MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

2. Souvislost, izomorfismus

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

26. 9. 2017

Program prezentace

1. Sled, tah, cesta
2. Souvislost grafu
3. Artikulace, most
4. 2-souvislost grafu
5. Izomorfismus grafů

Sled, tah, cesta

Definice 1.8 (MILKOVÁ)

1. **Sled** délky $k, k \geq 0$, v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_k)$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, $i = 1, \ldots, k$.
2. **Tah** délky $k, k \geq 0$, v grafu G je sled délky k s navzájem různými hranami, tj. pro $i \neq j$ platí $e_i \neq e_j$.
3. **Cesta** délky $k, k \geq 0$, v grafu G je sled délky k s navzájem různými vrcholy, tj. pro $i \neq j$ platí $v_i \neq v_j$.
4. **Uzavřený sled** délky $k, k \geq 0$, v grafu G je sled délky k, ve kterém $v_0 = v_k$.
5. **Uzavřený tah** délky $k, k \geq 0$, v grafu G je tah délky k, ve kterém $v_0 = v_k$.
6. **Kružnice** délky $k, k \geq 3$, v grafu G je posloupnost $(v_0, e_1, v_1, \ldots, e_k, v_0)$, kde $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$, $i = 1, \ldots, k-1$, $e_k = \{v_{k-1}, v_0\}$ a pro $i \neq j$ platí $v_i \neq v_j$.

Sled, tah, cesta (2)

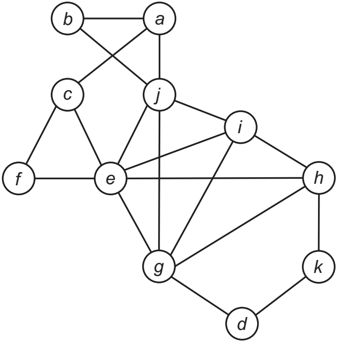
Poznámka:

- Sled jakéhokoliv typu budeme zapisovat jen jako posloupnost vrcholů.
- Tah je sled, kde se neopakují hrany. Cesta je sled, kde se neopakují vrcholy.
- Kružnice je uzavřený sled, v němž se neopakují "vnitřní" vrcholy.
- Kružnice C_3 se nazývá trojúhelník.

Příklad

V následujícím grafu G určete libovolný

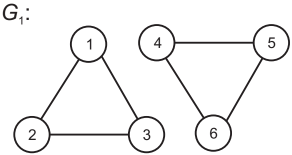
1. sled délky 8
2. tah délky 6, který není cestou
3. cestu délky 5
4. kružnici délky 5

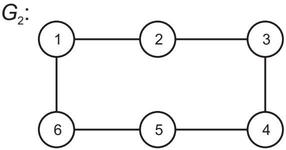


Definice 1.9 (MILKOVÁ)

1. **Souvislý graf** je graf, ve kterém mezi každými dvěma vrcholy existuje cesta.
2. **Komponenta grafu** G je každý maximální souvislý podgraf grafu G, tj. souvislý podgraf, který není podgrafem žádného jiného souvislého podgrafu.

Příklad: Existují dva různé grafy se skóre $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$, jeden je souvislý (kružnice C_6), druhý nesouvislý se dvěma komponentami (dvě kružnice C_3), viz obrázek.





Odebrání vrcholu, hrany

Definice 1.10 (MILKOVÁ): Nechť je dán graf $G = (V, E)$, vrchol $v \in V$ a hrana $e \in E$.

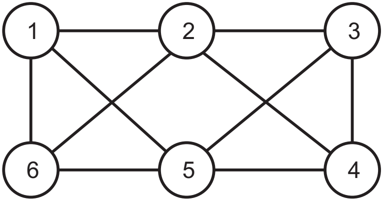
1. Graf $G - v$ je graf, který dostaneme z grafu G odebráním vrcholu v a všech hran s ním incidentních, tj. $G - v = (V \setminus \{v\}, \{E \in E \mid v \notin e\})$.
2. Graf $G - e$ je graf získaný z grafu G odebráním hrany e, tj. $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

Definice 1.10 (MILKOVÁ): Nechť je dán graf $G = (V, E)$, vrchol $v \in V$ a hrana $e \in E$.

1. Graf $G - v$ je graf, který dostaneme z grafu G odebráním vrcholu v a všech hran s ním incidentních, tj. $G - v = (V \setminus \{v\}, \{E \in E \mid v \notin e\})$.
2. Graf $G - e$ je graf získaný z grafu G odebráním hrany e, tj. $G - e = (V, E \setminus \{e\})$.

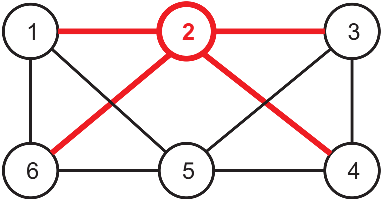
Příklad: Z grafu na obrázku postupně odeberte vrchol 2 a hranu $\{3, 5\}$.

G:



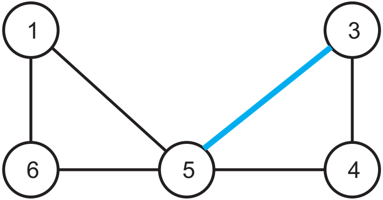
Řešení příkladu: Odebrání vrcholu 2.

G:



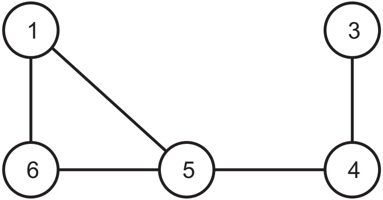
Řešení příkladu: Odebrání hrany $\{3, 5\}$.

G:



Řešení příkladu: Výsledný graf.

G:



Artikulace, most

Definice 1.11 (MILKOVÁ): Nechť je dán graf $G = (V, E)$, vrchol $v \in V$ a hrana $e \in E$.

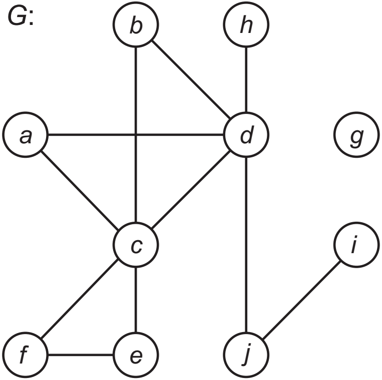
1. Hrana e je **most** grafu G, jestliže graf $G - e$ má více komponent než graf G.
2. Vrchol v je **artikulace** grafu G, jestliže graf $G - v$ má více komponent než graf G.

Poznámka:

- Vrcholy grafu stupně 1 či 0 nemohou být artikulacemi.
- Nechť $\{u, v\}$ je most grafu G. Pokud $d_G(u) > 1$ (resp. $d_G(v) > 1$), pak vrchol u (resp. vrchol v) je artikulace.
- Vrchol, který je artikulací, nemusí být koncovým vrcholem mostu.
- Vyjmutím mostu zvětšíme počet komponent právě o jednu.
- Vyjmutím artikulace u grafu G zvětšíme počet komponent minimálně o jednu, max. o číslo rovnající se $d_G(u) - 1$.

Procvičení pojmů

Příklad 1: V grafu G určete všechny komponenty, mosty a artikulace.



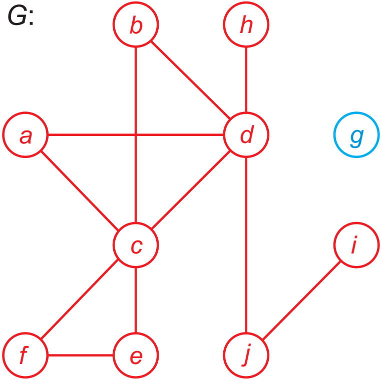
Příklad 2: Nakreslete souvislý graf G se šesti vrcholy včetně artikulace u takový, že $G - u$ bude obsahovat pět komponent.

Řešení příkladu 1 – komponenty

Komponenty grafu G: dva podgrafy indukované množinami

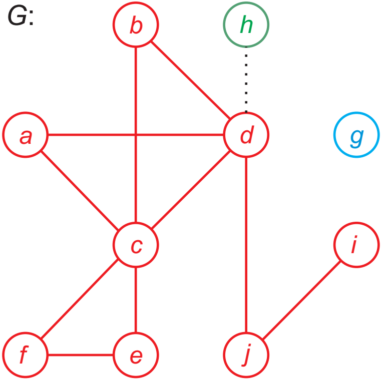
- {a, b, c, d, e, f, h, i, j}
- {g}

G:



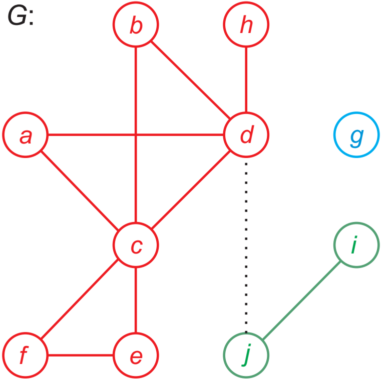
Řešení příkladu 1 – mosty

Odebráním hrany $\{d, h\}$ vznikají tři komponenty (namísto dvou) – $\{d, h\}$ je most.



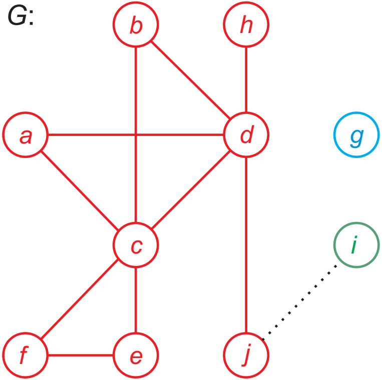
Řešení příkladu 1 – mosty

Odebráním hrany $\{d, j\}$ vznikají znovu tři komponenty – $\{d, j\}$ je most.



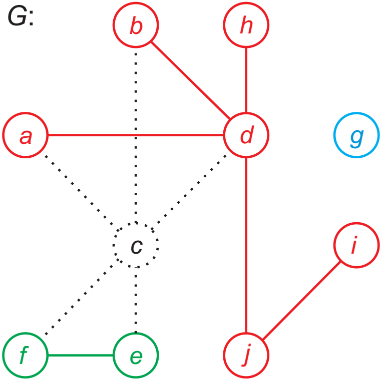
Řešení příkladu 1 – mosty

Odebráním hrany $\{j, i\}$ vznikají opět tři komponenty – $\{j, i\}$ je most.



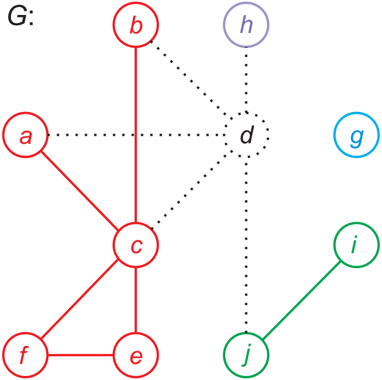
Řešení příkladu 1 – artikulace

Odebráním vrcholu c a jeho hran vznikají tři komponenty – c je artikulace.



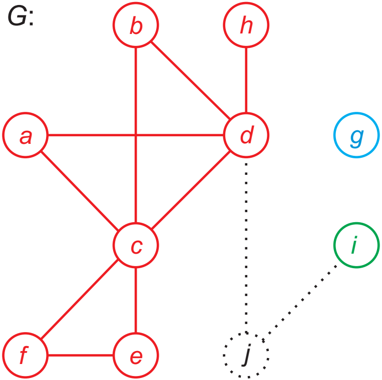
Řešení příkladu 1 – artikulace

Odebráním vrcholu d a jeho hran vznikají čtyři komponenty – d je artikulace.



Řešení příkladu 1 – artikulace

Odebráním vrcholu j a jeho hran vznikají tři komponenty – j je artikulace.



Řešení příkladů

Řešení Příkladu 1:
Komponenty grafu G: dva podgrafy indukované množinami

- $\{a, b, c, d, e, f, h, i, j\}$
- $\{g\}$

Mosty grafu G: $\{d, h\}, \{d, j\}, \{j, i\}$
Artikulace grafu G: c, d, j

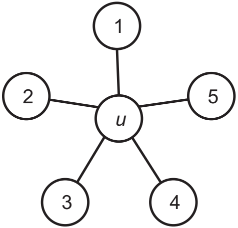
Řešení příkladu 2: souvislý graf s pěti vrcholy a artikulací u, jejímž odebráním vznikne nesouvislý graf $G - u$ o pěti komponentách.

Řešení Příkladu 1:
Komponenty grafu G: dva podgrafy indukované množinami

- $\{a, b, c, d, e, f, h, i, j\}$
- $\{g\}$

Mosty grafu G: $\{d, h\}, \{d, j\}, \{j, i\}$
Artikulace grafu G: c, d, j

Řešení příkladu 2: souvislý graf s pěti vrcholy a artikulací u, jejímž odebráním vznikne nesouvislý graf $G - u$ o pěti komponentách.



Další zajímavé vlastnosti

- (MILKOVÁ, Tvrzení 1.2)
  Nechť souvislý graf G obsahuje kružnici C a e je libovolná hrana C. Pak též $G - e$ je souvislý.
- (MILKOVÁ, Tvrzení 1.3)
  Nechť je dán graf $G = (V, E)$ a hrana $e = \{v, w\} \in E$. Pak platí: Je-li $G - e$ souvislý, pak v G existuje kružnice obsahující hranu e.
- (MILKOVÁ, Důsledek 1.2)
  Hrana grafu je buď most nebo leží na nějaké kružnici grafu.

2-souvislost grafu

Definice 1.12 (MILKOVÁ):

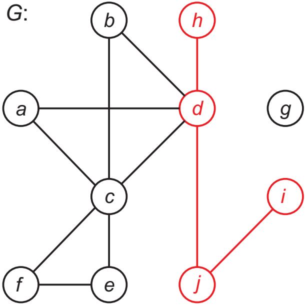
1. **2-souvislý graf** je graf, který neobsahuje artikulaci.
2. **Blok grafu** G (2-souvislá komponenta) je každý maximální 2-souvislý podgraf grafu G, tj. 2-souvislý podgraf G, který není podgrafem žádného jiného 2-souvislého podgrafu.

Poznámka: Graf $G = (V, E)$ je 2-souvislý, právě když pro libovolný vrchol $v \in V$ zůstane graf $G - v$ souvislý.

Příklad: Každý úplný graf je 2-souvislý.

Příklad: Uvažujme graf na obrázku a příklady podgrafů indukovaných různými množinami vrcholů. Určete, zdá se jedná o bloky.

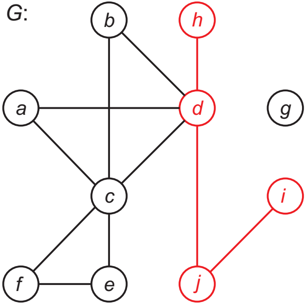
B_1 je podgraf indukovaný množinou vrcholů $\{h, d, j, i\}$.



Vysvětlení definice bloku

Příklad: Uvažujme graf na obrázku a příklady podgrafů indukovaných různými množinami vrcholů. Určete, zdá se jedná o bloky.

B_1 je podgraf indukovaný množinou vrcholů $\{h, d, j, i\}$.

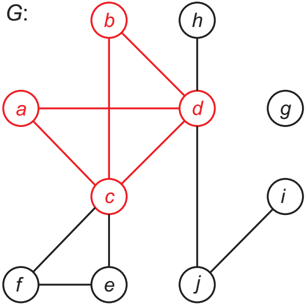


Odpověď: Ne, nejedná se o blok, protože např. $B_1 - d$ má více komponent než B_1.

Vysvětlení definice bloku

Příklad: Uvažujme graf na obrázku a příklady podgrafů indukovaných různými množinami vrcholů. Určete, zdá se jedná o bloky.

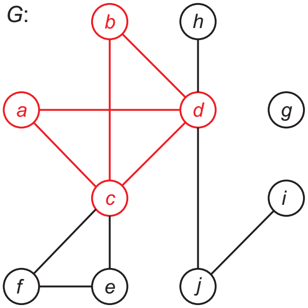
B_2 je podgraf indukovaný množinou vrcholů $\{a, b, c, d\}$.



Vysvětlení definice bloku

Příklad: Uvažujme graf na obrázku a příklady podgrafů indukovaných různými množinami vrcholů. Určete, zdá se jedná o bloky.

B_2 je podgraf indukovaný množinou vrcholů $\{a, b, c, d\}$.

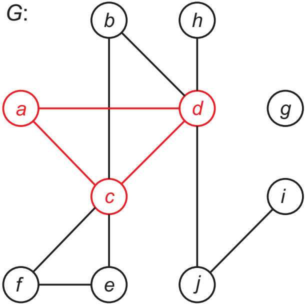


Odpověď: Ano, jedná se o blok, odebráním libovolného z těchto čtyř vrcholů zůstane podgraf indukovaný zbylými uzly souvislý.

Vysvětlení definice bloku

Příklad: Uvažujme graf na obrázku a příklady podgrafů indukovaných různými množinami vrcholů. Určete, zdá se jedná o bloky.

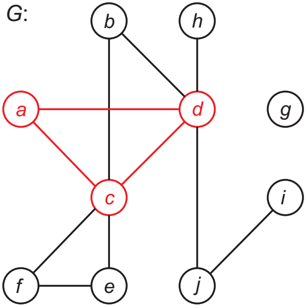
B_3 je podgraf indukovaný množinou vrcholů $\{a, c, d\}$.



Vysvětlení definice bloku

Příklad: Uvažujme graf na obrázku a příklady podgrafů indukovaných různými množinami vrcholů. Určete, zda se jedná o bloky.

B_3 je podgraf indukovaný množinou vrcholů $\{a, c, d\}$.



Odpověď: Ne, nejedná se o blok. Sice je splněna podmínka 2-souvislosti podgrafu, avšak podgraf indukovaný vrcholy $\{a, c, d\}$ není maximální, je podgrafem bloku $\{a, b, c, d\}$.

Důležitá vlastnost bloku

Tvrzení 1.4 (MILKOVÁ): Nechť G je souvislý graf. Pak platí: Jestliže $B_1 = (V_1, E_1)$ a $B_2 = (V_2, E_2)$ jsou dva různé bloky grafu G, pak $V_1 \cap V_2$ je buď prázdná množina, nebo jednoprvková množina $\{v\}$, kde v je artikulace grafu G.

Tvrzení 1.4 (MILKOVÁ): Nechť G je souvislý graf. Pak platí: Jestliže $B_1 = (V_1, E_1)$ a $B_2 = (V_2, E_2)$ jsou dva různé bloky grafu G, pak $V_1 \cap V_2$ je buď prázdná množina, nebo jednoprvková množina $\{v\}$, kde v je artikulace grafu G.

Důkaz: Sporem předpokládejme, že $|V_1 \cap V_2| \geq 2$.

Nechť $v, w \in V_1 \cap V_2$.

Důležitá vlastnost bloku

Tvrzení 1.4 (MILKOVÁ): Nechť G je souvislý graf. Pak platí: Jestliže $B_1 = (V_1, E_1)$ a $B_2 = (V_2, E_2)$ jsou dva různé bloky grafu G, pak $V_1 \cap V_2$ je buď prázdná množina, nebo jednoprvková množina $\{v\}$, kde v je artikulace grafu G.

Důkaz: Sporem předpokládejme, že $|V_1 \cap V_2| \geq 2$.

Nechť $v, w \in V_1 \cap V_2$.

1. Protože $v, w \in B_1$, zůstane $B_1 - v$ (resp. $B_1 - w$) souvislý.
2. Protože $v, w \in B_2$, zůstane $B_2 - v$ (resp. $B_2 - w$) souvislý.

Důležitá vlastnost bloku

Tvrzení 1.4 (MILKOVÁ): Nechť G je souvislý graf. Pak platí: Jestliže $B_1 = (V_1, E_1)$ a $B_2 = (V_2, E_2)$ jsou dva různé bloky grafu G, pak $V_1 \cap V_2$ je buď prázdná množina, nebo jednoprvková množina $\{v\}$, kde v je artikulace grafu G.

Důkaz: Sporem předpokládejme, že $|V_1 \cap V_2| \geq 2$.

Nechť $v, w \in V_1 \cap V_2$.

1. Protože $v, w \in B_1$, zůstane $B_1 - v$ (resp. $B_1 - w$) souvislý.
2. Protože $v, w \in B_2$, zůstane $B_2 - v$ (resp. $B_2 - w$) souvislý.

Celkem tedy $(B_1 \cup B_2) - v$, resp. $(B_1 \cup B_2) - w$ zůstávají souvislé, tudíž $B_1 \cup B_2$ je také blok. B_1, B_2 tedy nemohou být bloky – spor. Proč?

Důležitá vlastnost bloku

Tvrzení 1.4 (MILKOVÁ): Nechť G je souvislý graf. Pak platí: Jestliže $B_1 = (V_1, E_1)$ a $B_2 = (V_2, E_2)$ jsou dva různé bloky grafu G, pak $V_1 \cap V_2$ je buď prázdná množina, nebo jednoprvková množina $\{v\}$, kde v je artikulace grafu G.

Důkaz: Sporem předpokládejme, že $|V_1 \cap V_2| \geq 2$.

Nechť $v, w \in V_1 \cap V_2$.

1. Protože $v, w \in B_1$, zůstane $B_1 - v$ (resp. $B_1 - w$) souvislý.
2. Protože $v, w \in B_2$, zůstane $B_2 - v$ (resp. $B_2 - w$) souvislý.

Celkem tedy $(B_1 \cup B_2) - v$, resp. $(B_1 \cup B_2) - w$ zůstávají souvislé, tudíž $B_1 \cup B_2$ je také blok. B_1, B_2 tedy nemohou být bloky – spor. Proč?

Závěr: $|V_1 \cap V_2| < 2$, tj. buď $|V_1 \cap V_2| = 0$, nebo $|V_1 \cap V_2| = 1$ ($V_1 \cap V_2 = \{v\}$).

Pokračování důkazu

Zbývá ukázat, že pro případ $|V_1 \cap V_2| = 1$ je $\{v\} = V_1 \cap V_2$ artikulace.

Pokračování důkazu

Zbývá ukázat, že pro případ $|V_1 \cap V_2| = 1$ je $\{v\} = V_1 \cap V_2$ artikulace.

Sporem předpokládejme, že v není artikulace. Pak nutně $G - v$ je souvislý graf.

Pokračování důkazu

Zbývá ukázat, že pro případ $|V_1 \cap V_2| = 1$ je $\{v\} = V_1 \cap V_2$ artikulace.

Sporem předpokládejme, že v není artikulace. Pak nutně $G - v$ je souvislý graf.

Uvažujme nyní libovolný podgraf P souvislého grafu $G - v$, který je cestou z vrcholu množiny V_1 do vrcholu množiny V_2.

Pokračování důkazu

Zbývá ukázat, že pro případ $|V_1 \cap V_2| = 1$ je $\{v\} = V_1 \cap V_2$ artikulace.

Sporem předpokládejme, že v není artikulace. Pak nutně $G - v$ je souvislý graf.

Uvažujme nyní libovolný podgraf P souvislého grafu $G - v$, který je cestou z vrcholu množiny V_1 do vrcholu množiny V_2. Pak ovšem $P \cup B_1 \cup B_2$ je 2-souvislý. B_1, B_2 nemohou být bloky – spor. Proč?

Pokračování důkazu

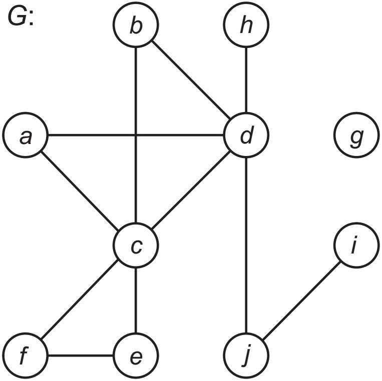
Zbývá ukázat, že pro případ $|V_1 \cap V_2| = 1$ je $\{v\} = V_1 \cap V_2$ artikulace.

Sporem předpokládejme, že v není artikulace. Pak nutně $G - v$ je souvislý graf.

Uvažujme nyní libovolný podgraf P souvislého grafu $G - v$, který je cestou z vrcholu množiny V_1 do vrcholu množiny V_2. Pak ovšem $P \cup B_1 \cup B_2$ je 2-souvislý. B_1, B_2 nemohou být bloky – spor. Proč?

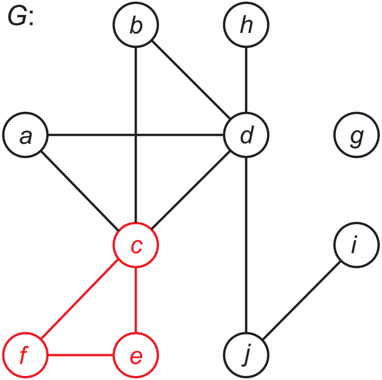
Závěr: Pro případ $|V_1 \cap V_2| = 1$ je tedy $\{v\} = B_1 \cap B_2$ artikulace.

Příklad: V následujícím grafu G určete všechny bloky.



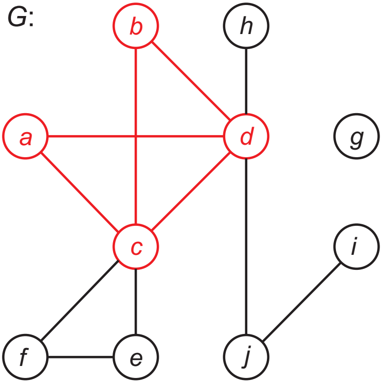
Řešení příkladu

Blok B_1 – podgraf indukovaný vrcholy $\{c, e, f\}$



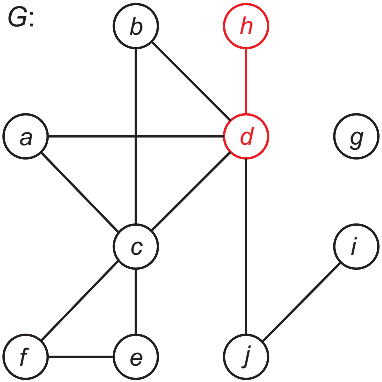
Řešení příkladu

Blok B_2 – podgraf indukovaný vrcholy $\{a, b, c, d\}$



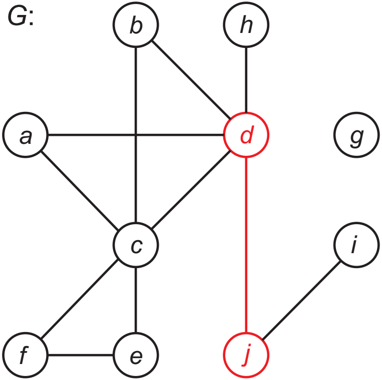
Řešení příkladu

Blok B_3 – podgraf indukovaný vrcholy $\{d, h\}$



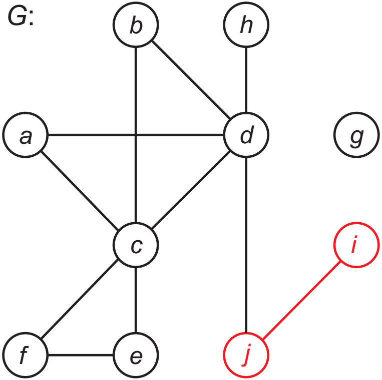
Řešení příkladu

Blok B_4 – podgraf indukovaný vrcholy $\{d, j\}$



Řešení příkladu

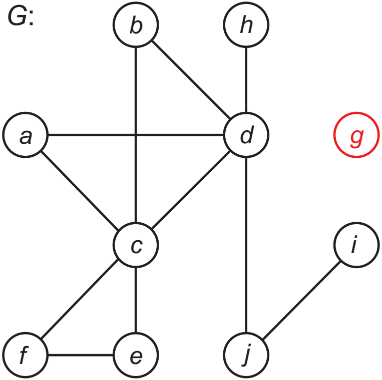
Blok B_5 – podgraf indukovaný vrcholy $\{j, i\}$



Řešení příkladu

Blok B_6 – podgraf indukovaný vrcholem $\{g\}$

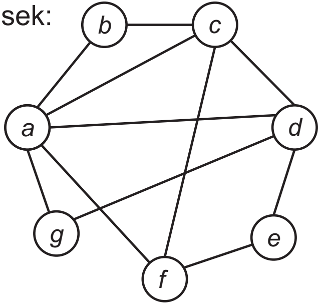
G:



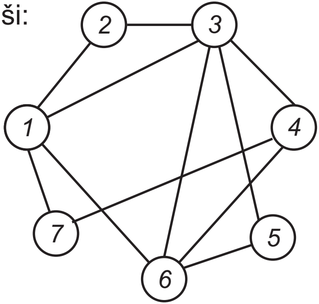
Detektivní kancelář

Detektivové Fousek a Micumiši zkoumali sedmičlennou skupinu osob a v grafu (každý ve svém) propojili dvojice osob, které se znají (nepropojené dvojice osob se neznají). Fousek označil osoby písmeny, Micumiši čísly (viz obrázek). Zjistěte, která písmena a čísla odpovídají stejným osobám.

Fousek:



Micumiši:



Izomorfní grafy

Definice 1.13 (MILKOVÁ): Graf $G = (V, E)$ je izomorfní s grafem $G' = (V', E')$, jestliže existuje vzájemně jednoznačné zobrazení $f : V \to V'$ takové, že platí $\{v, w\} \in E \Leftrightarrow \{f(v), f(w)\} \in E'$.

Poznámka: Fakticky to znamená, že dva izomorfní grafy jsou stejné až na pojmenování vrcholů.

Pro grafy o malém počtu vrcholů jsme schopni zjistit, zda jsou či nejsou izomorfní. Neexistuje však žádný "zaručený" a efektivní algoritmus pro zjištění izomorfismu dvou grafů. "Hrubou silou" bychom museli zkoušet všech $n!$ možností! (n je počet vrcholů obou grafů)

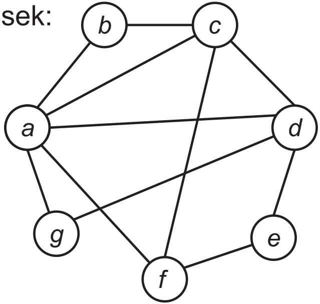
Jak vyšetřit izomorfnost?

Dva izomorfní grafy mají naprosto stejné vlastnosti, tedy zejména

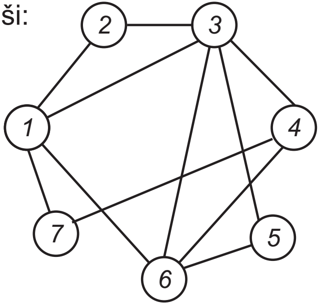
- mají stejný počet vrcholů i hran,
- mají stejné skóre,
- mají stejný počet kružnic dané délky,
- mají stejné doplňky,
- mají stejné podgrafy indukované množinami vrcholů stejného stupně.

Problém detektivní kanceláře

Fousek:



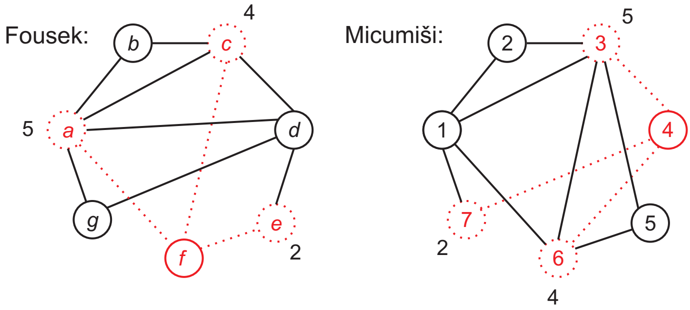
Micumiši:



Nejprve si zapíšeme skóre obou grafů. Fousek i Micumiši mají stejné: $(5, 2, 4, 4, 2, 3, 2) \rightsquigarrow (2, 2, 2, 3, 4, 4, 5)$.

Hledejme nyní izomorfismus h. V obou grafech je jediný vrchol stupně 3. Musí tedy být $h(f) = 4$.

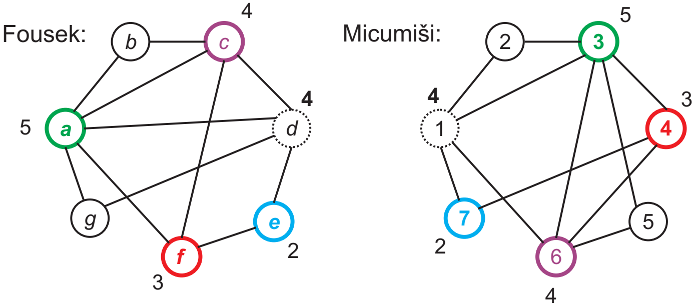
Problém detektivní kanceláře (2)



Označili jsme si vrcholy $f, 4$ stejnou barvou a vyznačili si incidentní hrany. Je patrné, že tyto vrcholy stupně 3 v obou grafech sousedí s jedním vrcholem stupně 2, jedním vrcholem stupně 4 a jedním vrcholem stupně 5.

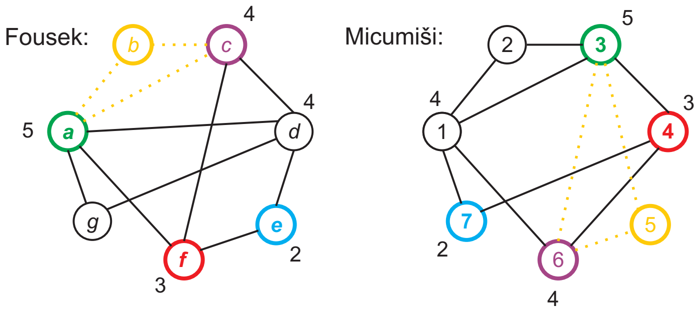
Je tedy zřejmé, že $h(e) = 7$ (vrcholy stupně 2), $h(c) = 6$ (vrcholy stupně 4), $h(a) = 3$ (vrcholy stupně 5).

Problém detektivní kanceláře (3)



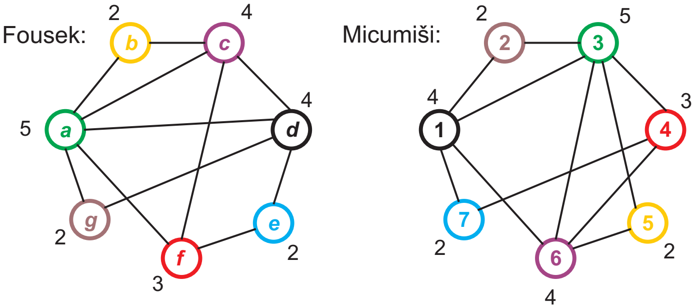
V obou grafech zbývá jediný vrchol stupně 4, totiž d, resp. 1. Platí tedy, že $h(d) = 1$.

Problém detektivní kanceláře (4)



Vrcholy a, c tvoří trojúhelník s vrcholem b ($d(b) = 2$) v 1. grafu.
Vrcholy 3, 6 tvoří trojúhelník s vrcholem 5 ($d(5) = 2$) ve 2. grafu.
Platí tedy $h(b) = 5$.

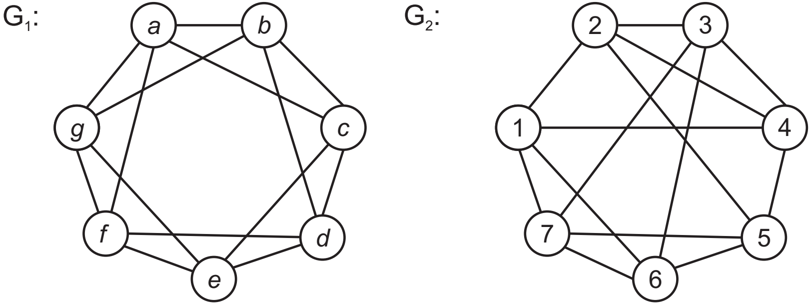
Problém detektivní kanceláře – řešení



Zbývá jediný vrchol v každém grafu. Je tedy patrné, že $h(g) = 2$.

Grafy jsou izomorfní, hledané zobrazení:
$a \rightsquigarrow 3,\ b \rightsquigarrow 5,\ c \rightsquigarrow 6,\ d \rightsquigarrow 1,\ e \rightsquigarrow 7,\ f \rightsquigarrow 4,\ g \rightsquigarrow 2.$

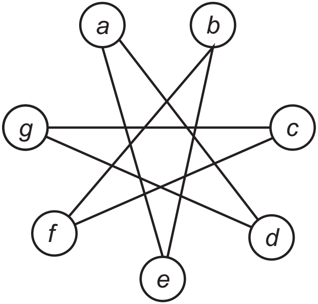
Příklad: Vyšetřete, zda jsou grafy G_1, G_2 izomorfní.



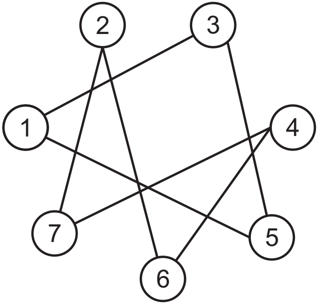
Řešení příkladu

Prozkoumejme doplňky obou grafů na obrázku.

$-G_1$:



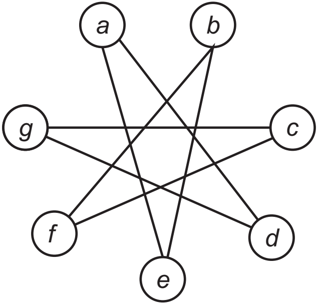
$-G_2$:



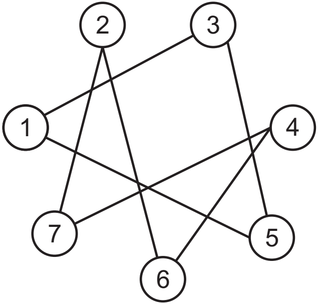
Řešení příkladu

Prozkoumejme doplňky obou grafů na obrázku.

-G_1:



-G_2:



Všimněte si, že -G_2 není souvislý, kdežto -G_1 ano. Proto grafy G_1, G_2 nejsou izomorfní.

Příklad

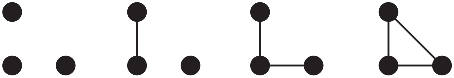
1. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na třech vrcholech?
2. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na čtyřech vrcholech?

Řešení příkladu

1. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na třech vrcholech?
2.

Řešení příkladu

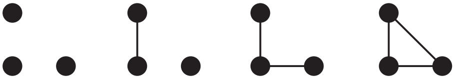
1. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na třech vrcholech? 4.



2.

Řešení příkladu

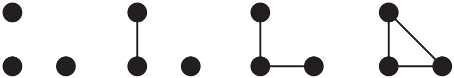
1. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na třech vrcholech? 4.



2. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na čtyřech vrcholech?

Řešení příkladu

1. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na třech vrcholech? 4.



2. Kolik existuje navzájem neizomorfních grafů na čtyřech vrcholech? 11.