MA2BP_PGE, 25. ledna 2019

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 39 bodů.

---

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [2, -1, 1], \quad B = [2, 1, 2], \quad C = [1, 2, 3], \quad D = [3, 0, 7], \quad E = [-1, 4, -1].$$

+ Dokažte, že body A, B, C tvoří rovinu a že body D, E v této rovině neleží.
+ Určete odchylku rovin ABC a ABD.
+ Určete poměr objemů mnohostěnů $ABCD$ a $ABCE$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{x_2 - 2x_4 = 2,\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 2\},$$
$$\mathcal{C} = \{[3, 9, 1, 1] + t(3, 2, 0, 1) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

+ Určete vzájemnou polohu $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.
+ Určete vzdálenost $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$.

3. V trojrozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (2, 1, 0), \quad \mathbf{v} = (1, 1, -1), \quad \mathbf{w} = (2, -4, -2).$$

+ Určete vektorový součin $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$, vnější součin $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ a ukažte, že platí

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\| = \pm[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}].$$

4. Transformace v rovině je dána předpisem

$$[x, y] \mapsto [-y - 4,\ -x - 2].$$

+ Dokažte, že tato transformace je shodná a určete její samodružné body, resp. směry.
+ Určete druh a určující prvky této transformace.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad…

+ … nepravidelného mnohoúhelníku, který je souměrný podle některé své úhlopříčky.
+ … dvou podprostorů, které jsou kolmé a mají společný směr.
+ … podobného zobrazení, které nemá žádný samodružný bod.

6. Dokažte, že…

+ … vlastnost v úloze **3** platí právě tehdy, když vektor $\mathbf{w}$ je kolmý k $\mathbf{u}$ a $\mathbf{v}$.
+ … každé ekviafinní zobrazení je prosté (injektivní).