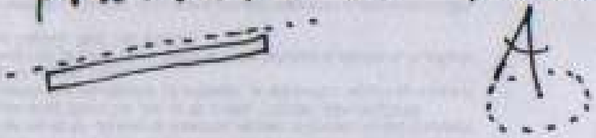
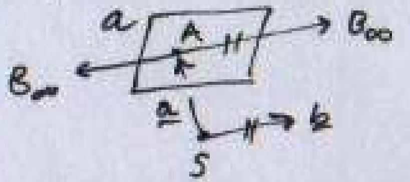
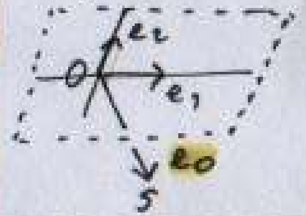
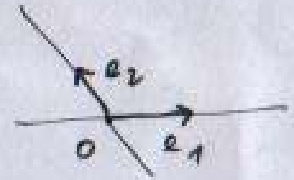
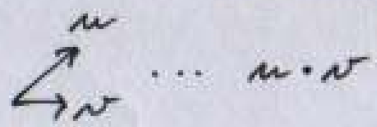
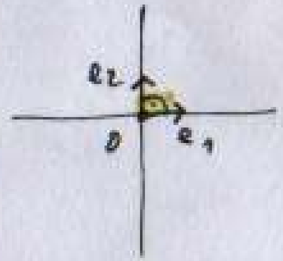
| | MINULÝ SEMESTR | TENTO SEM. |
|---|---|---|
| PŘEDMĚT | geometrie | totéž |
| CÍLE | opakování, rozšíření a organizace poznatků | totéž |
| NÁSTROJE | pravítko a kružítko  | lineární algebra  |
| PŘEDPOKLADY | $\emptyset$ | lineární algebra! |
| VÝHODY | jednoduchost, představivost apod. | jednotný popis (vzhledem k dim), žádná představivost apod. |
| TYPICKÉ ÚLOHY | sestrojte<br>- obecný průmět tělesa<br>- průmět řezu<br>- řez ve skutečné velikosti | spočítejte<br>totéž |

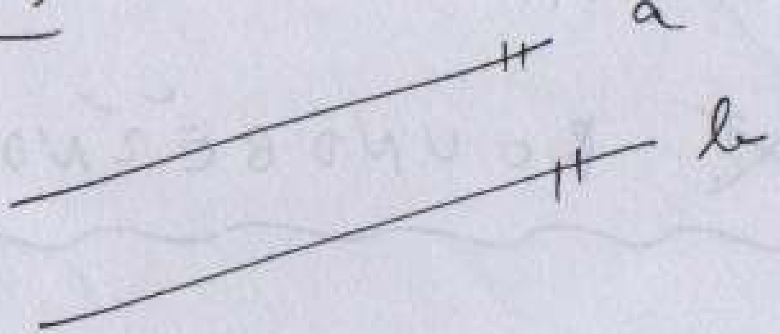
| | MINULÝ SEMESTR | TENTO SEM. |
|---|---|---|
| ZÁKLADNÍ POJMY | bod, přímka, rovina | vektor |
| ZÁKLADNÍ VZTAHY | incidentnost, rovnoběžnost, shodnost apod. | lineární závislost, resp. nezávislost, skalární součin, apod. |
| ZÁKLADNÍ ÚLOHY | sestrojitelné veličiny | — |
| | průnik přímky a roviny | soustava lin. rovnic |
| | vzdálenost bodů | velikost vektoru |
| | obsah mnohoúhelníku (kvadratura) | determinant |
| | apod. | apod. |

| ZOBRAZENÍ | PROSTORY | ÚLOHY | VYMEZENÍ ALG. | POČÍTÁNÍ |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| projektivní | projektivní $\mathcal{P}$ (3) | polohové | $\mathcal{P} = \mathcal{A} \cup \{\infty\}$<br>pomocí $W \supset V$<br> | homogenní souřadnice<br> |
| afinní | afinní $\mathcal{A}$ (1) | | $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \to V$<br>$A.$ $\cdot B$ … $\vec{AB}$<br>body … vektor | afinní souř.<br> |
| ekvi-afinní, podobná, shodná | eukleidovské $\mathcal{E}$ (2) | metrické | $\mathcal{E} = \mathcal{A}$ + skalární součin<br><br>vektory … číslo | kartézské souřadnice<br> |

# ROVNOBĚŽNOST

← typický afinní pojem

**Def**

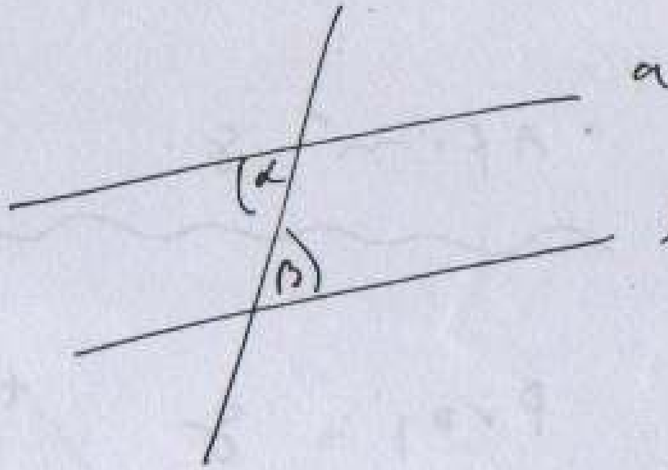



$a \parallel b$, pokud leží v jedné rovině

eukleid. (afinní)

a $\quad a \cap b = \emptyset$

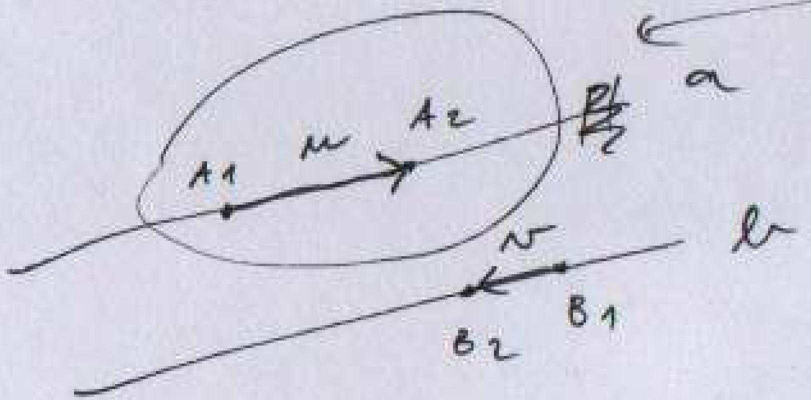
**charakterizace**




$a \parallel b \iff \alpha = \beta$

shodnost úhlů

## char. bez shodnosti



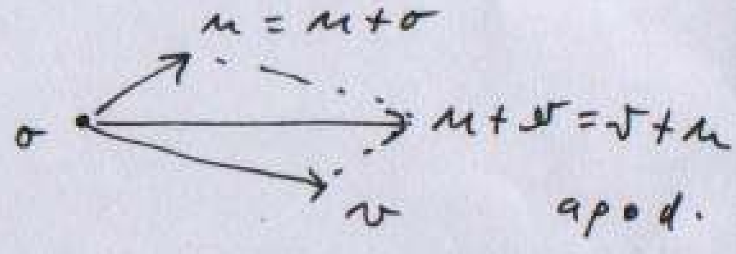

"afinní struktura" ...

$a \parallel b \iff u = \text{násobek} \cdot v$

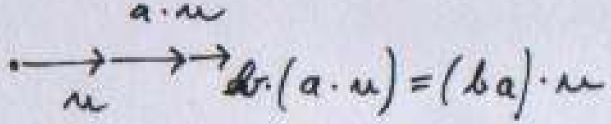
lin. závislost vektorů

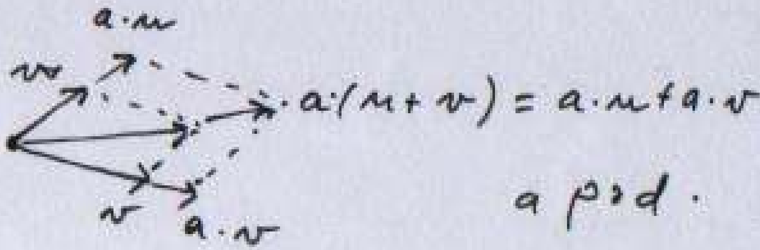
# VEKTOROVÝ PROSTOR nad ℝ (*)

• komutativní grupa




• na níž působí ℝ v souladu s




---

(*) v algebře stačí lib. těleso (např. ℚ)

pro geometrii potřebujeme ℝ kvůli

SPOJITOSTI!

(OPAKOVÁNÍ)

# AFINNÍ PROSTOR se zaměřením V

= "vektorový prostor V bez význačného prvku $\vec{0}$"

= množina (bodů) na niž působí V ...
(jakožto grupa posouvání)

= množina (bodů) s přiřazením,
$\boxed{\alpha \times \alpha \to V}$ (dvěma bodům ... vektor)
které je kompatibilní se strukturou V:

osn. $\vec{AB} \in V$

$B \in a$

$A \in a$

---

píšeme taky:

"$\vec{AB} = B - A$"

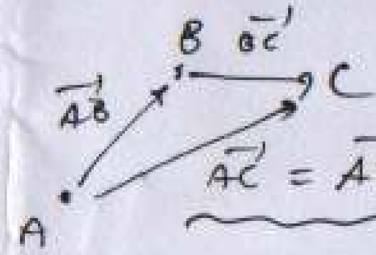
$$\boxed{\dim a := \dim V}$$

kompatibilita:

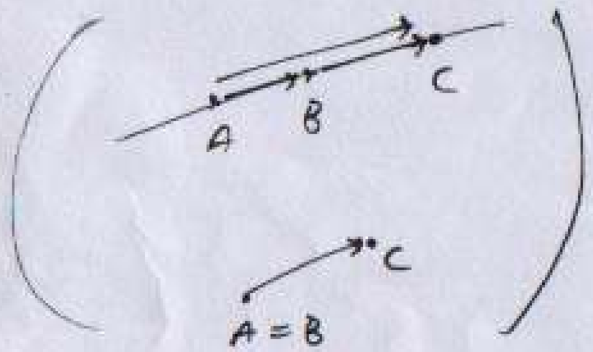
(1) lib. $A \in a$, lib. $v \in V$

$\rightsquigarrow$ "koncový" bod $B$ existuje a je jeden (tj. $\vec{AB} = v$)

$A \xrightarrow{v}$ "$B = A + v$"

(2)  pro lib. $A, B, C \in a$

$$\underbrace{\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}}$$



$\boxed{\text{PŘÍKLADY}}$ (další)

- $\boxed{\mathcal{A} = \mathbb{R}^n}$ $V = \mathbb{R}^n$ ← std. vekt. pr. dim $n$

$u = (u_1, u_2, \dots)$
$v = (v_1, v_2, \dots)$

$\underbrace{\qquad}$

$u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots)$
$a \cdot u = (a u_1, a u_2, \dots)$

std. af. struktura:

$A = [a_1, a_2, \dots]$ lib
$B = [b_1, b_2, \dots]$

$\underbrace{\qquad}$

$\vec{AB} = B - A := (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots)$

$\underbrace{\qquad}$

splňují (1) a (2)

$\Rightarrow$ af. prostor dim $n$

standardní

(2) $\vec{AC} \overset{?}{=} \vec{AB} + \vec{BC}$ pro lib. $A, B, C \in a$

$C = [c_1, c_2, \dots]$

$\vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, \dots)$

$\vec{AB} + \vec{BC} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots) + (c_1 - b_1, c_2 - b_2, \dots)$

$= (\cancel{b_1} - a_1 + c_1 - \cancel{b_1}, \dots)$

splněno ✓

---

(1) $\vec{AB} = u$ pro lib $A \in a$, $u \in V$ ?

$(b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots) = (u_1, u_2, \dots)$

$\Updownarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} b_1 = a_1 + u_1 \\ b_2 = a_2 + u_2 \\ \vdots \end{array}}$ ← tímto je $B = [b_1, b_2, \dots]$ určen jednoznačně ✓

• $a = \{$ řešení <u>lineární</u> differenciální rovnice $y'' - 4y' + 5y = 10 \}$

$V = \{ \; ?\,? \; \}$

$ř_1, ř_2 \in a \rightsquigarrow ř_2 - ř_1 \in V$ ??

$\qquad\qquad \overrightarrow{ř_1 ř_2}$

odhalte af. struktura

$\Longrightarrow$ vyřešte rovnici : . . . .

$\rightsquigarrow$ obecné řešení

ob. řeš. homogenní rov.

$$y = 2 + c_1 e^{2x} \cos x + c_2 \cdot e^{2x} \sin x$$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ lib.

partikulární řešení

řád 2

$V = \{$ řešení homog. rovnice $y'' - 4y' + 5y = 0 \}$

$= \{ y = c_1 e^{2x}\cos x + c_2 e^{2x}\sin x \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$

(vzhledem k std. operacím)

dim 2

---

$\check{r}_1, \check{r}_2 \in \mathcal{A} \rightsquigarrow \overrightarrow{\check{r}_1\check{r}_2} := \check{r}_2 - \check{r}_1$

skut. rozdíl funkcí

---

ověření (1) a (2)
uděláme chytřeji později … s. 15

- spec:

$\mathcal{A}$ = { primitivní funkce k funkci $f$ }

= { řešení (lin) diff. rovnice $y' = f$ }

= { $y = F + c \mid c \in \mathbb{R}$ }

partik. řešení

ob. řeš. homog. rovnice $y' = 0$

⋮

dim 1

- $\boxed{\mathcal{A} = \{ \text{řešení soustavy } \underline{\text{lineárních}} \text{ (alg.) rovnic}}$ $\left.\begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 3 \\ 3x_1 - x_3 = 4 \end{matrix}\right\}$

pro neznámé $x_1, x_2, x_3$

$$= \left\{ \begin{matrix} x_1 = t \\ x_2 = 3 - 2t \\ x_3 = 4 + 3t \end{matrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore$ $\underline{\dim 1}$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

partikul. řeš.

obec. řeš. homog. soustavy

$$V = \left\{ \begin{matrix} 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{matrix} \right\}$$

# POSTŘEHY / POUČENÍ / . . .

Pro $\mathcal{A} = \{ \text{řeš. } \ldots \; y'' - 4y' + 5y = 10 \}$

$$= \Big\{ \underline{y = \underbrace{2}_{\text{jeden prvek } \mathcal{A}} + \underbrace{c_1 e^{2x} \cos x + c_2 e^{2x} \sin x}_{\text{zaměření } V}} \;\Big|\; \underbrace{c_1, c_2 \in \mathbb{R}}_{\dim 2} \Big\}$$

$\updownarrow$ ztotožnění se std. $\mathcal{A}' = \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{A}' = \{ \underline{[c_1, c_2]} \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}$$

Přičemž "rozdíl v $\mathcal{A}$" odpovídá "rozdílu v $\mathcal{A}'$" !

(Tedy $\mathcal{A}$ je také afinní prostor . . . s. 12)

16

- "rozdíl v a" ... $\overrightarrow{\check{r}_1\check{r}_2} = 2 + c_1 \bigcirc + c_2 \bigcirc$

$$\check{r}_1 = 2 + c_1 \bigcirc + c_2 \bigcirc$$
$$\check{r}_2 = 2 + d_1 \bigcirc + d_2 \bigcirc$$

$$\check{r}_1\check{r}_2 = \check{r}_2 - \check{r}_1 = \cancel{2} + d_1 \bigcirc + d_2 \bigcirc - \cancel{2} + c_1 \bigcirc + c_1 \bigcirc$$
$$= (d_1 - c_1) \bigcirc + (d_2 - c_2) \bigcirc$$

ev

$\updownarrow$

- "rozdíl v a'" ...

$$\left.\begin{array}{l} C = [c_1, c_2] \\ D = [d_1, d_2] \end{array}\right\} \overrightarrow{CD} = D - C = (d_1 - c_1, d_2 - c_2)$$

OK