

MA2BP_PDM1 Diskrétní matematika 1

5. Plánování projektu

Lukáš Másilko

Středisko pro pomoc studentům se specifickými nároky
Masarykova univerzita

7. 11. 2017

- 1 Představení problému
- 2 Sestavení grafové reprezentace projektu
- 3 Nalezení kritické cesty
- 4 Použité zdroje

Stavební firma má za úkol postavit rodinný dům. Stavbyvedoucí dodal operačnímu manažerovi firmy tabulku, v níž uvedl seznam činností a dílčích úkolů včetně jejich návaznosti a doby, za jakou mohou být dokončeny.

Úkolem manažera je naplánovat sled aktivit tak, aby mohl stanovit dobu, za kterou bude dům postaven. Zároveň má určit ty aktivity, které musí být zahájeny a dokončeny v konkrétních dnech, aby jejich zpoždění neznamenal prodloužení doby stavby.

Stavba domu – přehled činností

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
A	Úprava místa	–	1
B	Převzetí materiálů a strojů	–	2
C	Vybagrování základů	A	1
D	Položení základů	C	2
E	Kanalizace a přípojka plynu	B, C	6
F	Hrubá stavba	D	10
G	Rozvod elektřiny	F	3
H	Položení podlah	G	1
I	Hrubá stavba střechy	F	1
J	Instalatérské práce	E, H	5
K	Pokrytí střechy	I	2
L	Vnější omítka	F, J	1
M	Instalace oken a dveří	F	2
N	Zednické práce	L, M	4
O	Izolace stěn a stropů	G, J	2
P	Vnitřní omítka	O	2
Q	Izolace střechy	I, P	1
R	Dokončení interiéru	P	7
S	Dokončení exteriéru	I, N	7
T	Úprava a úklid terénu	S	3

Projekt a jeho činnosti je možné reprezentovat pomocí ohodnoceného orientovaného grafu:

- Hrany reprezentují aktivity (ohodnocení hran znamená počet dní spotřebovaných na provedení aktivity)
- Vrcholy znamenají časové okamžiky, kdy některé činnosti končí a jiné začínají (vrcholy budeme číslovat)

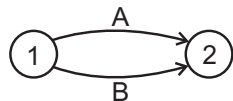
Projekt a jeho činnosti je možné reprezentovat pomocí ohodnoceného orientovaného grafu:

- Hrany reprezentují aktivity (ohodnocení hran znamená počet dní spotřebovaných na provedení aktivity)
- Vrcholy znamenají časové okamžiky, kdy některé činnosti končí a jiné začínají (vrcholy budeme číslovat)

Je vhodné se držet následujících tří pravidel.

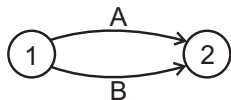
- **Pravidlo 1:** Každá aktivita je reprezentována právě jednou hranou.
- **Pravidlo 2:** Nejsou povoleny násobné hrany (žádné dvě aktivity nesmí mít stejný počáteční i koncový vrchol).
- **Pravidlo 3:** Uspořádání hran a vrcholů respektuje návaznost činností, nepřidává žádné další podmínky navíc.

Pravidlo 2: Nejsou povoleny násobné hrany – není povolena tato situace:

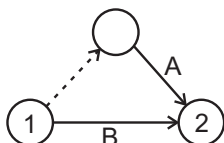
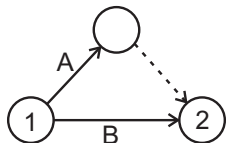
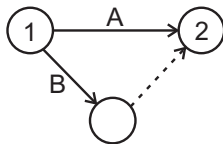
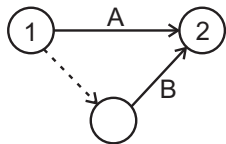


Řešení situace nesplňující Pravidlo 2

Pravidlo 2: Nejsou povoleny násobné hrany – není povolena tato situace:



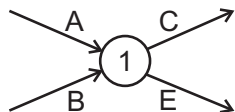
Řešení: přidáme pomocný vrchol a pomocnou (umělou) hranu, která má nulové ohodnocení. Máme čtyři možnosti, jak to provést, viz obrázek:



Fakta

- 1 činnost C následuje po dokončení A, B
- 2 činnost E následuje po dokončení B

jsou chybně reprezentována tímto grafem:



Vysvětlení: činnost E nemusí nutně začínat až v době, kdy končí činnost A.

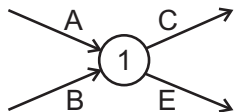
Porušení Pravidla 3 – příklad

Fakta

1 činnost C následuje po dokončení A, B

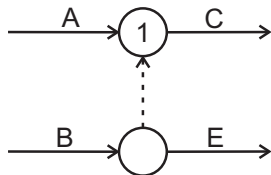
2 činnost E následuje po dokončení B

jsou chybně reprezentována tímto grafem:



Vysvětlení: činnost E nemusí nutně začínat až v době, kdy končí činnost A.

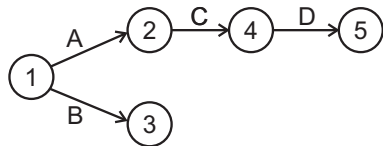
Řešení: přidání pomocného vrcholu a pomocné hrany:



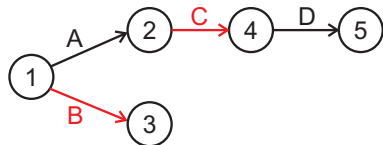
Stavba domu a její reprezentace grafem

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
A	Úprava místa	–	1
B	Převzetí materiálů a strojů	–	2
C	Vybagrování základů	A	1
D	Položení základů	C	2
...

↓

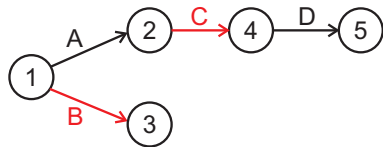


Stavba domu a její reprezentace grafem (2)

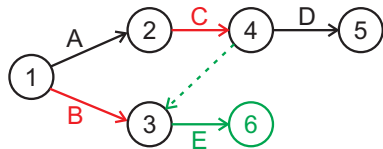


Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
E	Kanalizace a přípojka plynu	B, C	6
...

Stavba domu a její reprezentace grafem (2)

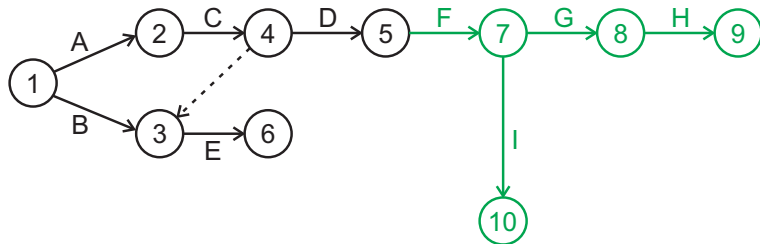


Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
E	Kanalizace a přípojka plynu	B, C	6
...



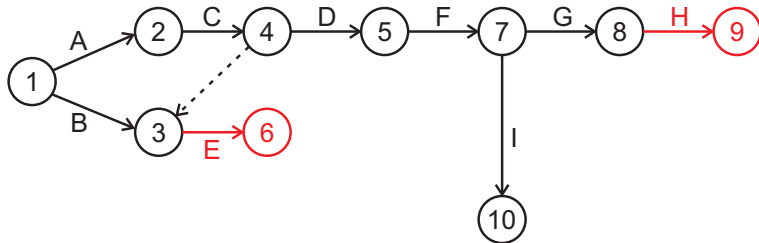
Stavba domu a její reprezentace grafem (3)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
F	Hrubá stavba	D	10
G	Rozvod elektřiny	F	3
H	Položení podlah	G	1
I	Hrubá stavba střechy	F	1
...



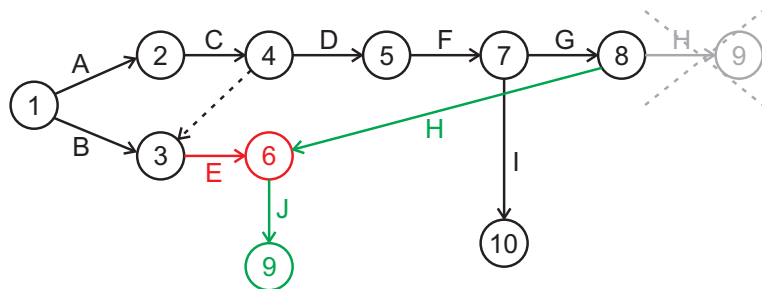
Stavba domu a její reprezentace grafem (4)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
J	Instalatérské práce	E, H	5
...



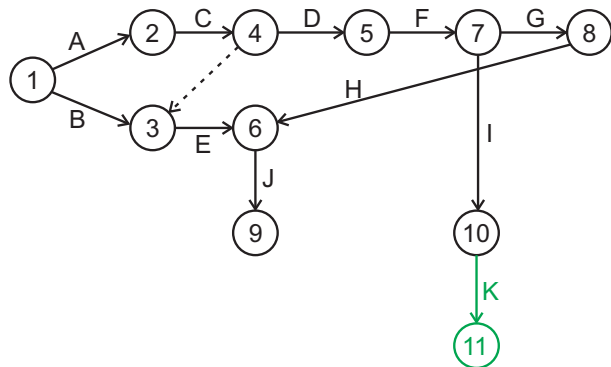
Stavba domu a její reprezentace grafem (4)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
J	Instalatérské práce	E, H	5
...



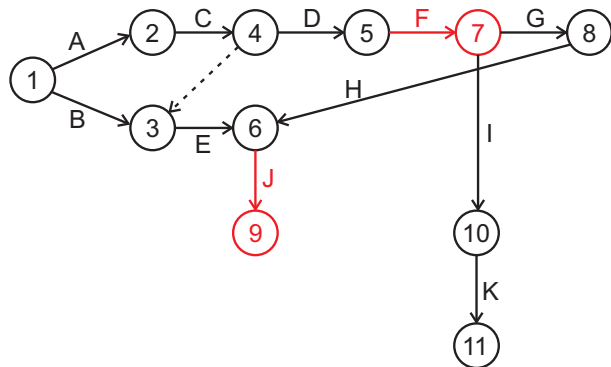
Stavba domu a její reprezentace grafem (5)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
K	Pokrytí střechy	I	2
L	Vnější omítka	F, J	1
M	Instalace oken a dveří	F	2
...



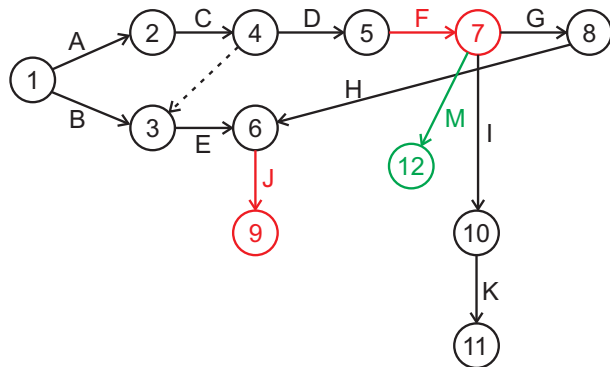
Stavba domu a její reprezentace grafem (5)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
K	Pokrytí střechy	I	2
L	Vnější omítka	F, J	1
M	Instalace oken a dveří	F	2
...



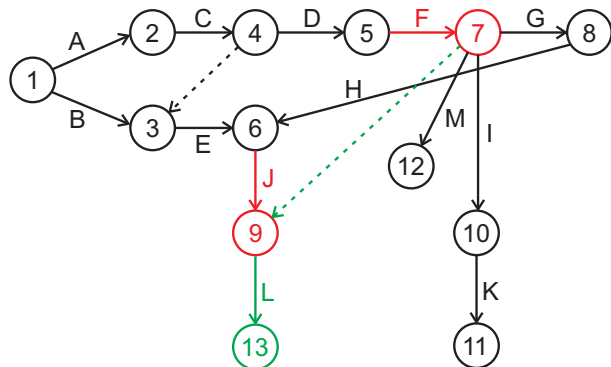
Stavba domu a její reprezentace grafem (5)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
K	Pokrytí střechy	I	2
L	Vnější omítka	F, J	1
M	Instalace oken a dveří	F	2
...



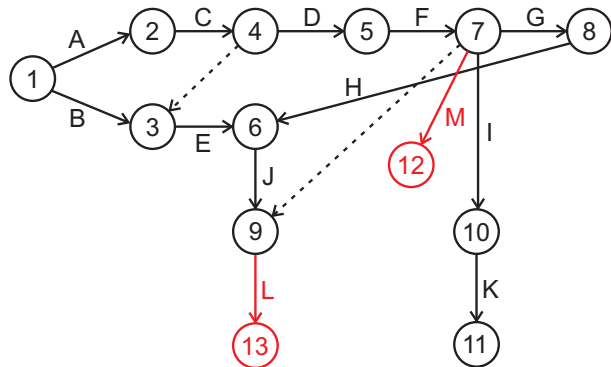
Stavba domu a její reprezentace grafem (5)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
K	Pokrytí střechy	I	2
L	Vnější omítka	F, J	1
M	Instalace oken a dveří	F	2
...



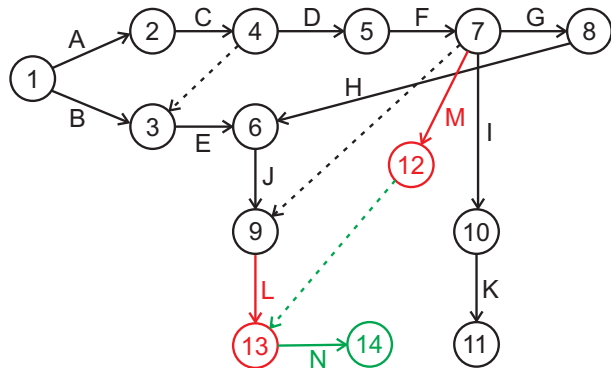
Stavba domu a její reprezentace grafem (6)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
N	Žednické práce	L, M	4
...



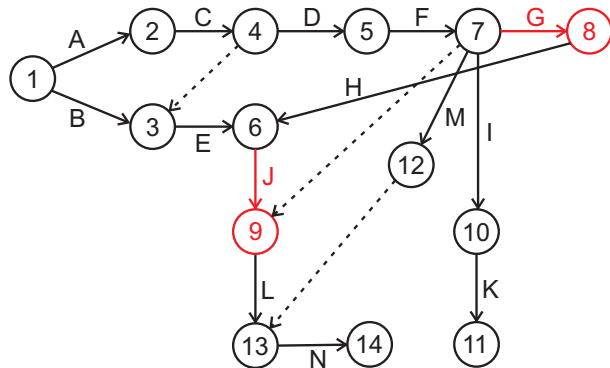
Stavba domu a její reprezentace grafem (6)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
N	Žednické práce	L, M	4
...



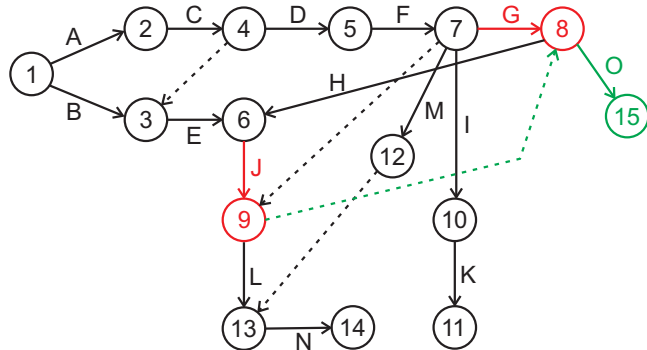
Stavba domu a její reprezentace grafem (7)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
O	Izolace stěn a stropů	G, J	2
...



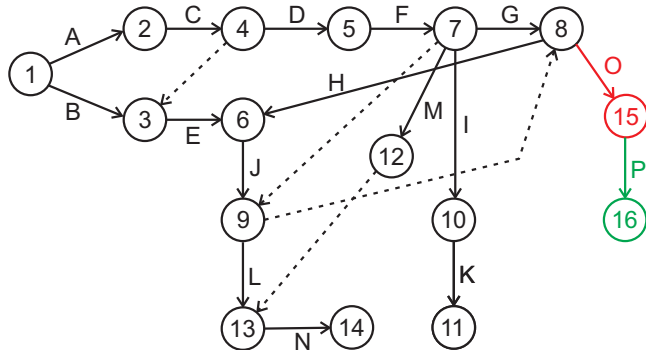
Stavba domu a její reprezentace grafem (7)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
O	Izolace stěn a stropů	G, J	2
...



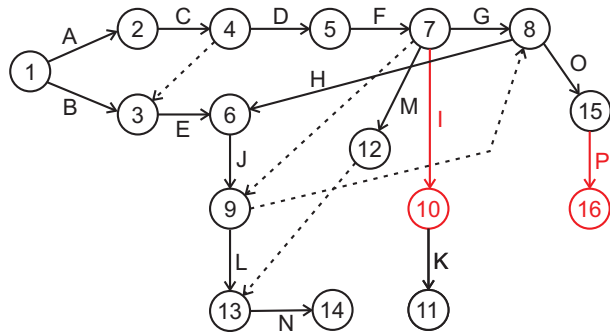
Stavba domu a její reprezentace grafem (8)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
P	Vnitřní omítka	O	2
...



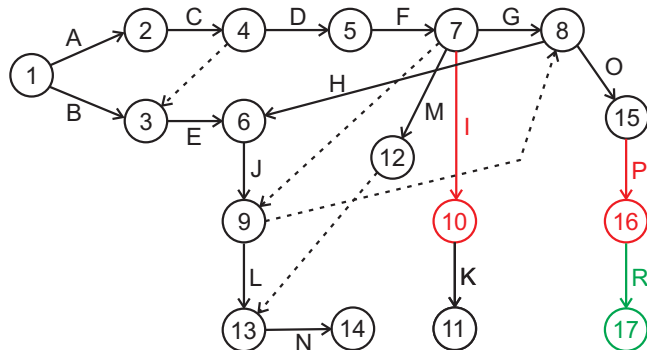
Stavba domu a její reprezentace grafem (9)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
Q	Izolace střechy	I, P	1
R	Dokončení interiéru	P	7
S	Dokončení exteriéru	I, N	7
...



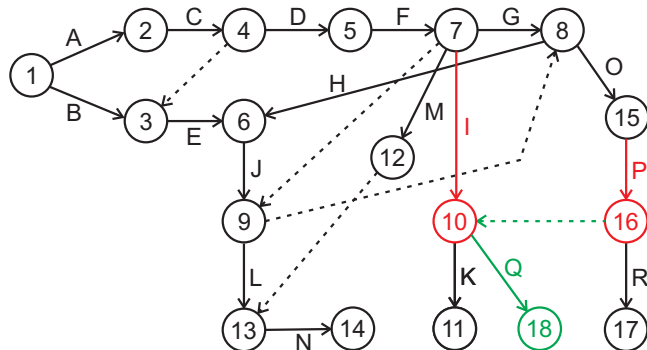
Stavba domu a její reprezentace grafem (9)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
Q	Izolace střechy	I, P	1
R	Dokončení interiéru	P	7
S	Dokončení exteriéru	I, N	7
...



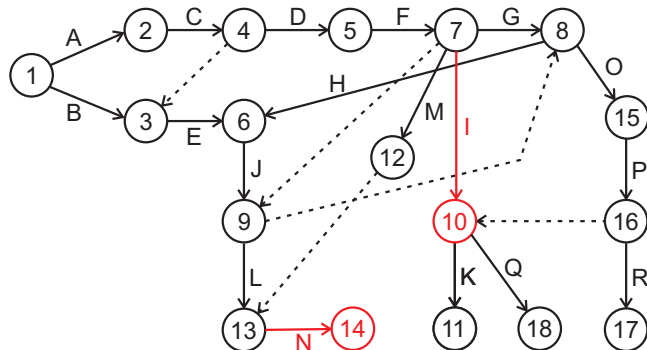
Stavba domu a její reprezentace grafem (9)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
Q	Izolace střechy	I, P	1
R	Dokončení interiéru	P	7
S	Dokončení exteriéru	I, N	7
...



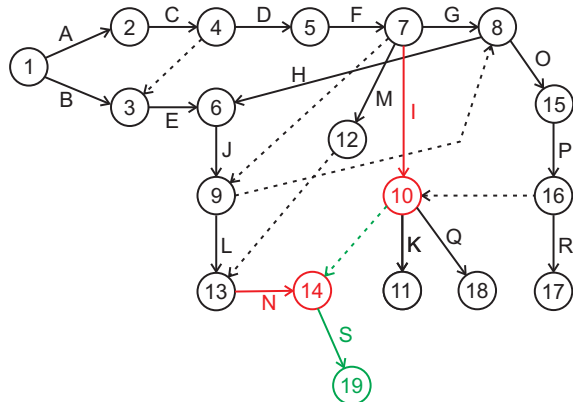
Stavba domu a její reprezentace grafem (9)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
Q	Izolace střechy	I, P	1
R	Dokončení interiéru	P	7
S	Dokončení exteriéru	I, N	7
...



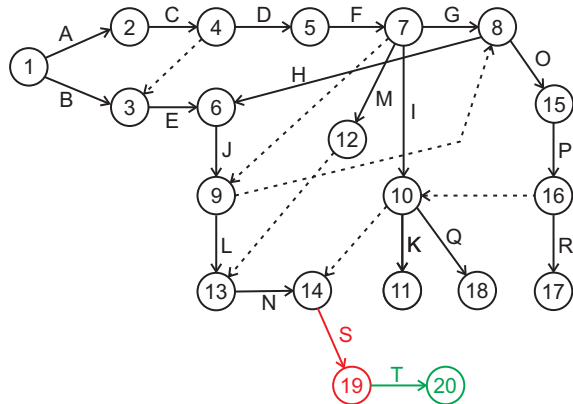
Stavba domu a její reprezentace grafem (9)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
Q	Izolace střechy	I, P	1
R	Dokončení interiéru	P	7
S	Dokončení exteriéru	I, N	7
...



Stavba domu a její reprezentace grafem (10)

Činnost	Popis	Následuje po	Počet dní
...
T	Úprava a úklid terénu	S	3

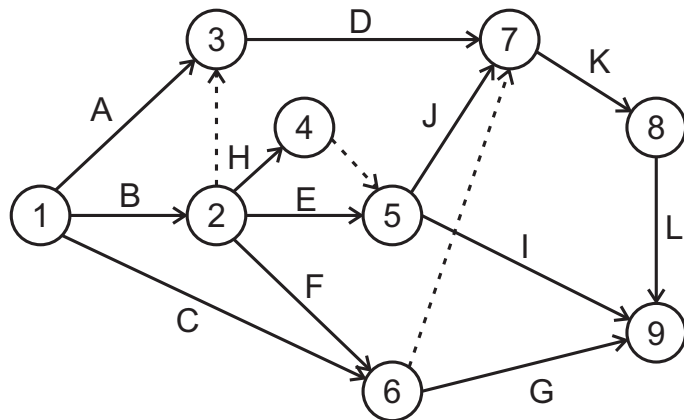


Příklad 1 k procvičení

Vytvořte síťový diagram popisující aktivity A, B, ..., L a respektující jejich návaznost dle následujících vztahů:

- 1 A, B, C jsou počáteční aktivity projektu, mohou začít simultánně.
- 2 A, B předchází D.
- 3 B předchází E, F, H.
- 4 F, C předchází G.
- 5 E, H předchází I, K.
- 6 C, D, F, J předchází K.
- 7 K předchází L.
- 8 I, G, L jsou závěrečné aktivity projektu.

Příklad 1 k procvičení – řešení



Hledání kritické cesty se skládá ze dvou fází:

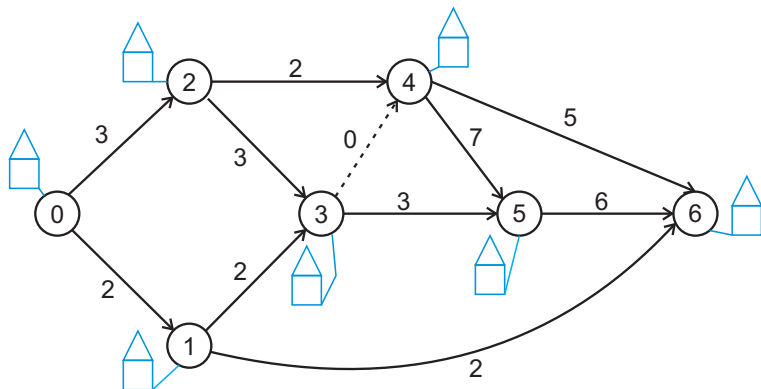
- 1 **Přímý chod** – postupujeme od počátečního ke koncovému uzlu a pro každý vrchol i hledáme ES_i (čas nejdřívějšího možného začátku), který poté vložíme do \square .
- 2 **Zpětný chod** – postupujeme od koncového k počátečnímu uzlu a pro každý vrchol j hledáme LC_j (čas nejpozdějšího možného dokončení), který poté vložíme do \triangle .

Platí:

- $ES_0 = 0$
- $ES_j = \max_i \{ES_i + D_{ij}\}$ – díváme se na všechny vrcholy i , ze kterých vede hrana do uzlu j . D_{ij} je ohodnocení hrany mezi vrcholy i, j .
- $LC_n = ES_n$, přičemž n je koncový uzel sítě.
- $LC_i = \min_j \{LC_j - D_{ij}\}$ – díváme se na všechny vrcholy j , do kterých vede hrana z uzlu i . D_{ij} je ohodnocení hrany mezi vrcholy i, j .

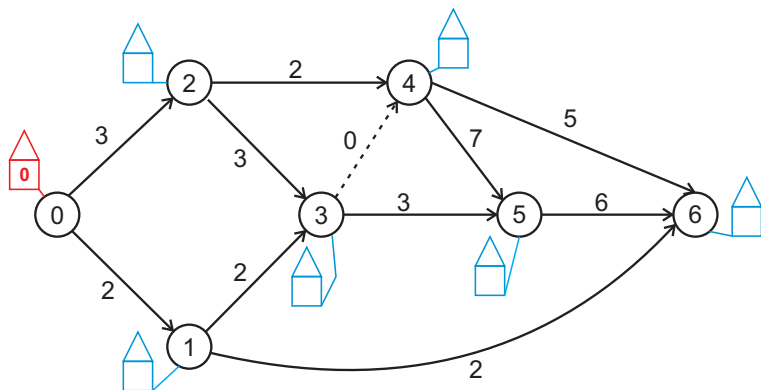
Přímý chod

Mějme síť o sedmi vrcholech s počátečním uzlem 0 a koncovým uzlem 7.



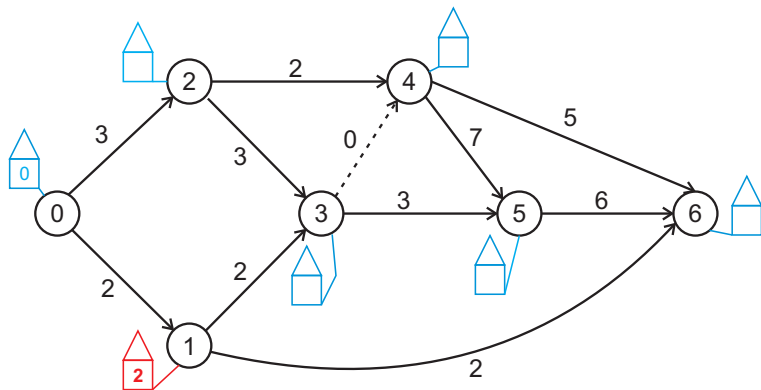
Přímý chod

$ES_0 = 0$, proto k vrcholu 0 nastavíme do □ číslo 0.



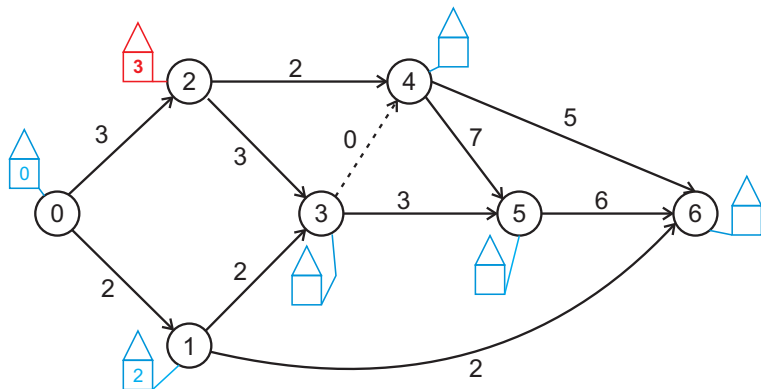
Přímý chod

Hledáme ES_1 . K uzlu 1 vede cesta pouze z vrcholu 0, proto $ES_1 = ES_0 + D_{01} = 0 + 2 = 2$.



Přímý chod

Hledáme ES_2 . K uzlu 2 vede cesta pouze z vrcholu 0, proto $ES_2 = ES_0 + D_{02} = 0 + 3 = 3$.



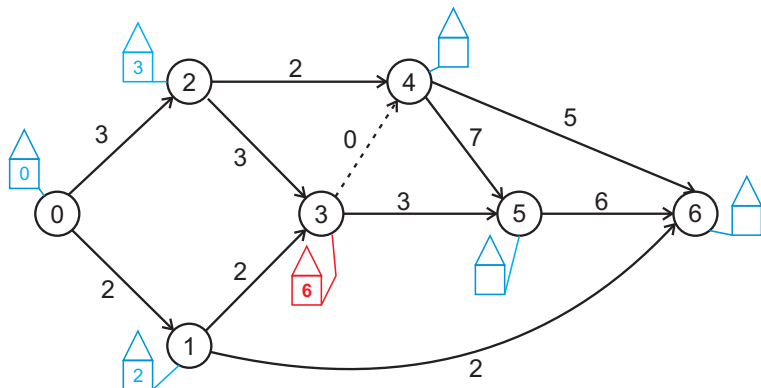
Přímý chod

Hledáme ES_3 . K uzlu 3 vedou dvě cesty z vrcholů 1, 2. Platí

$$ES_1 + D_{13} = 2 + 2 = 4$$

$$ES_2 + D_{23} = 3 + 3 = 6$$

Vybíráme maximum z obou hodnot, proto $ES_3 = 6$.



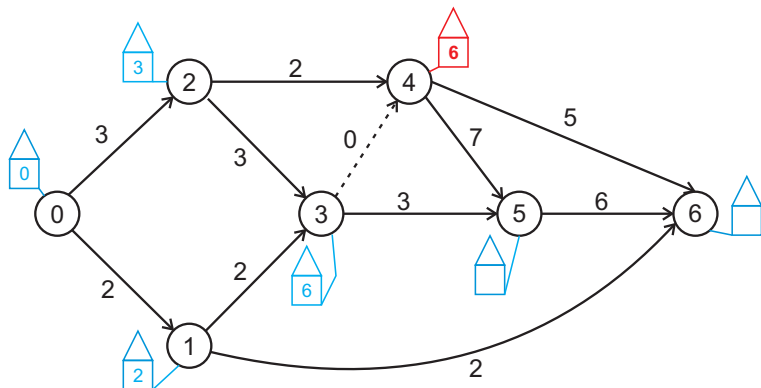
Přímý chod

Hledáme ES_4 . K uzlu 4 vedou dvě cesty z vrcholů 2, 3. Platí

$$ES_2 + D_{24} = 3 + 2 = 5$$

$$ES_3 + D_{34} = 6 + 0 = 6$$

Vybíráme maximum z obou hodnot, proto $ES_4 = 6$.



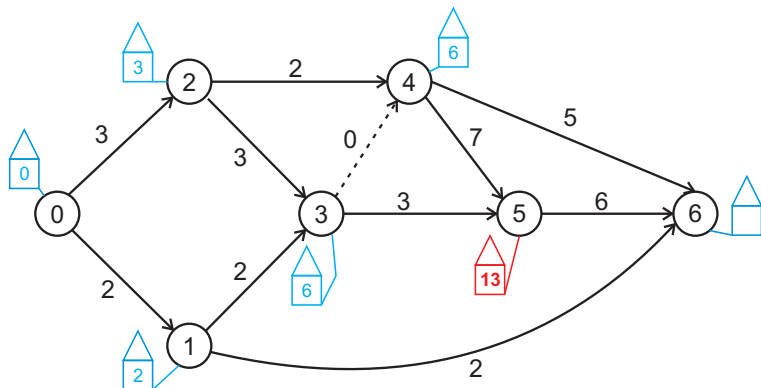
Přímý chod

Hledáme ES_5 . K uzlu 5 vedou dvě cesty z vrcholů 3, 4. Platí

$$ES_3 + D_{35} = 6 + 3 = 9$$

$$ES_4 + D_{45} = 6 + 7 = 13$$

Vybíráme maximum z obou hodnot, proto $ES_5 = 13$.



Přímý chod

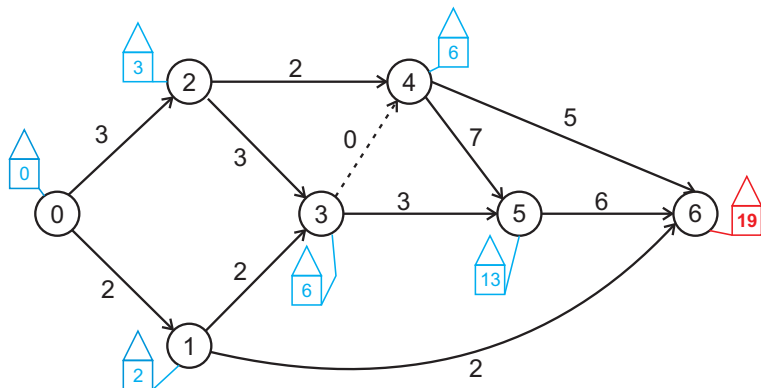
Hledáme ES_6 . K uzlu 6 vedou tři cesty z vrcholů 1, 4, 5. Platí

$$ES_1 + D_{16} = 2 + 2 = 4$$

$$ES_4 + D_{46} = 6 + 5 = 11$$

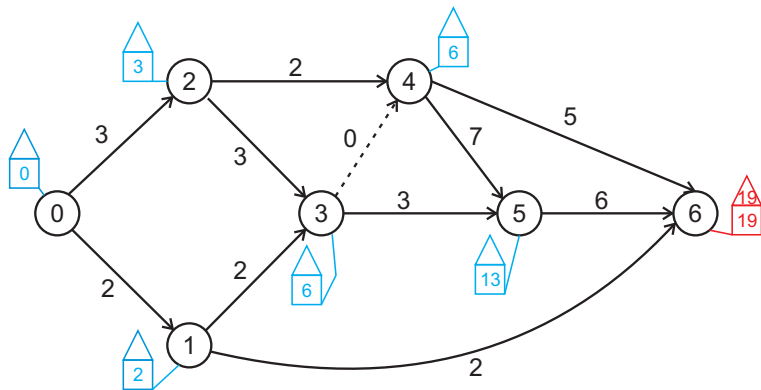
$$ES_5 + D_{56} = 13 + 6 = 19$$

Vybíráme maximum ze všech hodnot, proto $ES_6 = 19$.



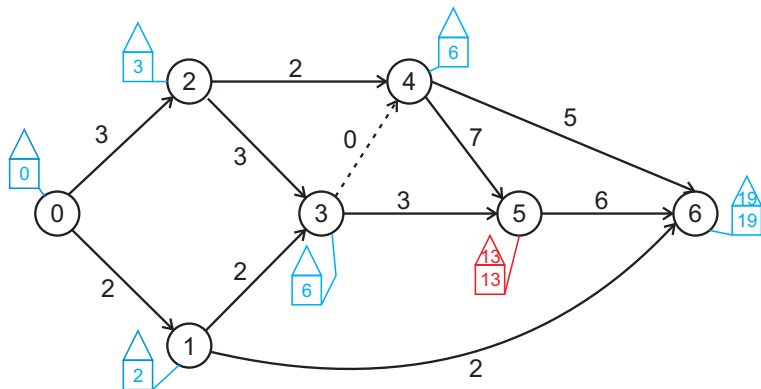
Zpětný chod

Zpětný chod zahajujeme nastavením koncového uzlu 6, do \triangle vložíme stejnou hodnotu, jakou máme ve \square .



Zpětný chod

Hledáme LC_5 . Z uzlu 5 vede jedna cesta do koncového vrcholu 6, proto $LC_5 = LC_6 - D_{56} = 19 - 6 = 13$.



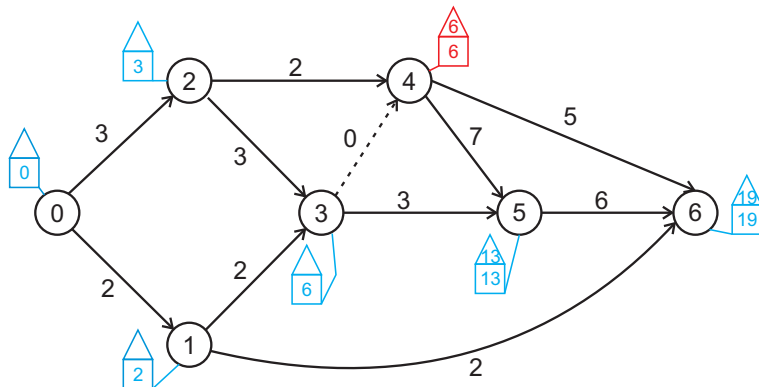
Zpětný chod

Hledáme LC_4 . Z uzlu 4 vedou dvě cesty do vrcholů 5, 6. Platí

$$LC_5 - D_{45} = 13 - 7 = 6$$

$$LC_6 - D_{46} = 19 - 5 = 14$$

Vybíráme minimum z obou hodnot, proto $LC_4 = 6$.



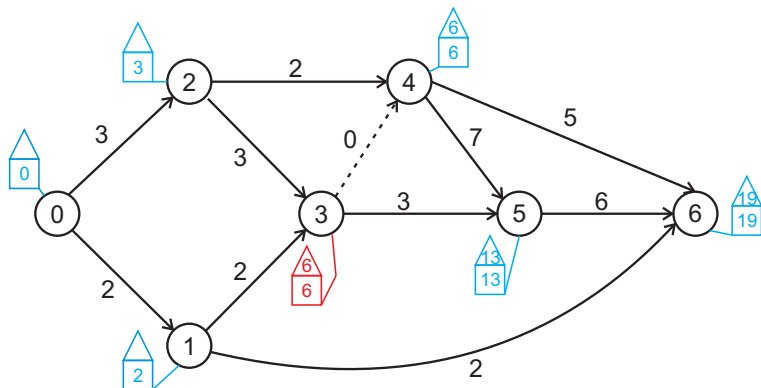
Zpětný chod

Hledáme LC_3 . Z uzlu 3 vedou dvě cesty do vrcholů 4, 5. Platí

$$LC_4 - D_{34} = 6 - 0 = 6$$

$$LC_5 - D_{35} = 13 - 3 = 10$$

Vybíráme minimum z obou hodnot, proto $LC_3 = 6$.



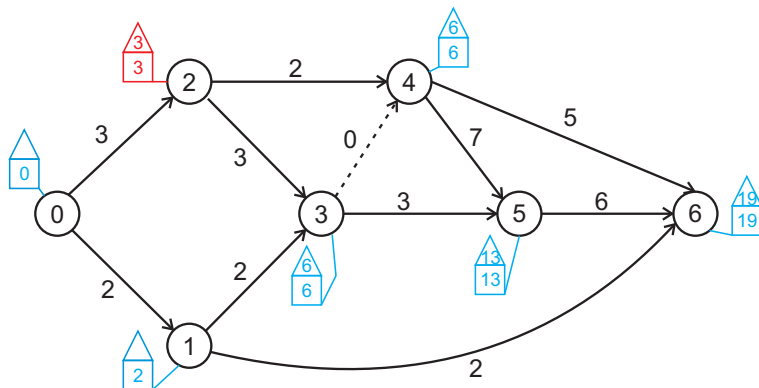
Zpětný chod

Hledáme LC_2 . Z uzlu 2 vedou dvě cesty do vrcholů 3, 4. Platí

$$LC_3 - D_{23} = 6 - 3 = 3$$

$$LC_4 - D_{24} = 6 - 2 = 4$$

Vybíráme minimum z obou hodnot, proto $LC_2 = 3$.



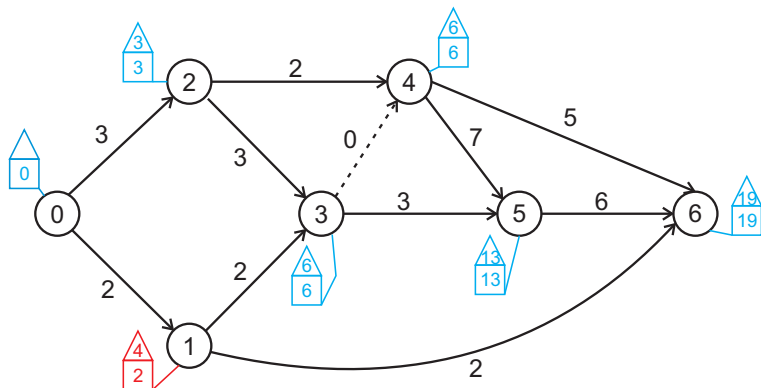
Zpětný chod

Hledáme LC_1 . Z uzlu 1 vedou dvě cesty do vrcholů 3, 6. Platí

$$LC_3 - D_{13} = 6 - 2 = 4$$

$$LC_6 - D_{16} = 19 - 2 = 17$$

Vybíráme minimum z obou hodnot, proto $LC_1 = 4$.



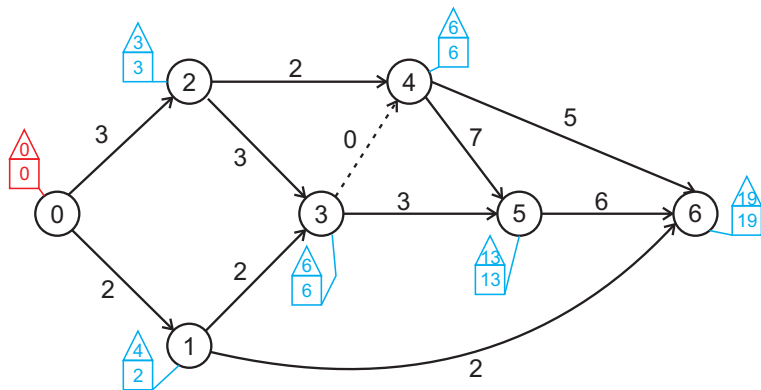
Zpětný chod

Hledáme LC_0 . Z uzlu 0 vedou dvě cesty do vrcholů 1, 2. Platí

$$LC_1 - D_{01} = 4 - 2 = 2$$

$$LC_2 - D_{02} = 3 - 3 = 0$$

Vybíráme minimum z obou hodnot, proto $LC_0 = 0$.



Hrana (i, j) patří do kritické cesty, jestliže pro vrcholy i, j platí tři následující podmínky:

- 1 $ES_i = LC_i$ (čísla ve \square a \triangle vrcholu i jsou stejná)
- 2 $ES_j = LC_j$ (čísla ve \square a \triangle vrcholu j jsou stejná)
- 3 $ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = D_{ij}$ (odečteme-li čísla ve \square či \triangle vrcholů j, i , pokaždé nám vyjde ohodnocení hrany (i, j)).

Nalezení kritické cesty

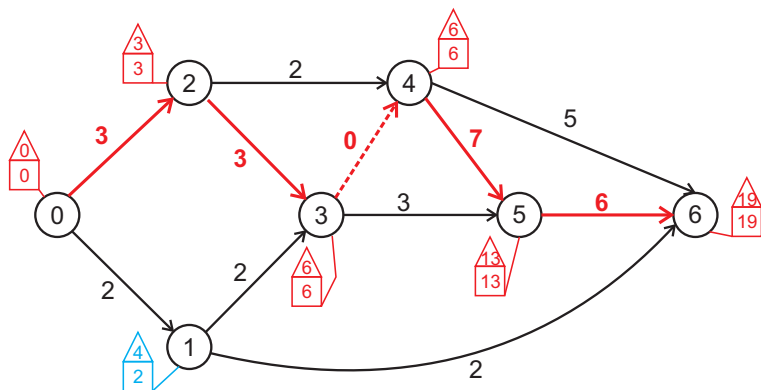
Hrana (i, j) patří do kritické cesty, jestliže pro vrcholy i, j platí tři následující podmínky:

- 1 $ES_i = LC_i$ (čísla ve \square a \triangle vrcholu i jsou stejná)
- 2 $ES_j = LC_j$ (čísla ve \square a \triangle vrcholu j jsou stejná)
- 3 $ES_j - ES_i = LC_j - LC_i = D_{ij}$ (odečteme-li čísla ve \square či \triangle vrcholů j, i , pokaždé nám vyjde ohodnocení hrany (i, j)).

Na následujícím obrázku jsou červeně vyznačeny hrany kritické cesty. Všimněte si například, že

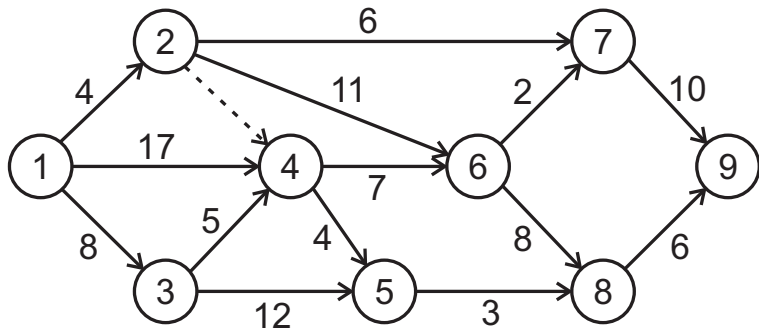
- hrana $(1, 2)$ není v kritické cestě, protože vrchol 1 nemá stejná čísla ve \square , resp. \triangle ;
- hrana $(3, 5)$ není v kritické cestě. Vrcholy 3, 5 sice mají stejná čísla ve \square , resp. \triangle , ale odečtením hodnot ve \square obou vrcholů dostáváme $13 - 6 = 7$, což není ohodnocení hrany $(3, 5)$ (stejně tak pro hodnoty v \triangle).

Nalezení kritické cesty – výsledné řešení

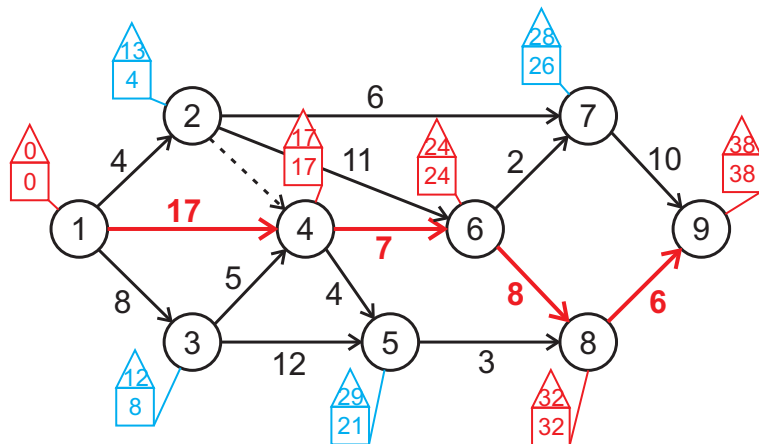


Příklad 2 k procvičení

Nalezněte kritickou cestu v síti zadané na obrázku.



Příklad 2 k procvičení – řešení



Příklad 3 k procvičení

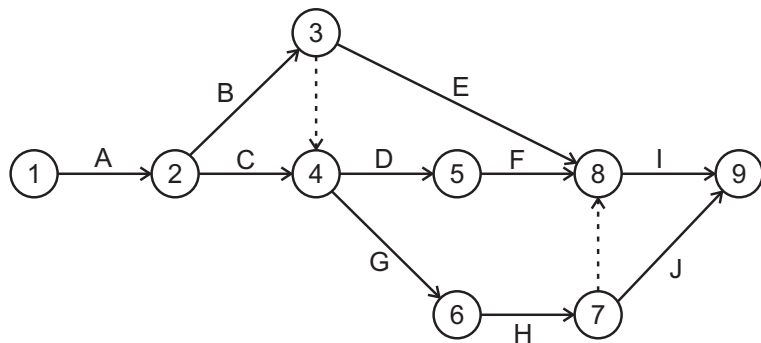
Dva kamarádi si chtějí založit prodejnu ovoce a zeleniny. Naplánovali si jednotlivé aktivity vedoucí k založení obchodu a jejich návaznosti, viz následující tabulka:

Činnost	Popis	Následuje po	Počet týdnů
A	Výběr a nákup objektu	–	6
B	Zpracování projektu	A	4
C	Obsazení pozice manažera	A	3
D	Výběr personálu	B, C	3
E	Rekonstrukce a vybavení objektu	B	8
F	Školení personálu	D	2
G	Výběr sortimentu zboží	B, C	2
H	Uzavření smluv s dodavateli	G	5
I	Nákup zboží	E, F, H	3
J	Reklama	H	2

Sestavte síťový diagram výše uvedených aktivit, který respektuje jejich návaznost. Následně najděte kritickou cestu v síti.

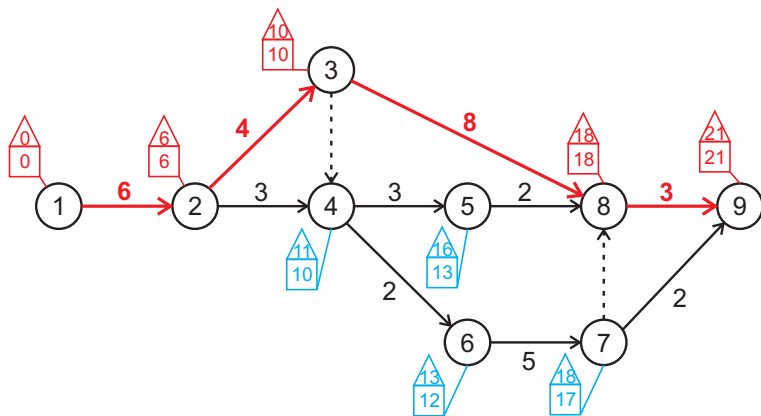
Příklad 3 k procvičení – řešení

Síťový diagram zkonstruovaný dle tabulky na předchozím slajdu:



Příklad 3 k procvičení – řešení

Červeně vyznačená kritická cesta projektu:



- 1 TAHA, Hamdy A. *Operations Research. An Introduction*. 4th edition. New York: Macmillan Publishing Company, 1989. ISBN 0-02-946750-0.
- 2 JABLONSKÝ, J. *Modely operačního výzkumu I – Přednáška 5: CPM a PERT*. [PPT prezentace]. VŠE v Praze, 2017. Dostupné z: <https://webhosting.vse.cz/jablon/vyuka.htm>.