

MA2BP_PGE, 2. ledna 2019

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 39 bodů.

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [1, 2, 5], \quad B = [1, -1, -1], \quad C = [3, 1, 7], \quad D = [-1, 3, 3].$$

- + Dokažte, že body A, B, C jsou v obecné poloze, avšak body A, B, C, D nikoli.
- + Rozhodněte, zda jsou body C a D souměrné podle přímky AB .
- + Určete poměr obsahů trojúhelníků ABC a ABD .

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[1, 1, -1, 2] + r(1, 0, 0, 1) + s(0, 1, 0, -1) \mid r, s \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{C} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid 2x_1 - x_3 = 3, 2x_2 - x_3 = -1, x_4 = 4\}.$$

- + Určete vzájemnou polohu \mathcal{B} a \mathcal{C} .
- + Určete odchylku \mathcal{B} a \mathcal{C} .

3. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{v}_1 = (2, 0, -1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (0, 2, -1, 0), \quad \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 1).$$

- + Určete vektorový součin $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$ a ukažte, že tento vektor je kolmý k $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ a \mathbf{v}_3 .

4. Projektivní transformace v rovině je dána obrazy bodů

$$[1, 1] \mapsto [0, 5], \quad [-1, 1] \mapsto [-4, 5], \quad [-1, -1] \mapsto [-4, 1], \quad [1, -1] \mapsto [0, 1].$$

- + Dokažte, že tato transformace je podobná, a určete obraz obecného bodu $[x_1, x_2]$.
- + Určete samodružné body, resp. směry transformace a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad. . .

- + . . . mnohostěnu, který není pravidelný a přitom má aspoň 2 stěny shodné.
- + . . . dvou netriviálních podprostorů, které mají vzdálenost 3.
- + . . . neidentické transformace, která má aspoň 4 různé samodružné body.

6. Dokažte, že. . .

- + . . . vlastnost v úloze 3 platí obecně.
- + . . . obecné středové promítání mezi dvěma podprostory není afinní.