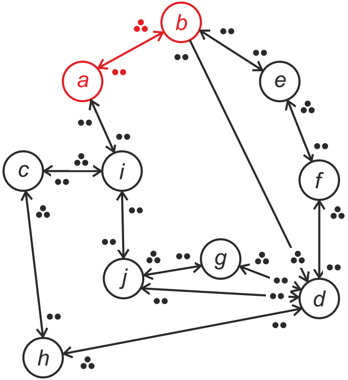
Příklad 6.1 – řešení

Na křižovatce d už máme jedinou možnost, "zpětnou" chodbu $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$ s ●●● na začátku. Pouze jí projdeme ke křižovatce b.
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a); **(a, i)**; (i, j); $(\mathbf{j}, \mathbf{i})$; $(\mathbf{i}, \mathbf{c})$; $(\mathbf{c}, \mathbf{h})$; $(\mathbf{h}, \mathbf{d})$; $(\mathbf{d}, \mathbf{j})$; $(\mathbf{j}, \mathbf{g})$; $(\mathbf{g}, \mathbf{d})$; $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$



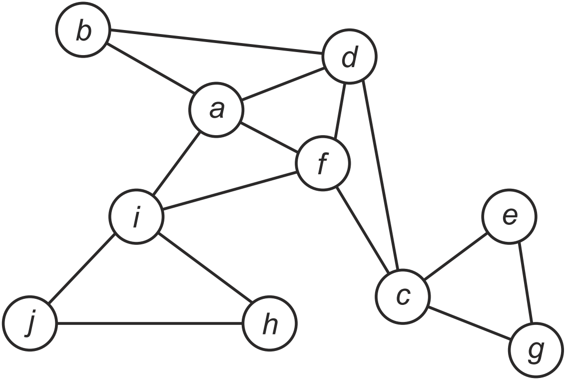
Příklad 6.1 – řešení

Dokončíme naší "pouť" průchodem chodby $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$.
Navštívené chodby: (a, b); (b, d); (d, f); (f, e); (e, b); $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$; $(\mathbf{e}, \mathbf{f})$; $(\mathbf{f}, \mathbf{d})$; (d, g); (g, j); (j, d); (d, h); (h, c); (c, i); (i, a); $(\mathbf{a}, \mathbf{i})$; (i, j); $(\mathbf{j}, \mathbf{i})$; $(\mathbf{i}, \mathbf{c})$; $(\mathbf{c}, \mathbf{h})$; $(\mathbf{h}, \mathbf{d})$; $(\mathbf{d}, \mathbf{j})$; $(\mathbf{j}, \mathbf{g})$; $(\mathbf{g}, \mathbf{d})$; $(\mathbf{d}, \mathbf{b})$; $(\mathbf{b}, \mathbf{a})$



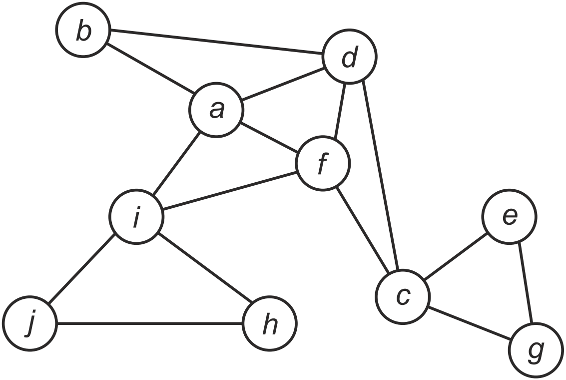
Hledání zvonků se jménem *Novák* či *Nováková*

Úloha *Zvonky*: Představme si, že máme k dispozici plánek určité městské části Brna (viz níže) a s jeho pomocí chceme projít všemi ulicemi a zjistit, přečtením jmen u zvonků každého domu, kolik se v městské části nachází domů, ve kterých bydlí Novákovi.



Hledání pamětních desek na domech

Úloha *Pamětní desky*: Mějme opět plánek stejné městské části Brna (viz níže) a s jeho pomocí chceme projít všemi ulicemi a zjistit, kolik se tam nachází domů s pamětní deskou informující o tom, že tam žil známý člověk.



Jak obě úlohy řešit?

1. Úlohu *Zvonky* řešíme pomocí algoritmů pro průchod labyrintem, protože ulice potřebujeme projít v obou směrech, abychom přečetli zvonky u každého domu.
2. Při řešení úlohy *Pamětní desky* stačí každou ulicí projít právě jednou – hledáme tedy v daném plánku eulerovský tah.

Hledání eulerovského tahu

- Když vhodně aplikujeme Edmons-Johnsonův algoritmus na eulerovský graf, můžeme pomocí něj najít eulerovský tah.
- *Zpětný průchod* hranami při Edmons-Johnsonově algoritmu určuje eulerovský tah.
- Je třeba využít datovou strukturu *zásobník* fungující na principu LIFO (Last In First Out).

Princip algoritmu pro nalezení eulerovského tahu

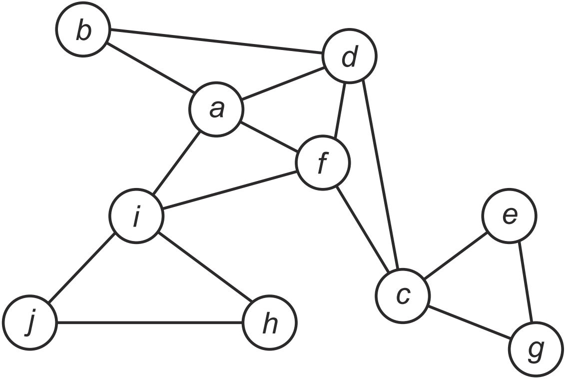
1. Začneme v nějakém vrcholu x a modrou pastelkou kreslíme nějaký tah, dokud to jde.
   - Buď skončíme znovu ve vrcholu x a našli jsme uzavřený tah.
   - Nebo skončíme v jiném vrcholu y a našli jsme otevřený tah.
   - V obou případech zbylý "neobarvený" graf je sudý $\Rightarrow$ existuje v něm uzavřený eulerovský tah.
2. Vracíme se zpět proti směru tahu a hrany označujeme červenou pastelkou, přičemž hledáme vrchol, ze kterého lze začít další tah, tj. uzel, který je incidentní s nějakou neobarvenou hranou.
3. Jakmile neobarvenou hranu najdeme, vybereme jí a pokračujeme krokem 1.
4. Pokračujeme tak dlouho, dokud máme neobarvené hrany.

Použití zásobníků

- K uchování přesné informace o průběhu tahu nakresleného modrou pastelkou používáme zásobník Z, kam vkládáme každý vrchol, kterým modrý tah prochází.
- Ke zpětné rekonstrukci zpětného průchodu nakresleného červeného pastelkou používáme zásobník ET, kam vkládáme každý vrchol, kterým zpětný červený průchod prochází.
- Na začátku algoritmu je zásobník ET prázdný, zásobník Z obsahuje
  1. libovolně vybraný vrchol v, je-li eulerovský graf sudý.
  2. jeden z vrcholů lichého stupně, obsahuje-li eulerovský graf právě dva uzly lichého stupně.
- Provádíme-li zpětný průchod, kopírujeme uzel z *vrcholu* zásobníku Z na *vrchol* zásobníku ET.
- Algoritmus končí v okamžiku, kdy je zásobník Z prázdný. V té chvíli je eulerovský tah "zaznamenán" na zásobníku ET.

Příklad 6.2

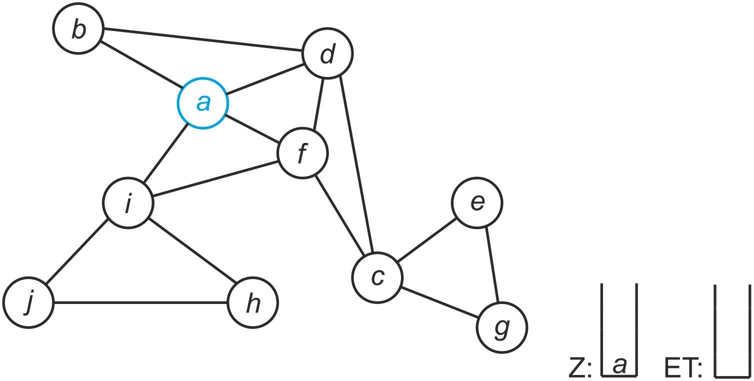
Nalezněte eulerovský tah v následujícím grafu.



Při volbě následující hrany tahu uplatňujte lexikografické pravidlo.

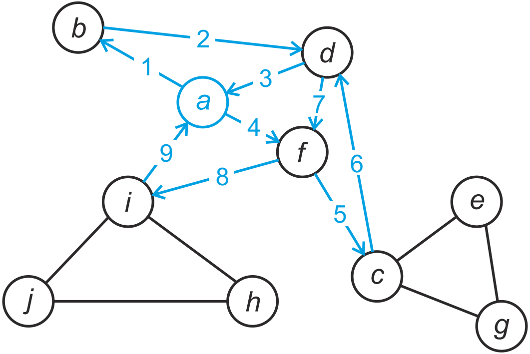
Příklad 6.2 – řešení

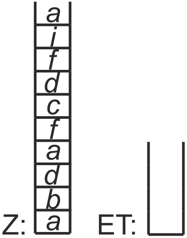
Nejdříve si připravíme zásobníky Z a ET. Začínáme ve vrcholu *a* a hledáme co nejdelší tah.



Příklad 6.2 – řešení

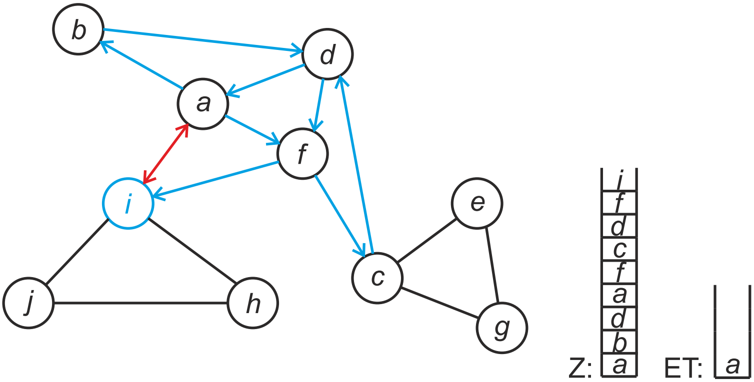
Modrou barvou vyznačíme tah, přičemž veškeré vrcholy, které projdeme, vkládáme do zásobníku Z. Skončíme ve vrcholu *a*.





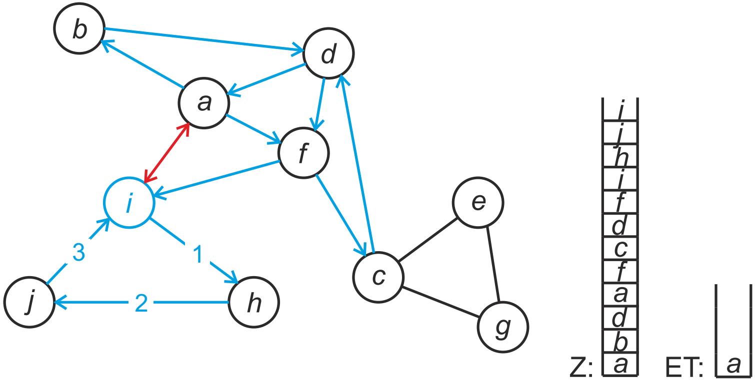
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol *a* a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



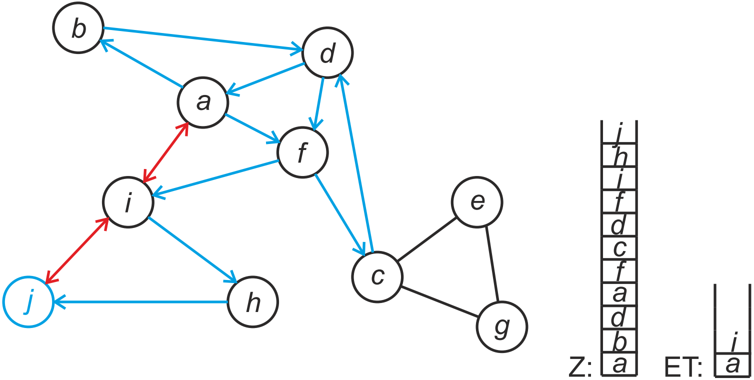
Příklad 6.2 – řešení

Modrou barvou vyznačíme tah z vrcholu i, přičemž veškeré vrcholy, které projdeme, vkládáme do zásobníku Z. Skončíme opět ve vrcholu i.



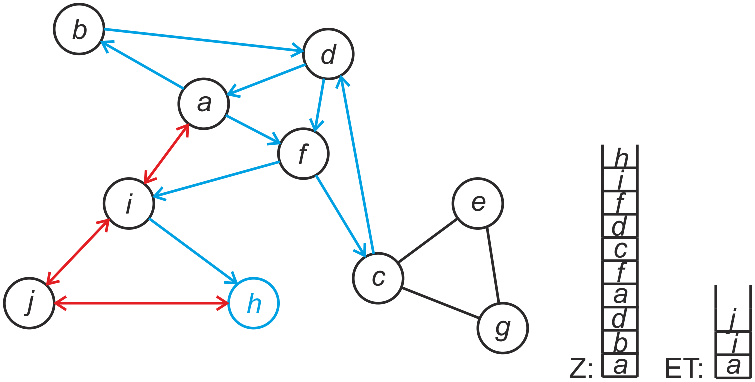
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol *i* a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



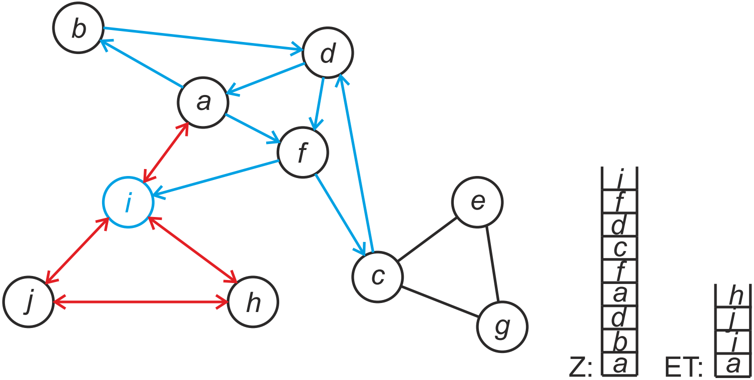
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol h a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



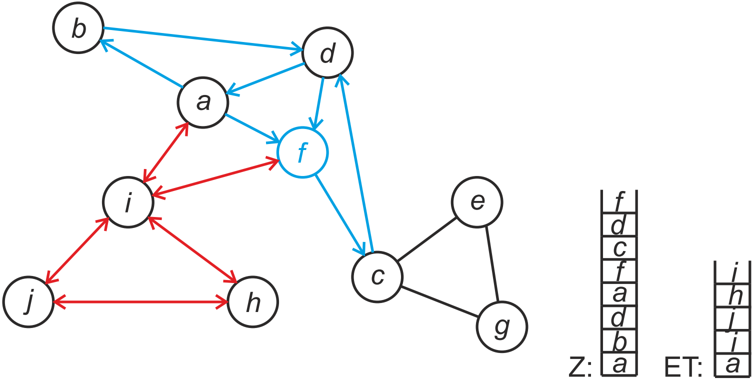
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol j a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



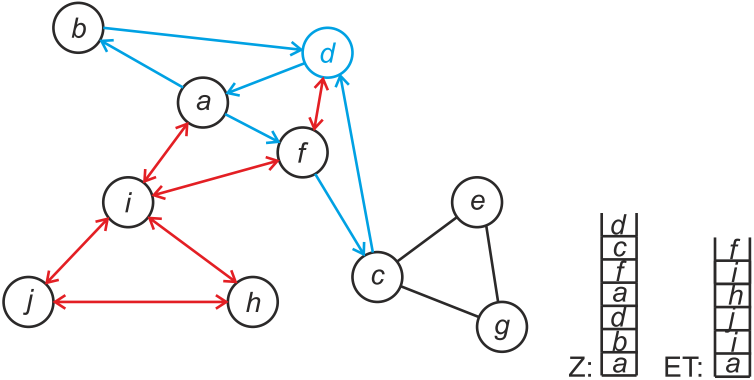
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol i a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



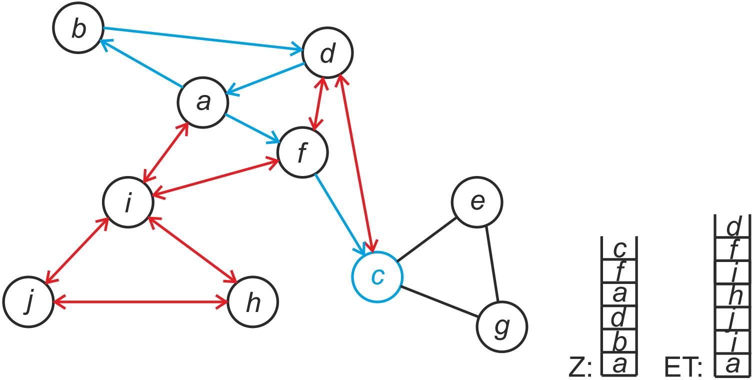
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol f a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



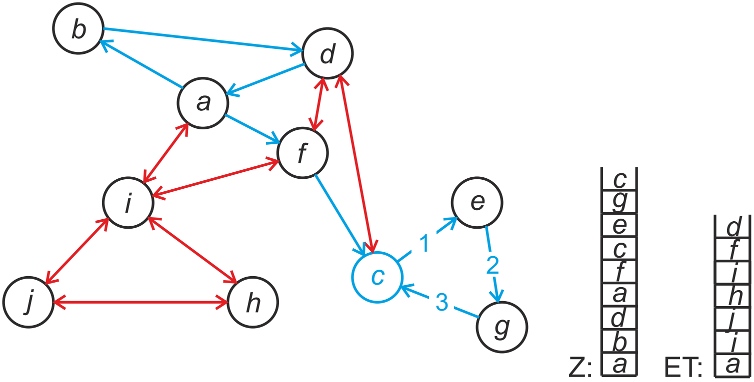
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol d a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



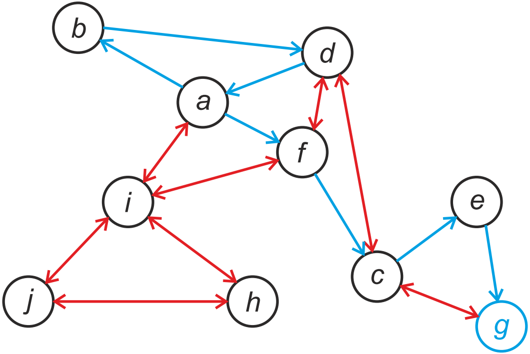
Příklad 6.2 – řešení

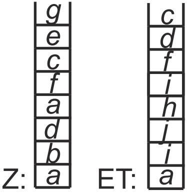
Modrou barvou vyznačíme tah z vrcholu c, přičemž veškeré vrcholy, které projdeme, vkládáme do zásobníku Z. Skončíme opět ve vrcholu c.



Příklad 6.2 – řešení

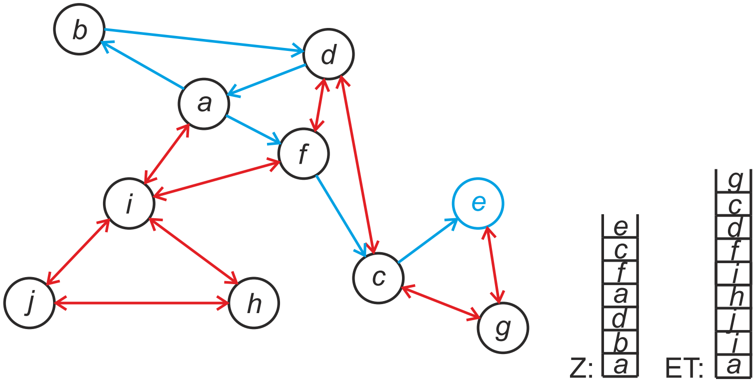
Ze zásobníku Z vezmeme vrchol c a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.





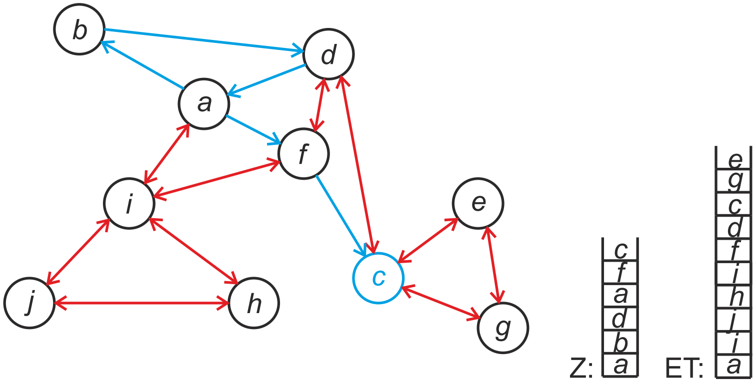
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol g a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



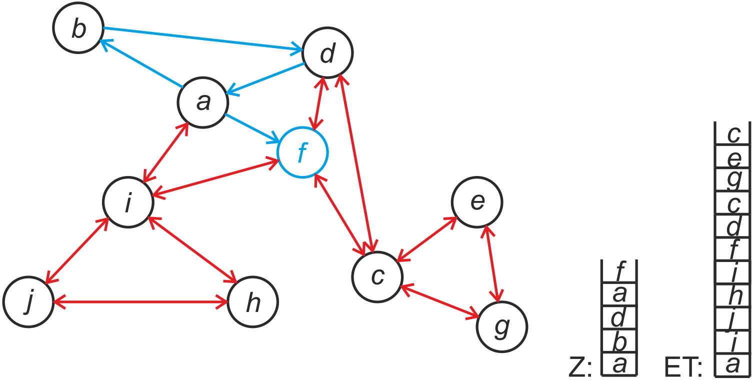
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol *e* a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



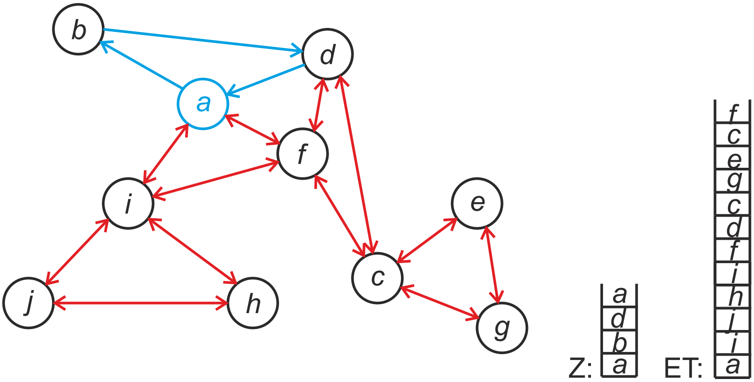
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol c a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



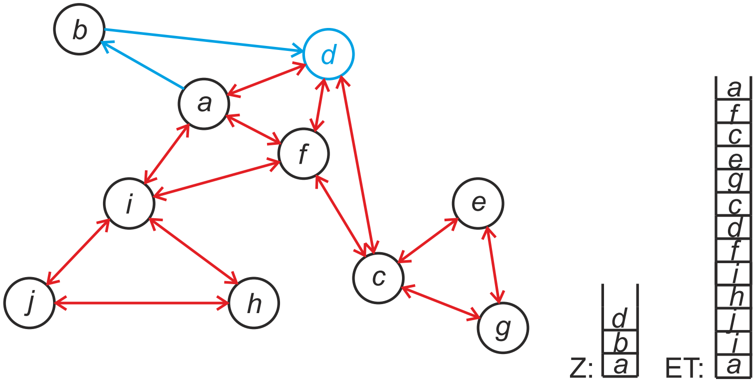
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol f a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



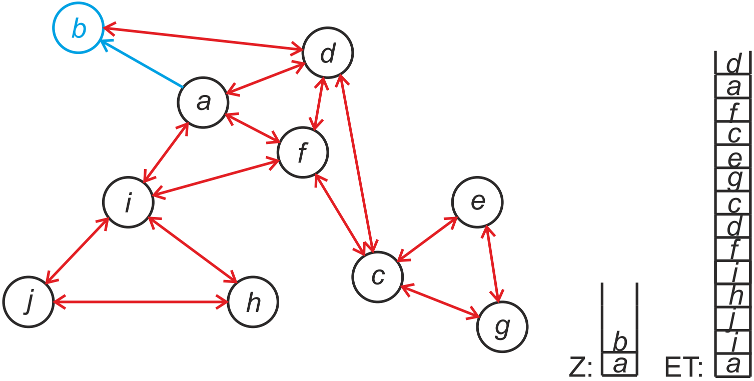
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol *a* a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



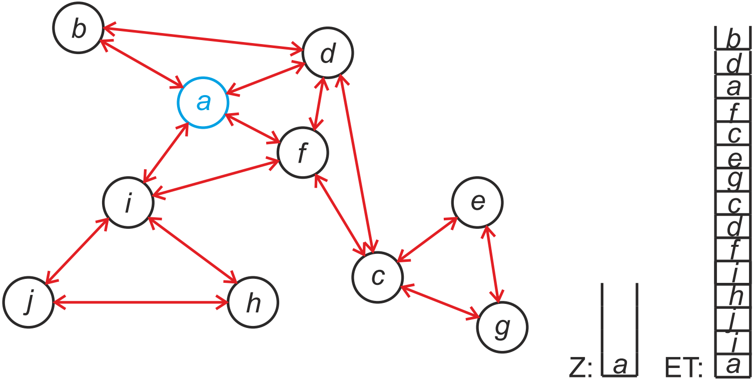
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol d a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



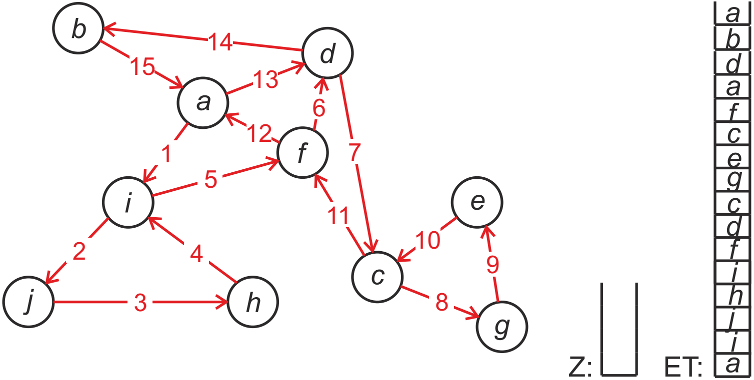
Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol *b* a vložíme jej do zásobníku ET. Nový vrchol zásobníku Z ukazuje, kam máme jít zpětnou hranou, kterou označíme červeně.



Příklad 6.2 – řešení

Ze zásobníku Z vezmeme vrchol *a* a vložíme jej do zásobníku ET. Zásobník Z je prázdný $\Rightarrow$ algoritmus je u konce. Pomocí zásobníku ET zpětně zrekonstruujeme eulerovský tah.



Použité zdroje

MILKOVÁ, Eva. *Teorie grafů a grafové algoritmy.* 1. vyd. Hradec Králové: Nakladatelství Gaudeamus, 2013. 123 s. ISBN 978-80-7435-267-6.