

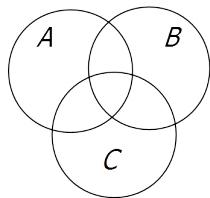
Cvičení z kombinatoriky

Princip inkluze a exkluze

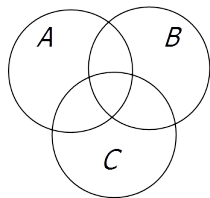
26. 11. 2018

Princip inkluze a exkluze

Princip inkluze a exkluze

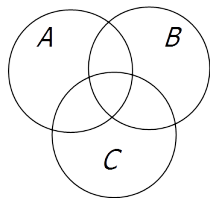


Princip inkluze a exkluze



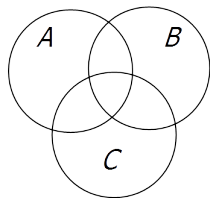
$$|A \cup B \cup C| =$$

Princip inkluze a exkluze



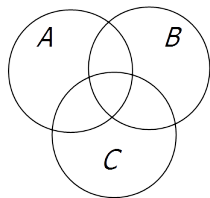
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$

Princip inkluze a exkluze



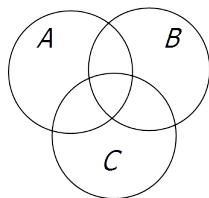
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$$

Princip inkluze a exkluze



$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & \\ & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze



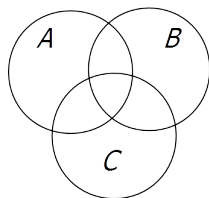
$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & \\ & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze

Nechť M_1, M_2, \dots, M_k jsou konečné množiny. Pak platí:

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = & |M_1| + |M_2| + \dots + |M_k| \\ & - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \dots - |M_{k-1} \cap M_k| \\ & + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots + |M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k| \\ & \vdots \\ & + (-1)^{k+1} |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k| \end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze



$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| = & \\ & |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| \\ & + |A \cap B \cap C| \end{aligned}$$

Princip inkluze a exkluze

Nechť M_1, M_2, \dots, M_k jsou konečné množiny. Pak platí:

$$\begin{aligned} |M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k| = & |M_1| + |M_2| + \dots + |M_k| \\ & - |M_1 \cap M_2| - |M_1 \cap M_3| - \dots - |M_{k-1} \cap M_k| \\ & + |M_1 \cap M_2 \cap M_3| + \dots + |M_{k-2} \cap M_{k-1} \cap M_k| \\ & \vdots \\ & + (-1)^{k+1} |M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k| \\ = & \sum_{\{j_1, \dots, j_r\} \subseteq \{1, \dots, k\}} (-1)^{r+1} |M_{j_1} \cap M_{j_2} \cap \dots \cap M_{j_r}| \end{aligned}$$

- 1 Určete počet všech přesmyček daného slova takových, v nichž žádné stejné hlásky neleží vedle sebe.
 - a) BONBON

- 1 Určete počet všech přesmyček daného slova takových, v nichž žádné stejné hlásky neleží vedle sebe.

a) BONBON

$$\left[\frac{6!}{2^3} - 3 \frac{5!}{2^2} + 3 \frac{4!}{2} - 3! = 30 \right]$$

- 1 Určete počet všech přesmyček daného slova takových, v nichž žádné stejné hlásky neleží vedle sebe.

a) BONBON

$$\left[\frac{6!}{2^3} - 3 \frac{5!}{2^2} + 3 \frac{4!}{2} - 3! = 30 \right]$$

b) KOMBINATORIKA

- 2 Určete počet čísel nesoudělných s číslem

a) 100

b) 350

- 3 Dokažte, že zpráva o jednom ročníku jisté ZŠ je chybná (vymyšlená?):

Do 6. ročníku chodí 45 žáků, z toho 30 chlapců. 30 žáků 6. ročníku má dobrý prospěch, z toho je 16 chlapců. Sportu se věnuje 28 žáků, z toho 18 chlapců, resp. 17 žáků, kteří mají dobrý prospěch. 15 chlapců, kteří sportují, má dobrý prospěch.

- 1 Určete počet všech přesmyček daného slova takových, v nichž žádné stejné hlásky neleží vedle sebe.
- a) BONBON $[\frac{6!}{2^3} - 3\frac{5!}{2^2} + 3\frac{4!}{2} - 3! = 30]$
b) KOMBINATORIKA
- 2 Určete počet čísel nesoudělných s číslem

- a) 100
b) 350

- 3 Dokažte, že zpráva o jednom ročníku jisté ZŠ je chybná (vymyšlená?):

Do 6. ročníku chodí 45 žáků, z toho 30 chlapců. 30 žáků 6. ročníku má dobrý prospěch, z toho je 16 chlapců. Sportu se věnuje 28 žáků, z toho 18 chlapců, resp. 17 žáků, kteří mají dobrý prospěch. 15 chlapců, kteří sportují, má dobrý prospěch.

Nápověda: Zaměřte se na dívky. Kolik z nich má dobrý prospěch, kolik jich sportuje a pro kolik platí oboje? Jsou ty údaje v pořádku?

- 1 Určete počet všech přesmyček daného slova takových, v nichž žádné stejné hlásky neleží vedle sebe.

a) BONBON

b) KOMBINATORIKA

$$\left[\frac{6!}{2^3} - 3 \frac{5!}{2^2} + 3 \frac{4!}{2} - 3! = 30 \right]$$
$$\left[\frac{13!}{16} - 4 \frac{12!}{8} + 6 \frac{11!}{4} - 4 \frac{10!}{2} + 9! \right]$$

- 2 Určete počet čísel nesoudělných s číslem

a) 100

b) 350

$$[100 - 50 - 20 + 10]$$

$$[350 - 175 - 70 - 50 + 35 + 25 + 10 - 5]$$

- 3 Dokažte, že zpráva o jednom ročníku jisté ZŠ je chybná (vymyšlená?):

Do 6. ročníku chodí 45 žáků, z toho 30 chlapců. 30 žáků 6. ročníku má dobrý prospěch, z toho je 16 chlapců. Sportu se věnuje 28 žáků, z toho 18 chlapců, resp. 17 žáků, kteří mají dobrý prospěch. 15 chlapců, kteří sportují, má dobrý prospěch.

[dívky: $|P| + |S| - |P \cap S| = 22??$]

Nápověda: Zaměřte se na dívky. Kolik z nich má dobrý prospěch, kolik jich sportuje a pro kolik platí oboje? Jsou ty údaje v pořádku?

Příklady pro pokročilé

- 1 Kolik tlumočnicků je zaměstnáno v tlumočnické agentuře, víme-li, že 36 jich umí anglicky, 32 německy, 31 rusky, 30 francouzsky, 28 polsky, 26 španělsky, přičemž 53 z nich zná více než jeden z uvedených jazyků, 24 tlumočnicků zná alespoň tři jazyky, 9 alespoň čtyři jazyky, 3 alespoň pět a 1 všech šest jazyků.

- 2 Kolika způsoby se může posadit v kině n manželských párů do poslední řady, kde je $2n$ míst, tak, aby žádný manželský pár neseděl vedle sebe?

- 1 Kolik tlumočnicků je zaměstnáno v tlumočnické agentuře, víme-li, že 36 jich umí anglicky, 32 německy, 31 rusky, 30 francouzsky, 28 polsky, 26 španělsky, přičemž 53 z nich zná více než jeden z uvedených jazyků, 24 tlumočnicků zná alespoň tři jazyky, 9 alespoň čtyři jazyky, 3 alespoň pět a 1 všech šest jazyků.

Nápověda: Číselné údaje pro více jazyků nejsou součtem ale sjednocením. Kolik tlumočnicků umí 5 jazyků (tj. jaké je sjednocení)? A jak vypadá součet, tj. číslo $|A \cap N \cap R \cap F \cap P| + |A \cap N \cap R \cap F \cap \check{S}| + \dots + |N \cap R \cap F \cap P \cap \check{S}|$, které se použije ve vzorci pro inkluzi a exkluzi?

- 2 Kolika způsoby se může posadit v kině n manželských párů do poslední řady, kde je $2n$ míst, tak, aby žádný manželský pár neseděl vedle sebe?

- 1 Kolik tlumočnicků je zaměstnáno v tlumočnické agentuře, víme-li, že 36 jich umí anglicky, 32 německy, 31 rusky, 30 francouzsky, 28 polsky, 26 španělsky, přičemž 53 z nich zná více než jeden z uvedených jazyků, 24 tlumočnicků zná alespoň tři jazyky, 9 alespoň čtyři jazyky, 3 alespoň pět a 1 všech šest jazyků. [93]

Nápověda: Číselné údaje pro více jazyků nejsou součtem ale sjednocením. Kolik tlumočnicků umí 5 jazyků (tj. jaké je sjednocení)? A jak vypadá součet, tj. číslo $|A \cap N \cap R \cap F \cap P| + |A \cap N \cap R \cap F \cap \check{S}| + \dots + |N \cap R \cap F \cap P \cap \check{S}|$, které se použije ve vzorci pro inkluzi a exkluzi?

- 2 Kolika způsoby se může posadit v kině n manželských párů do poslední řady, kde je $2n$ míst, tak, aby žádný manželský pár neseděl vedle sebe?
- $$\left[2^n \sum_{r=0}^n (-1)^r \binom{n}{r} \frac{(2n-r)!}{2^{n-r}} \right]$$