

MA2BP_PGE, 31. ledna 2019

Všechna následující analytická vyjádření jsou v kartézských souřadnicích příslušného eukleidovského prostoru.

Každý úkol (+) je hodnocen 6 body; k ústní zkoušce je potřeba aspoň 39 bodů.

1. V trojrozměrném prostoru jsou dány body

$$A = [-2, 0, 6], \quad B = [8, 0, 6], \quad C = [8, 6, -2], \quad D = [-2, 6, -2], \quad E = [3, -5, -4].$$

- + Dokažte, že $ABCDE$ je pravidelný čtyřboký jehlan.
- + Určete odchylku některé hrany jehlanu procházející vrcholem od jeho podstavy.
- + Určete souřadnice bodu F , který je souměrný s bodem E podle roviny $ABCD$.

2. Ve čtyřrozměrném prostoru jsou dány afinní podprostory

$$\mathcal{B} = \{[-1, 1, -4, 1] + t(1, 1, 2, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$\mathcal{C} = \{[x_1, x_2, x_3, x_4] \mid 2x_1 - x_3 = 5, \quad x_1 - x_2 - 2x_4 = -10, \quad 2x_2 - x_3 + x_4 = 22\}.$$

- + Určete vzdálenost \mathcal{B} a \mathcal{C} .
- + Určete vzájemnou polohu \mathcal{B} a \mathcal{C} .

3. Ve dvourozměrném prostoru jsou dány vektory

$$\mathbf{u} = (3, 2), \quad \mathbf{v} = (2, -1).$$

- + Určete vnější součin $[\mathbf{u}, \mathbf{v}]$, odchylku $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ a ukažte, že platí

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha.$$

4. Projektivní transformace v rovině je dána obrazy bodů

$$[0, 1] \mapsto [-3, 4], \quad [0, -1] \mapsto [-1, 0], \quad [-1, 0] \mapsto [-4, 3], \quad [1, 0] \mapsto [0, 1].$$

- + Dokažte, že tato transformace je afinní, a určete obraz obecného bodu $[x_1, x_2]$.
- + Určete samodružné body, resp. směry a rozhodněte, zda je tato transformace základní.

5. Ve vhodném prostoru udejte konkrétní příklad. . .

- + . . . nepravidelného mnohoúhelníku, jehož těžiště splývá s počátkem souřadné soustavy.
- + . . . dvou mimoběžných podprostorů, které mají společný směr.
- + . . . středového promítání mezi dvěma podprostory, které je podobné.

6. Dokažte, že. . .

- + . . . vlastnost v úloze 3 platí obecně.
- + . . . pokud má afinní transformace (vlastní) samodružné body, potom všechny tyto body tvoří afinní podprostor.