MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

1. Základní pojmy

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

19. 9. 2017

Program prezentace

1. Organizace předmětu
2. Graf, vrcholy, hrany
3. Skóre grafu
4. Úplný graf, doplněk grafu

Výuka

Dva předměty vzájemně provázané

1. MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1 – přednáška se koná v pondělí od 15:45 do 17:25, je individuálně nahrazena v termínu **úterý 9:00–10:35 v učebně 117** Střediska Teiresiás.
2. MA2BP_CDM1 Cvičení z diskrétní matematiky 1 – v termínu **středa 7:30–8:15 v učebně 24** Pedagogické fakulty, Poříčí 31.
3. Podpůrná výuka, v níž budeme probírat nejasnosti z přednášek a cvičení – v termínu **středa 12:20–13:55 v učebně 117** Střediska Teiresiás.

Požadavky

1. MA2BP_CDM1 Cvičení z diskrétní matematiky 1: zápočtový test na konci semestru, v době konání poslední přednášky – k udělení zápočtu je třeba získat 60 % bodů. Zápočet je podmínkou pro připuštění ke kolokviu.
2. MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1: kolokvium formou ústní zkoušky u dr. Břetislava Fajmona

Literatura

Doporučená literatura

1. FUCHS, Eduard. *Diskrétní matematika pro učitele.* 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2001. 178 s. ISBN 80-210-2703-7.
2. MILKOVÁ, Eva. *Teorie grafů a grafové algoritmy.* 1. vyd. Hradec Králové: Nakladatelství Gaudeamus, 2013. 123 s. ISBN 978-80-7435-267-6.

Doplňující, nepovinná literatura

- NEŠETŘIL, Jaroslav. *Teorie grafů.* Vyd. 1. Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1979. 316 s.

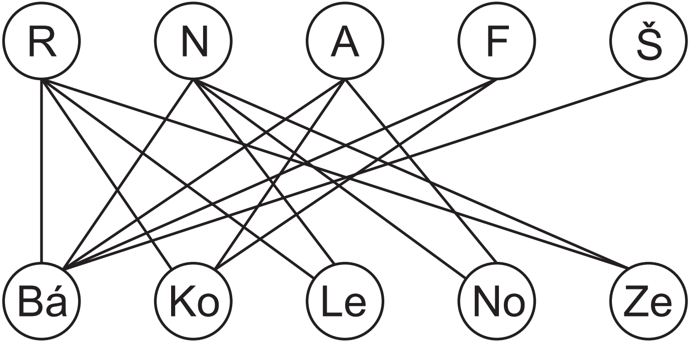
Konkurz

Jedna instituce vypsala konkurz na obsazení 5 míst pro překladatele, a to z ruštiny, němčiny, angličtiny, francouzštiny a španělštiny. Přihlásilo se 5 uchazečů, kteří ovládali některé z těchto jazyků.

- Bárta ovládal všech 5 jazyků,
- Kopal angličtinu, francouzštinu a ruštinu,
- Lehký němčinu a ruštinu,
- Novák angličtinu a němčinu a
- Zeman ruštinu a němčinu.

Mohla instituce přijetím těchto uchazečů obsadit místa tak, aby každý z nich překládal jen z jednoho jazyka? Pokud ano, navrhněte řešení.

Konkurz – grafová reprezentace



Graf, vrcholy, hrany

Definice 1.1 (Milková): Obyčejný graf je uspořádaná dvojice (V, E), kde

- V je neprázdná množina vrcholů (někdy též uzlů, angl. *vertex*),
- E je množina hran (angl. *edge*),

přičemž hrana e je dvouprvková podmnožina množiny V.

Poznámky

1. Vrcholy zakreslujeme v rovině pomocí kružnic, hrany jsou úsečky spojující dva vrcholy.
2. Definice odpovídá tzv. neorientovanému grafu, tj. hrany nemají orientaci. (Je-li e hrana mezi uzly x, y, pak vztah chápeme obousměrně: $x \to y$, $y \to x$.)

Zadání grafu

- Matematicky: $G = (V, E)$; $V = \{a, b, c, d, e\}$; $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{c, e\}\}$
- Maticí sousednosti: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Tabulkou:

	a	b	c	d	e
a	0	1	1	1	0
b	1	0	1	1	0
c	1	1	0	1	1
d	1	1	1	0	0
e	0	0	1	0	0

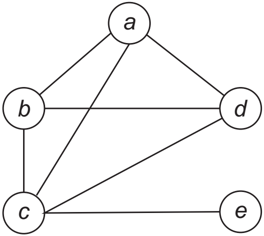
- Grafem – zkuste zakreslit sami

Další pojmy

Definice 1.2 (Milková): Nechť $e = \{v, w\}$ je hrana grafu G.

- Vrcholy v, w nazýváme **koncovými vrcholy hrany** e nebo též **vrcholy incidentní s hranou** e.
- Vrchol v nazýváme **sousedním vrcholem** vrcholu w, resp. vrchol w nazýváme sousedním vrcholem vrcholu v.

Příklad: v následujícím grafu je vrchol a incidentní s vrcholy b, c, d. Pouze vrchol c je sousedním vrcholem uzlu e.



Další pojmy (2)

Definice 1.3 (Milková):

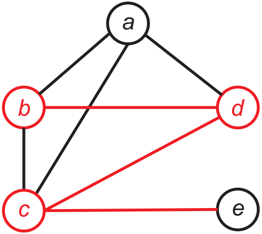
1. Graf $G = (V, E)$ se rovná grafu $G' = (V', E')$, jestliže $V = V'$ a $E = E'$.
2. Graf $G = (V, E)$ je **podgraf** grafu $G' = (V', E')$, jestliže $V \subseteq V'$ a $E \subseteq E'$.
3. Graf $G = (V, E)$ je **podgraf** grafu $G' = (V', E')$ **indukovaný vrcholy** množiny V, jestliže $V \subseteq V'$ a $E \subseteq E'$, přičemž v množině E jsou právě všechny hrany z množiny E', jejichž koncové vrcholy leží v množině V.

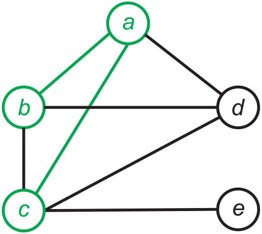
Alternativní definice 3: Graf $G = (V, E)$ je **podgraf** grafu $G' = (V', E')$ **indukovaný vrcholy** množiny V, jestliže

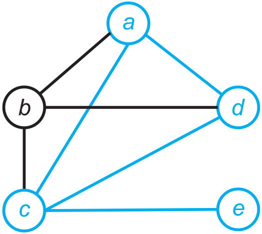
- G je podgrafem G' a zároveň
- G obsahuje všechny hrany grafu G' mezi dvojicemi vrcholů z G.

Příklad

Na následujících obrázcích je tentýž graf G, v němž je barevně zvýrazněna určitá množina G' vrcholů a hran. Určete, zda G' je podgraf grafu G, resp. zda G' je indukovaný podgraf grafu G.



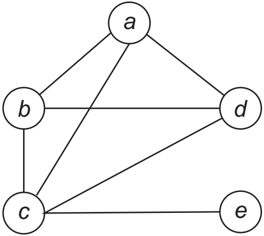


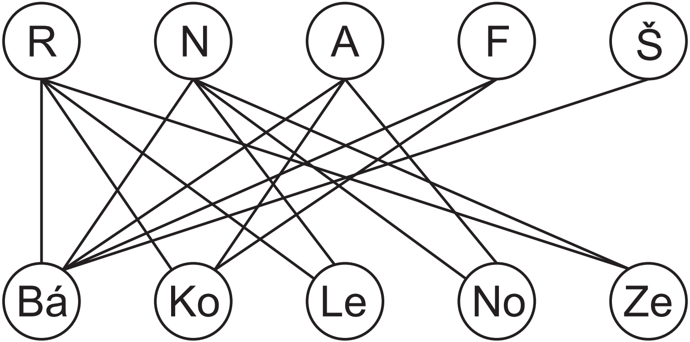


Stupeň grafu

Definice 1.4 (Milková): Stupeň vrcholu v v grafu G je číslo rovnající se počtu hran incidentních s vrcholem v. Značíme jej $deg_G(v)$ nebo krátce $d_G(v)$.

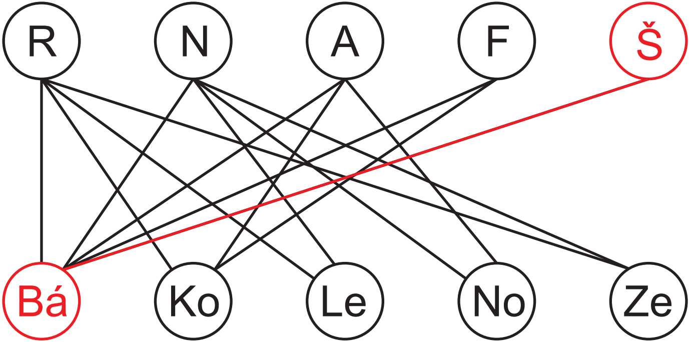
Příklad: v následujícím grafu platí:
$d_G(a) = d_G(b) = d_G(d) = 3,\ d_G(c) = 4,\ d_G(e) = 1$



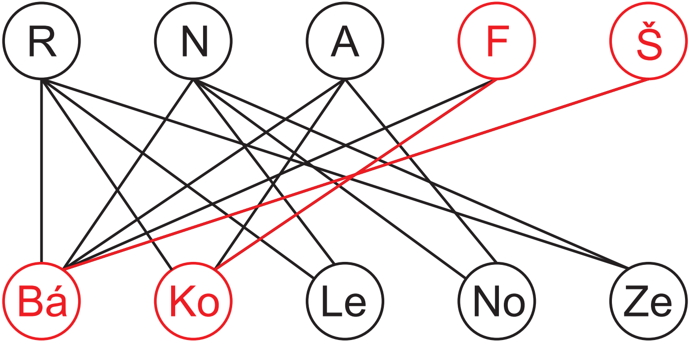


Mohla instituce přijetím těchto uchazečů obsadit místa tak, aby každý z nich překládal jen z jednoho jazyka?

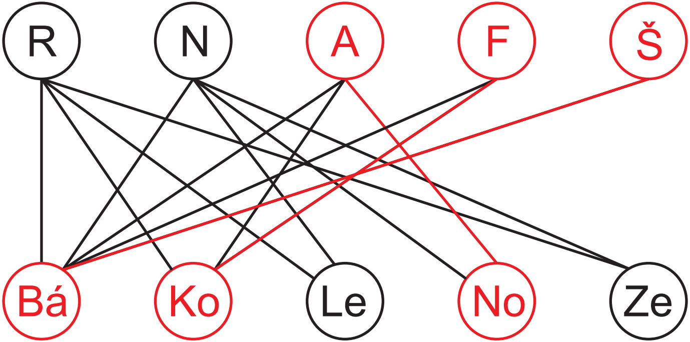
Konkurz – řešení



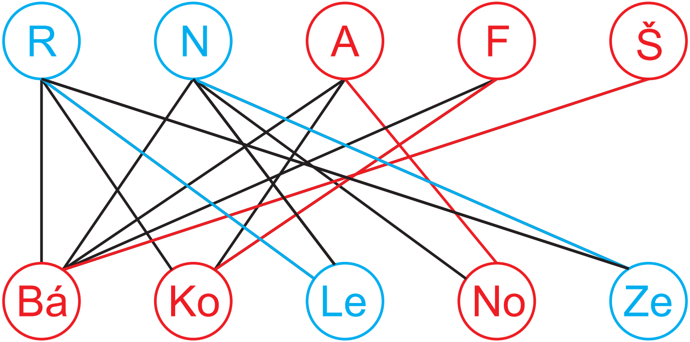
Konkurz – řešení



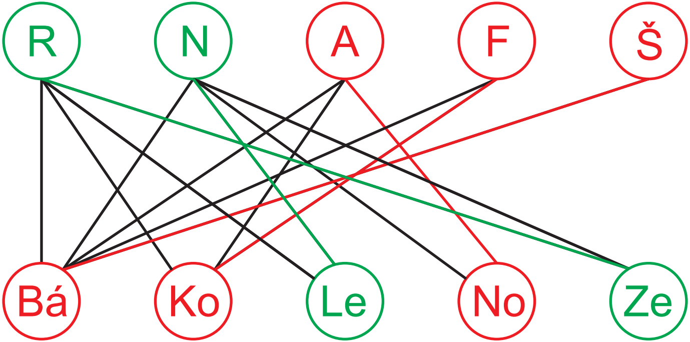
Konkurz – řešení



Konkurz – řešení



Konkurz – řešení



Princip sudosti

Věta 1.1 (Milková): Pro každý graf $G = (V, E)$ platí vztah $\sum_{v \in V} d_G(v) = 2 \cdot |E|$.

Poznámka: Jinými slovy: součet stupňů všech vrcholů je dvojnásobkem počtu hran.

Důkaz:

1. Libovolná hrana je incidentní právě s dvěma uzly.
2. V součtu $\sum_{v \in V} d_G(v)$ stupňů všech vrcholů je tedy každá hrana započítána dvakrát.
3. Sečteme-li stupně všech vrcholů, dostaneme dvojnásobek počtu hran.

Důsledek 1.1 (Milková): Počet vrcholů lichého stupně v grafu G je sudý.

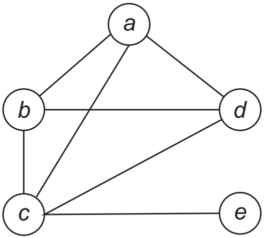
Skóre grafu

Definice 1.5 (Milková): Nechť $G = (V, E)$ je graf s n vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$. **Skóre grafu** je posloupnost $(d_G(v_1), d_G(v_2), \ldots, d_G(v_n))$.

Poznámka:

1. Při zápisu skóre bývá zvykem stupně řadit vzestupně či sestupně.
2. Ze skóre grafu snadno zjistíme počet hran. Dle principu sudosti stačí sečíst všechny stupně a podělit dvěma – výsledné číslo je počet hran.

Příklad: Graf na obrázku má skóre $(1, 3, 3, 3, 4)$.



Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Věta 1.2 (Milková): Mějme *vzestupně seřazenou* posloupnost přirozených čísel $(d_1, d_2, \dots, d_n)$, kde $n \in \mathbb{N}$.
Vytvořme z D novou posloupnost $D' = (d'_1, d'_2, \dots, d'_{n-1})$ tak, že

1. $d'_i = d_i$ pro $i < n - d_n$,
2. $d'_i = d_i - 1$ pro $i \geq n - d_n$.

Potom D je skóre grafu, právě když D' je skóre grafu.

Poznámka: Věta 1.2 dává návod, jak zjistit, zda zadané skóre určuje graf. Postupně vytváříme posloupnosti, které mají vždy o jeden prvek méně. Skončíme tehdy, když je jasné, zda aktuálně skóre jsme schopni "přeměnit" v graf.
Sérii posloupností lze následně použít i pro nakreslení grafu daného počáteční posloupností. Za chvíli si ukážeme jak.

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1.
2.
3.
4.
5.

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1. Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
2.
3.
4.
5.

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1. Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
2. počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
   (1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) $\rightsquigarrow$ (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4)
3.
4.
5.

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1. Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
2. počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
   (1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) $\rightsquigarrow$ (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4)
3. počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
   (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) $\rightsquigarrow$ (1, 1, 2, 2, 2, 2)
4.
5.

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1. Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
2. počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
   (1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) $\rightsquigarrow$ (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4)
3. počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
   (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) $\rightsquigarrow$ (1, 1, 2, 2, 2, 2)
4. počet prvků: 6, $a_6 = 2$, předěl: $6 - 2 = 4$:
   (1, 1, 2, 2, 2, 2) $\rightsquigarrow$ (1, 1, 2, 1, 1) $\rightsquigarrow$ (1, 1, 1, 1, 2)
5.

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

1. Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
2. počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
   $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4)$
3. počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
   $(1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 2, 2, 2)$
4. počet prvků: 6, $a_6 = 2$, předěl: $6 - 2 = 4$:
   $(1, 1, 2, 2, 2, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 1, 1) \rightsquigarrow (1, 1, 1, 1, 2)$
5. počet prvků: 5, $a_5 = 2$, předěl: $5 - 2 = 3$:
   $(1, 1, 1, 1, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 0, 0) \rightsquigarrow (0, 0, 1, 1)$

Jak zjistit, že skóre určuje graf?

Příklad: Určete pomocí Věty 1.2, zda posloupnost $(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$ je skóre grafu.

Řešení:

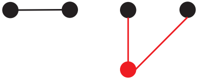
1. Nejprve ověříme, zda počet lichých čísel je sudý (důsledek principu sudosti) a zda poslední číslo posloupnosti je menší počet jejích prvků.
2. počet prvků: 8, $a_8 = 6$, předěl: $8 - 6 = 2$:
   (1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6) ⇝ (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4)
3. počet prvků: 7, $a_7 = 4$, předěl: $7 - 4 = 3$:
   (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) ⇝ (1, 1, 2, 2, 2, 2)
4. počet prvků: 6, $a_6 = 2$, předěl: $6 - 2 = 4$:
   (1, 1, 2, 2, 2, 2) ⇝ (1, 1, 2, 1, 1) ⇝ (1, 1, 1, 1, 2)
5. počet prvků: 5, $a_5 = 2$, předěl: $5 - 2 = 3$:
   (1, 1, 1, 1, 2) ⇝ (1, 1, 0, 0) ⇝ (0, 0, 1, 1) – graf s tímto skóre lze zakreslit (dva uzly jsou izolované, další dva propojeny hranou).

Nakreslení grafu dle posloupnosti skóre

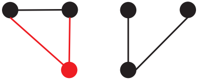
$(0, 0, 1, 1) \rightsquigarrow (1, 1, 1, 1, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 2, 2, 2, 2) \rightsquigarrow (1, 1, 3, 3, 3, 3, 4) \rightsquigarrow (1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, 6)$

(0, 0, 1, 1):

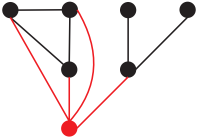
(1, 1, 1, 1, **2**):



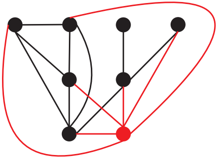
(1, 1, 2, 2, 2, **2**):



(1, 1, 3, 3, 3, 3, **4**):



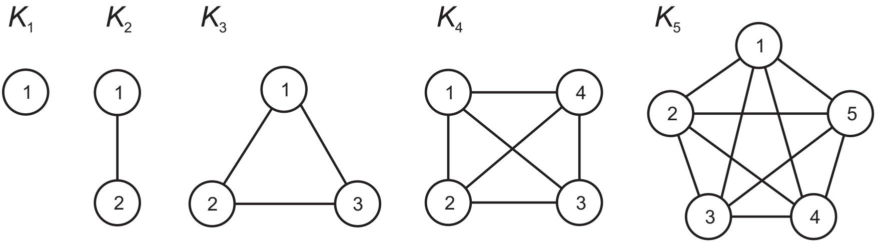
(1, 2, 4, 4, 4, 4, 5, **6**):



Úplný graf

Definice 1.6 (Milková): Úplný graf na množině n vrcholů je graf s n vrcholy ($n \geq 1$), ve kterém je každý uzel spojen se všemi ostatními vrcholy hranou. Značíme jej K_n.

Příklady:



Doplněk grafu

Definice 1.7 (Milková): Doplněk grafu $G = (V, \text{-}E)$ grafu $G = (V, E)$ je graf, jehož množina hran $\text{-}E$ je množina všech hran úplného grafu na množině vrcholů V, které neleží v E.

Příklad: na následujícím obrázku je graf o pěti vrcholech a jeho doplněk.