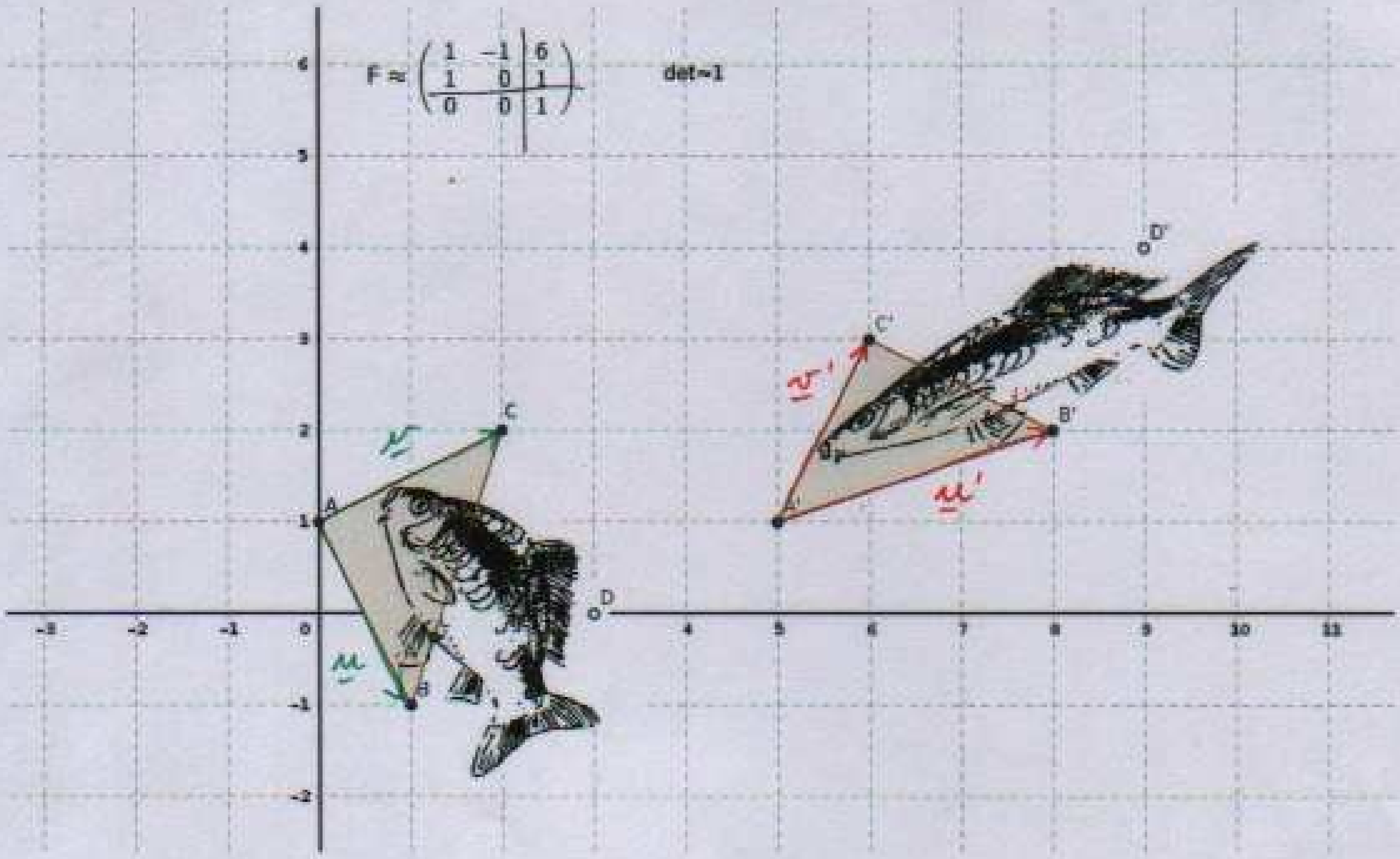
736

# 3. PŘÍKLAD — jiné AFINNÍ zobr. . .




## A) přímo (NESNADNO) z předchozího:

$$\underline{e}_1 = \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{u} + \boxed{\tfrac{2}{5}}\,\underline{v}$$

$$\underline{e}_2 = \boxed{-\tfrac{2}{5}}\,\underline{u} + \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{v}$$

$$O = A - \underline{e}_2$$

$$\underline{e}_1' = \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{u}' + \boxed{\tfrac{2}{5}}\,\underline{v}' = (1,1)$$

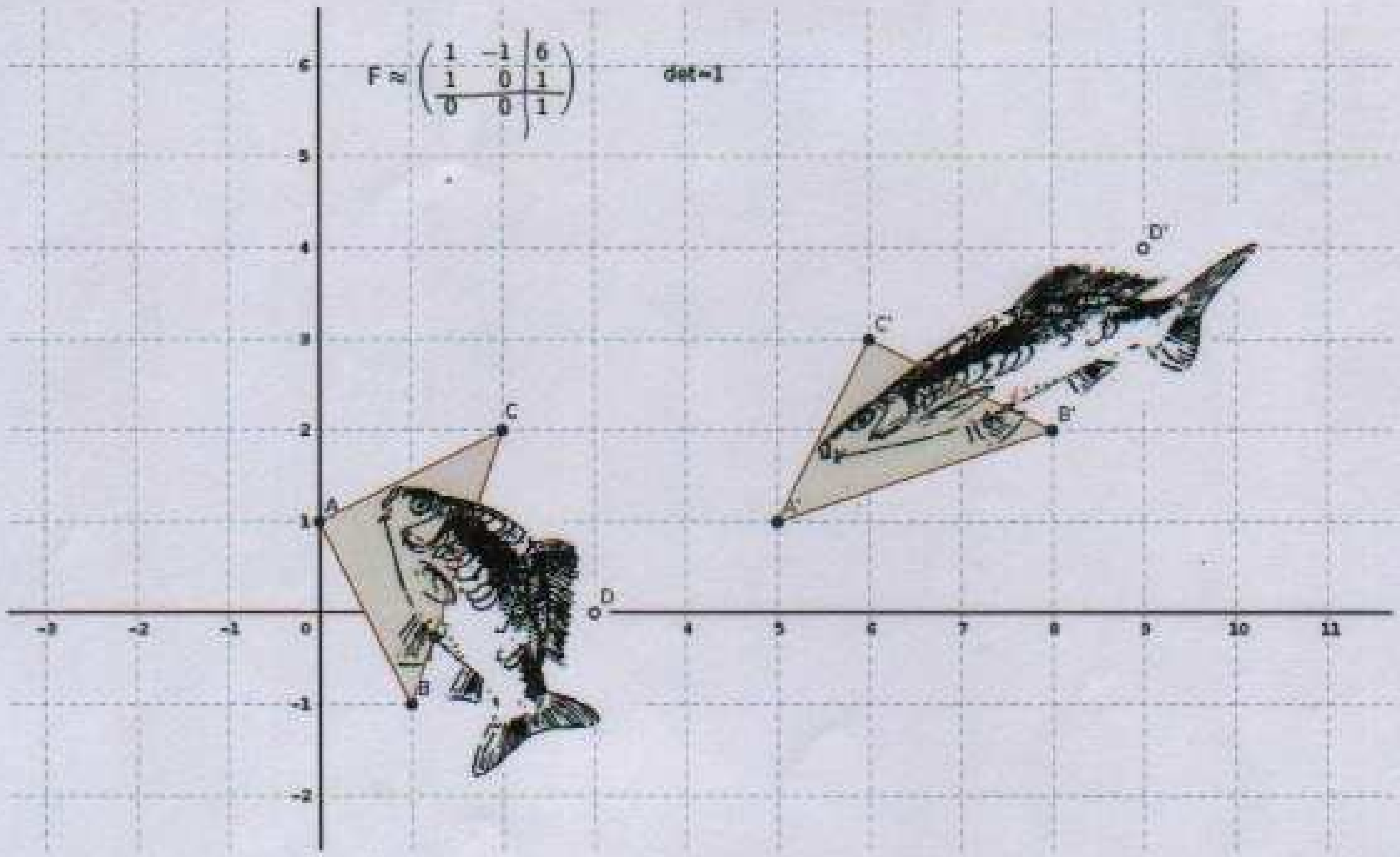
$$\underline{e}_2' = \boxed{-\tfrac{2}{5}}\,\underline{u}' + \boxed{\tfrac{1}{5}}\,\underline{v}' = (-1,0)$$

$$O' = A' - \underline{e}_2' = (6,1)$$

soustava rovnic "souřadnice vektorů $\underline{e}_1, \underline{e}_2$ v bázi $(\underline{u}, \underline{v})$ . . ."

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

137 3. **PŘÍKLAD** ... pokračování




B) NEPŘÍMO — dosazení dvojic bodů:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \hline 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c} a & b & k \\ c & d & l \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

• $A \mapsto A'$: $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$ $\boxed{\begin{array}{l} 5 = b + k \\ 1 = d + l \end{array}}$

• $B \mapsto B'$: $\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$ $\boxed{\begin{array}{l} 8 = a - b + k \\ 2 = c - d + l \end{array}}$

• $C \mapsto C'$: $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \iff$ $\boxed{\begin{array}{l} \cdots \\ \cdots \end{array}}$

obecně ... $m \cdot (m+1)$

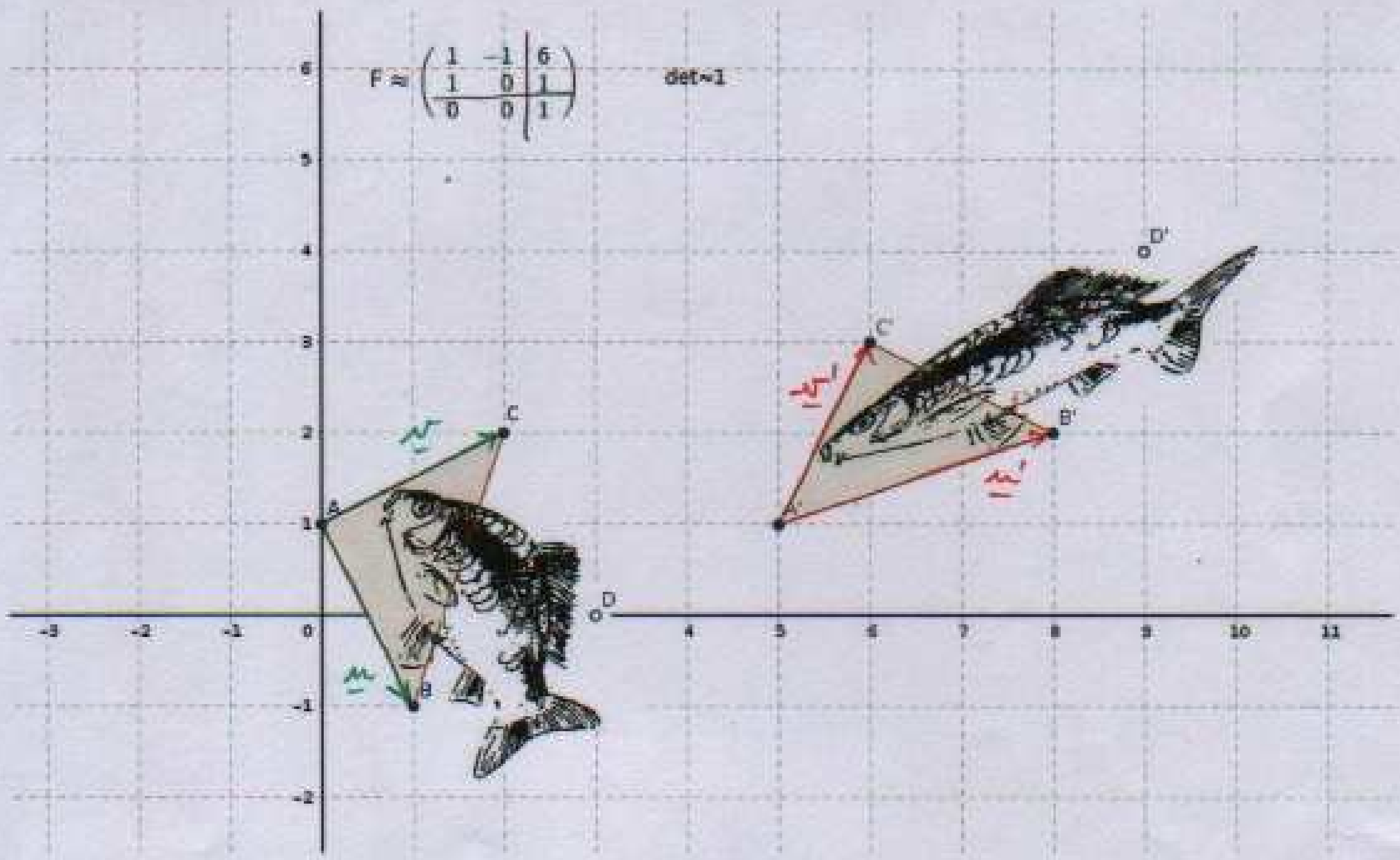
CELKEM $\boxed{6}$ lin. ROVNIC / $\boxed{6}$ neznámých ...

.... jednoznačné řešení:

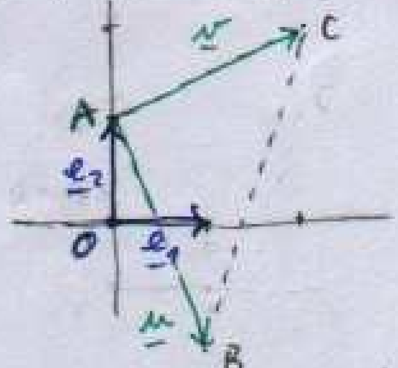
$a = 1 \quad c = -1 \quad k = 6$

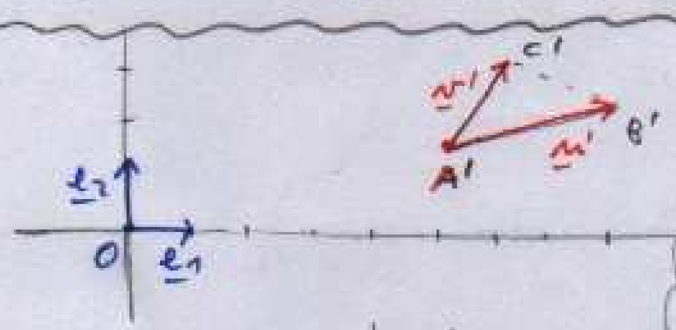
$b = 1 \quad d = 0 \quad l = 1$

[138] 3. PŘÍKLAD ... pokračování




(c) NEPŘÍMO — SLOŽENÍM JEDNODUŠŠÍCH!




podobnost s koef. na s. 136 NENÍ náhodná!

$$G = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad H = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$F \circ G = H, \text{ tj. } F = H \circ G^{-1}$$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

139 JAK POZNAT ŽE SOUŘ. VYJÁDŘENÍ ...

.... (NE-)DEGENEROVANOST ?

$$n\left\{\begin{pmatrix} X' \\ \hline 1 \end{pmatrix}\right. = \underbrace{\begin{pmatrix} \overset{m}{D} & C \\ \hline 0 & 1 \end{pmatrix}}_{F} \cdot \left.\begin{pmatrix} X \\ \hline 1 \end{pmatrix}\right\}m$$

- pro $m = n$ (transformace):

  zobr. je nedegen. $\Leftrightarrow$ vzájemně jednoznačné $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ det $D \neq 0$ $\Leftrightarrow$ det $F \neq 0$

nutně $m < n$

- pro $m \neq n$ :

  zobr. je nedegen. $\Leftrightarrow$ prosté $\Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow$ jádro $D = o$ $\Leftrightarrow$ jádro $F = 0$

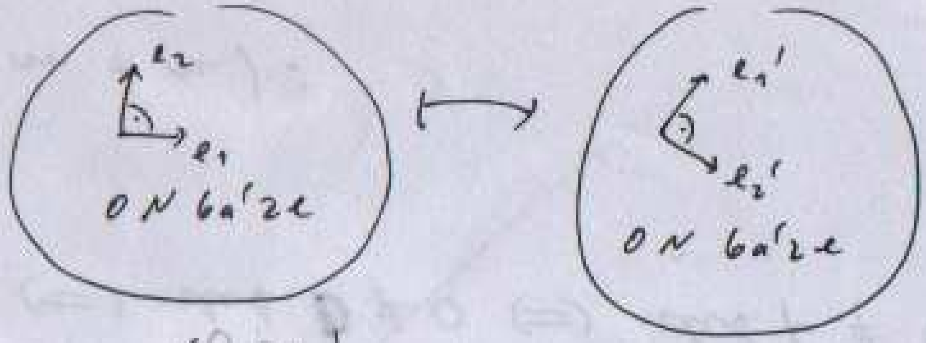
# JAK POZNAT ...

## ... TYP ZOBRAZENÍ ?


... ON báze

↦ předp. $\left(\begin{array}{c} X' \\ \hline 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} D & c \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right) \cdot \left(\begin{array}{c} X \\ \hline 1 \end{array}\right)$ ... vzhledem ke kartézské souř. soust.

- zobr. je SHODNÉ $\iff$




$\iff D = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$ $e_1'$ $e_2'$ ... ON báze

$\iff e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \dots = 1$

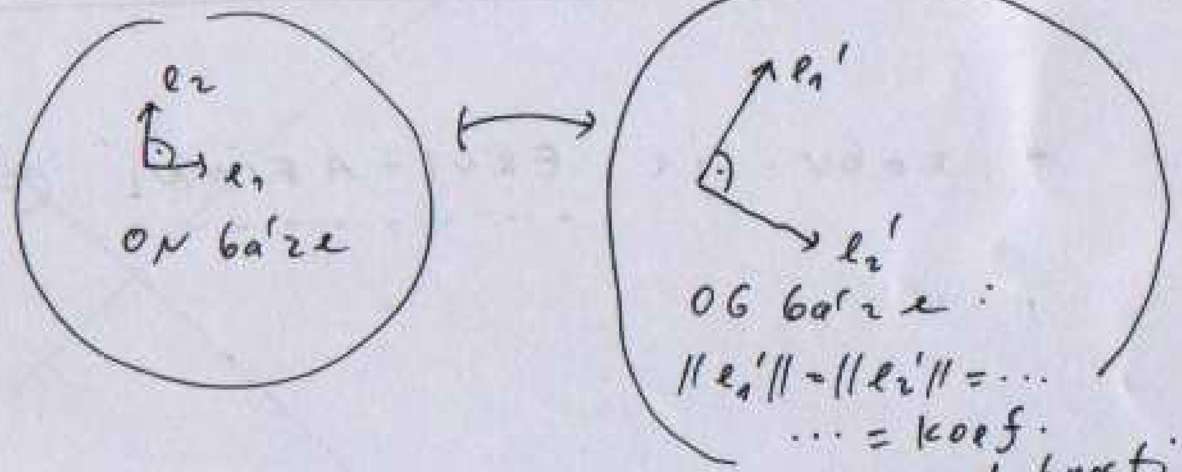
$e_1' \cdot e_2' = \dots\dots = 0$

$\iff \underbrace{\left(\begin{array}{c} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{array}\right)}_{D^T} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{c|c|c} e_1' & e_2' & \dots \end{array}\right)}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{E}$

$D^T \cdot D = E$

# ... TYP (pokračování)

- zobr. je PODOBNÉ $\Leftrightarrow$




ozn. $k$

$$\Leftrightarrow \quad e_1' \cdot e_1' = e_2' \cdot e_2' = \cdots = k^2$$

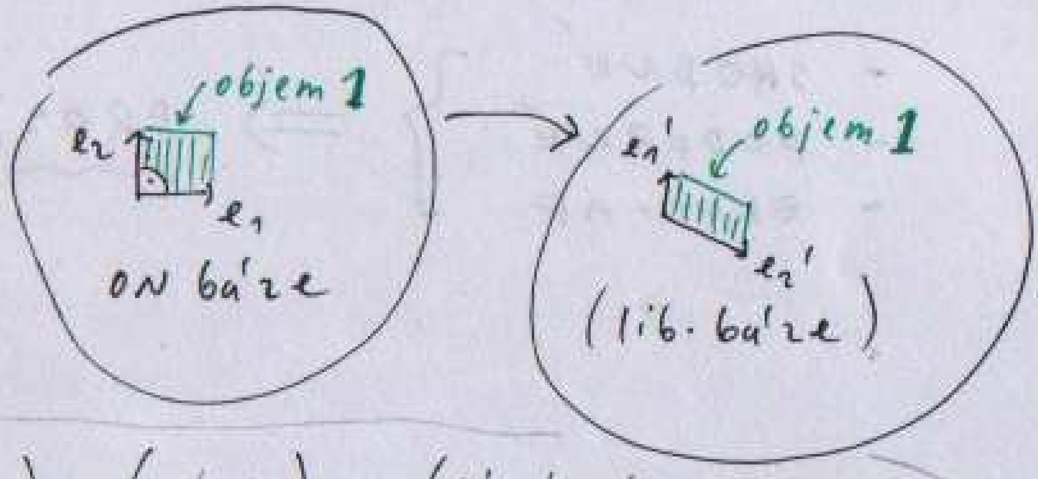
$$e_1' \cdot e_2' = \cdots\cdots = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}_{D^T} \cdot \underbrace{\left( e_1' \middle| e_2' \middle| \cdots \right)}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} k^2 & 0 & \cdots \\ 0 & k^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{k^2 \cdot E}$$

$$D^T \cdot D = k^2 \cdot E$$

## … TYP (pokračování)

- zobr. je EKVI-AFINNÍ $\Leftrightarrow$




postřeh: [redacted] $\underbrace{\begin{pmatrix} e_1' \\ \hline e_2' \\ \hline \vdots \end{pmatrix}}_{D^T} \cdot \underbrace{\left( e_1' \middle| e_2' \middle| \cdots \right)}_{D} = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1'\cdot e_1' & e_1'\cdot e_2' & \cdots \\ e_2'\cdot e_1' & e_2'\cdot e_2' & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}}_{\text{Gramova matice !}}$

$\rightsquigarrow$ tedy $\det(D^T \cdot D) = (\text{objem}$  $)^2$

$\Leftrightarrow \quad \det(D^T \cdot D) = 1$

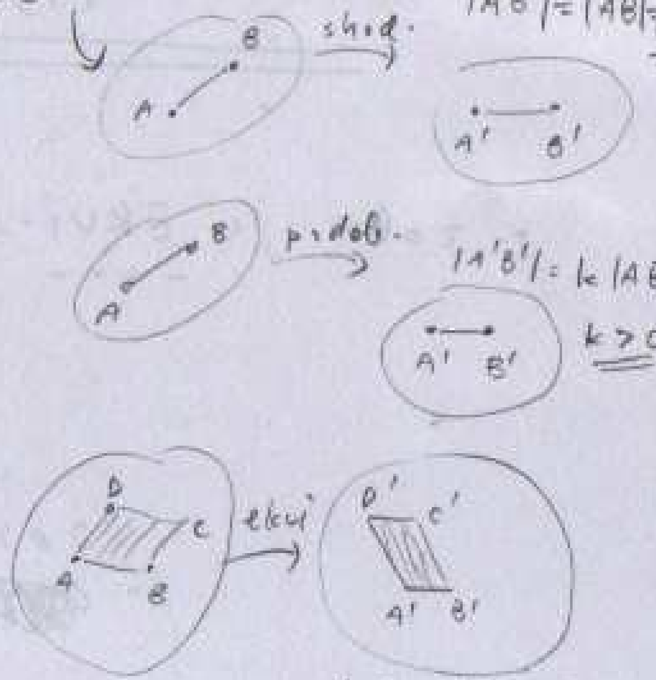
- pokud $D$ čtvercová $(m = n)$: EKVI-AFINNÍ $\Leftrightarrow$ $\det D = 1$

143 POZNÁMKA

- SHODNÉ
- PODOBNÉ
- EKVI-AF

$\Big\} \Longrightarrow$ PROSTÉ!

$(A \neq B \Leftrightarrow |AB| \neq 0)$




$|A'B'| = |AB| \neq 0$

$|A'B'| = k|AB|$

$k > 0$

objem' = objem $\neq 0$

# JAK POZNAT ...

# ... ZÁKLADNÍ TRANSFORMACE ?

→ mají "hodně" samodružných prvků

přičemž:

- samodr. prvky: BODY = vlastní body; SMĚRY ≈ nevlastní body

- "hodně" ... NAD-ROVINU (vlastní, nevlastní)

viz osová souměrnost v rovině

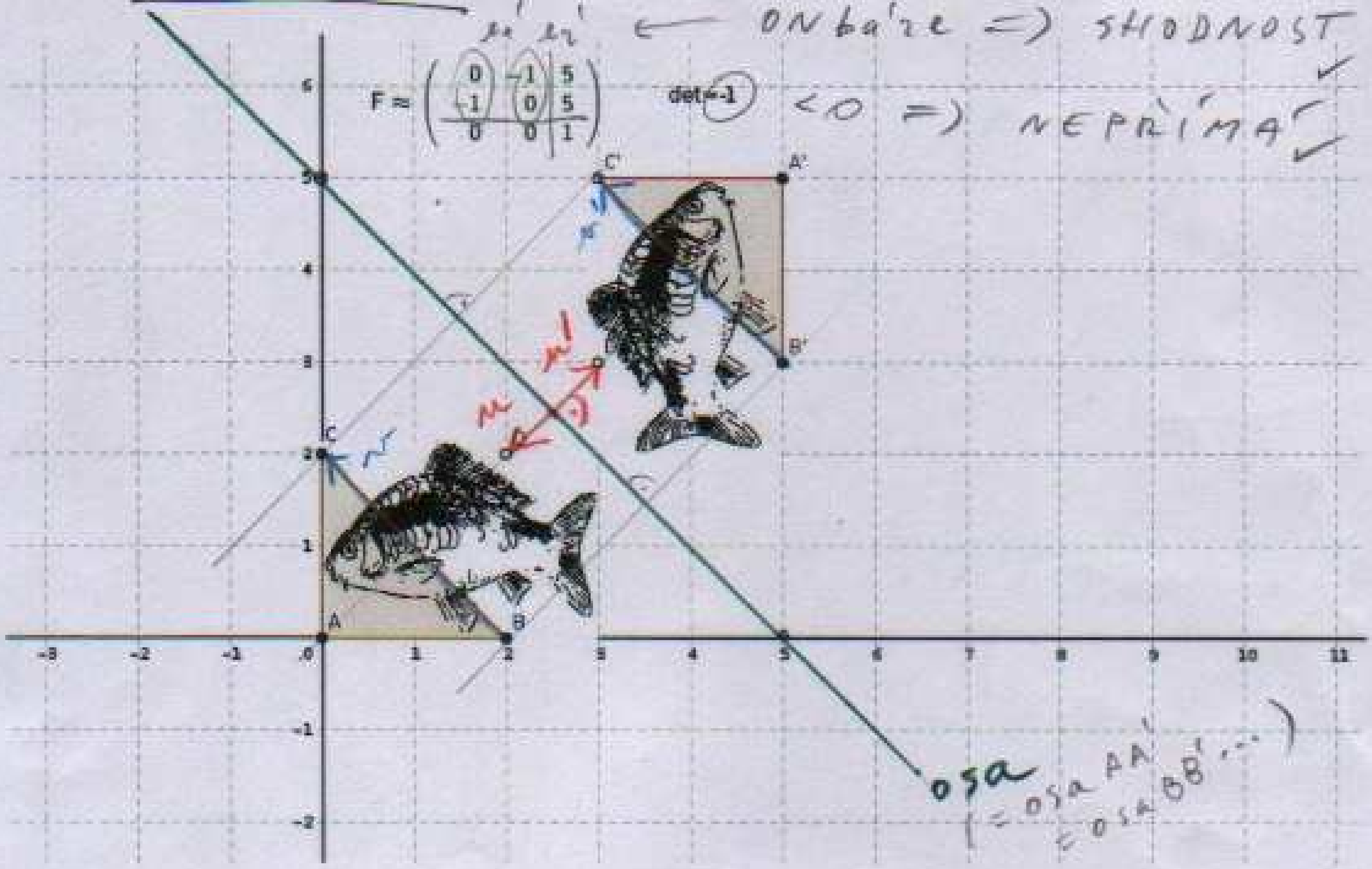
viz STEJNOLEHLOST

→ samodr. SMĚRY afinního zobrazení ≈

≈ CHARAKTERISTICKÉ vektory odp. lineárního zobr.

viz dále ...

145 **PŘÍKLAD — osová souměrnost**




- OSA = přímka samodružných (pevných) bodů

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ 1 \end{pmatrix} = \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ \hline & & \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad F = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & 5 \\ -1 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$-x_1 - x_2 + 5 = 0$$
$$-x_1 - x_2 + 5 = 0$$

⤳ osa = přímka $\boxed{x_1 + x_2 = 5}$

- samodr. směry:
  - $v$ = směr osy ⇒ $v' = v$
  - $u \perp$ ose ⇒ $u' = -u$

tj. $v$ = char. vektor lin. zobr. $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
odp. char. hodnotě $\lambda = +1$

$u$ = ——— " ——— $\lambda = -1$

- kontrola:

$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow v' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = +1 \cdot v$ ✓

$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow u' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot u$ ✓

- Jak na char. vektory přímo?

pro $\lambda = +1$: $v' = \underbrace{D \cdot v = +1 \cdot v}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} -v_1 - v_2 = 0 \\ -v_1 - v_2 = 0 \end{array}\right\} v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ a všechny násobky ✓

pro $\lambda = -1$: $u' = \underbrace{D \cdot v = -1 \cdot u}$

$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$

$\left.\begin{array}{l} u_1 - u_2 = 0 \\ -u_1 + u_2 = 0 \end{array}\right\} u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ a všechny násobky ✓

147 **Jak na CHAR. VEKTORY obecně?** (opakování z ALGEBRY)

- $v$ = char. vektor lin. zobr. $D$ odp. char. hodnotě $\lambda \in \mathbb{R}$,

  pokud $v' = \underbrace{D \cdot v = \lambda \cdot v}$

$$D \cdot v - \lambda \cdot v = 0$$

$$\boxed{(D - \lambda E) \cdot v = 0}$$

tato soustava má netriviální řešení

$\Leftrightarrow$ hodnost $(D - \lambda E)$ není max.

$\Leftrightarrow$ $\det(D - \lambda E) = 0$

"char. polynom"

- $v = o$ ... char. vektor. pro lib. $\lambda \in \mathbb{R}$

- $v \neq o$ ... char. vektor odp. $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$

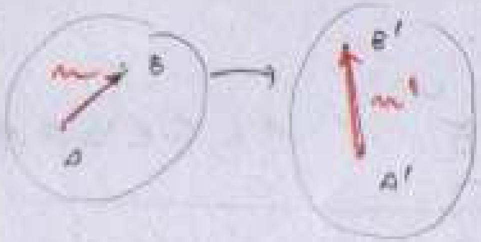
  $\Leftrightarrow$ $\lambda$ ... kořen char. polynomu

# POZNÁMKY

- pro shodné : $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \pm 1$

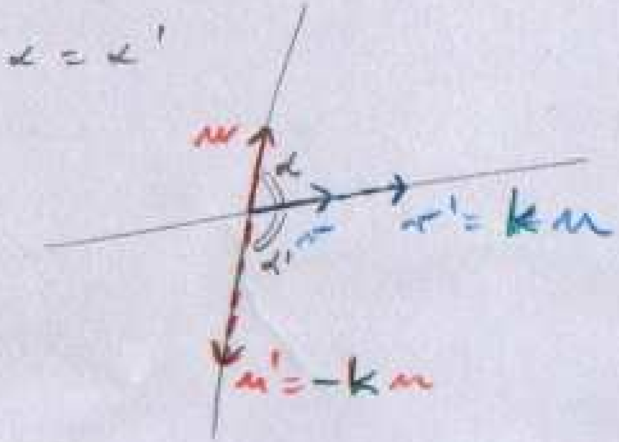

$\|u'\| = \|u\|$

- pro podobné : $\lambda \in \mathbb{R}$ ... char. číslo $\Longrightarrow$ $\lambda = \pm k$
  koef. $k$




$\|u'\| = k\|u\|$

- pro podobné (tedy i shodné) :




... char. vektory odp. různým char. číslům jsou kolmé !

149 POZNÁMKY (pokrač.) $D = (e_1'|e_2'|\ldots)$

- pro shodné: $\det D = \pm 1 \Rightarrow$ ekvi-afinní
- pro podobné: $\det D = \pm k^n$ ← $n$ = dim prostoru
  koef. $k$

- OBECNĚ (ALGEBRA)

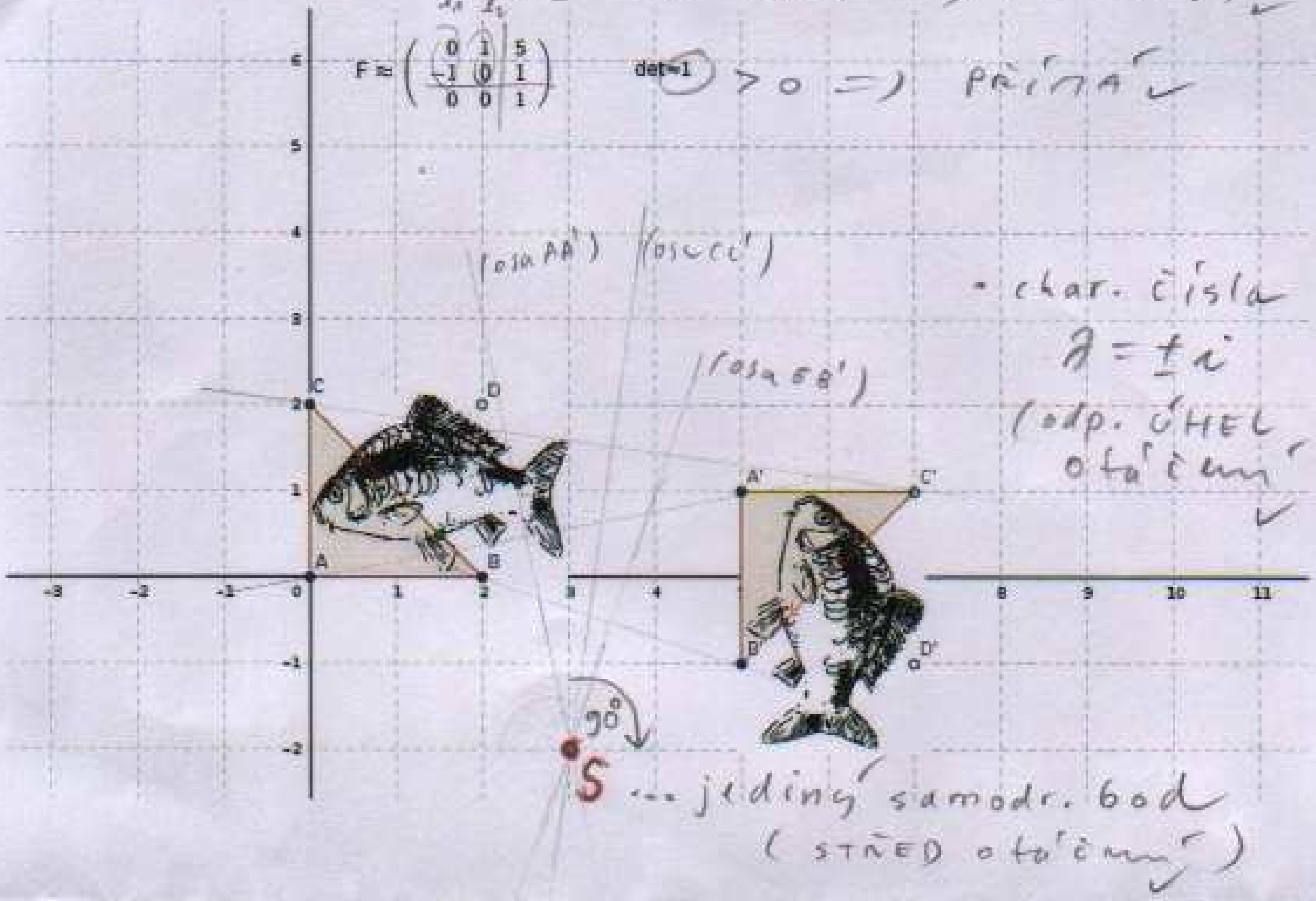
$$\boxed{\det D = \text{součin všech char. hodnot vč. násobnosti}}$$

obecně komplexních!

# 150 CVIČENÍ — otáčení

$s_1' \; s_2'$ ← ON báze ⇒ SHODNOST ✓

$$F \approx \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \det = 1 > 0 \Rightarrow \text{PŘÍMÁ} ✓$$




• char. čísla

$\lambda = \pm i$

(odp. ÚHEL otáčení) ✓

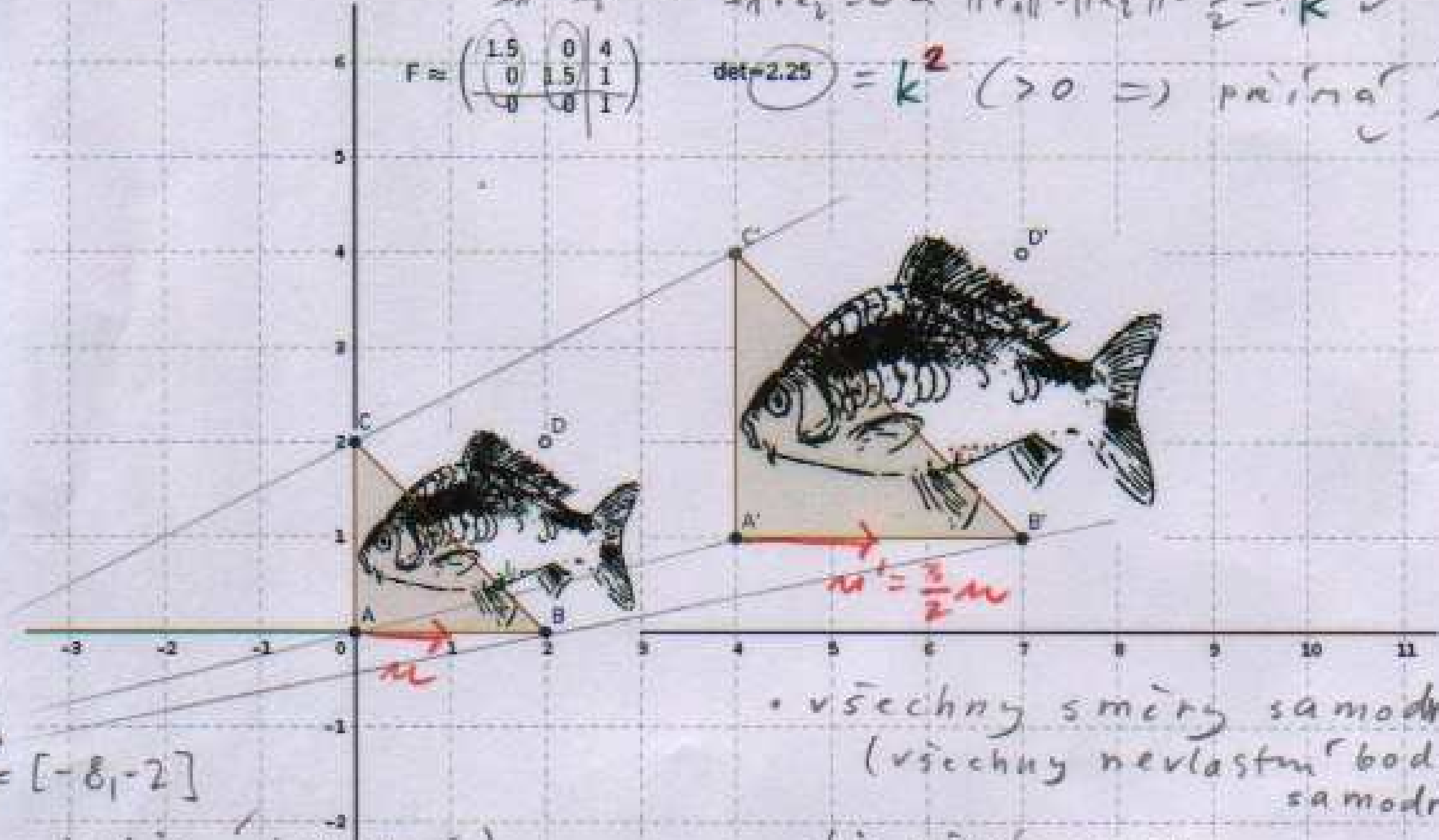
S ... jediný samodr. bod

(STŘED otáčení) ✓

151 **cvičení — stejnolehlost**

$e_1' \; e_2'$ ← $e_1' \cdot e_2' = 0$ & $\|e_1'\| = \|e_2'\| = \frac{3}{2} =: k$ ✓

$$F \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1.5 & 0 & 4 \\ 0 & 1.5 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \text{det}=2.25 = k^2 \; (>0 \Rightarrow \text{přímá})$$




$u' = \frac{3}{2} u$

$u$

• všechny směry samodr. (všechny nevlastní body samodr.)

$S = [-8, -2]$ … jediný (vlastní) samodr. bod (STŘED stejnolehlosti)

tj. všechny vektory: $v' = \frac{3}{2} v$

ATZ

# CVIČENÍ — elace

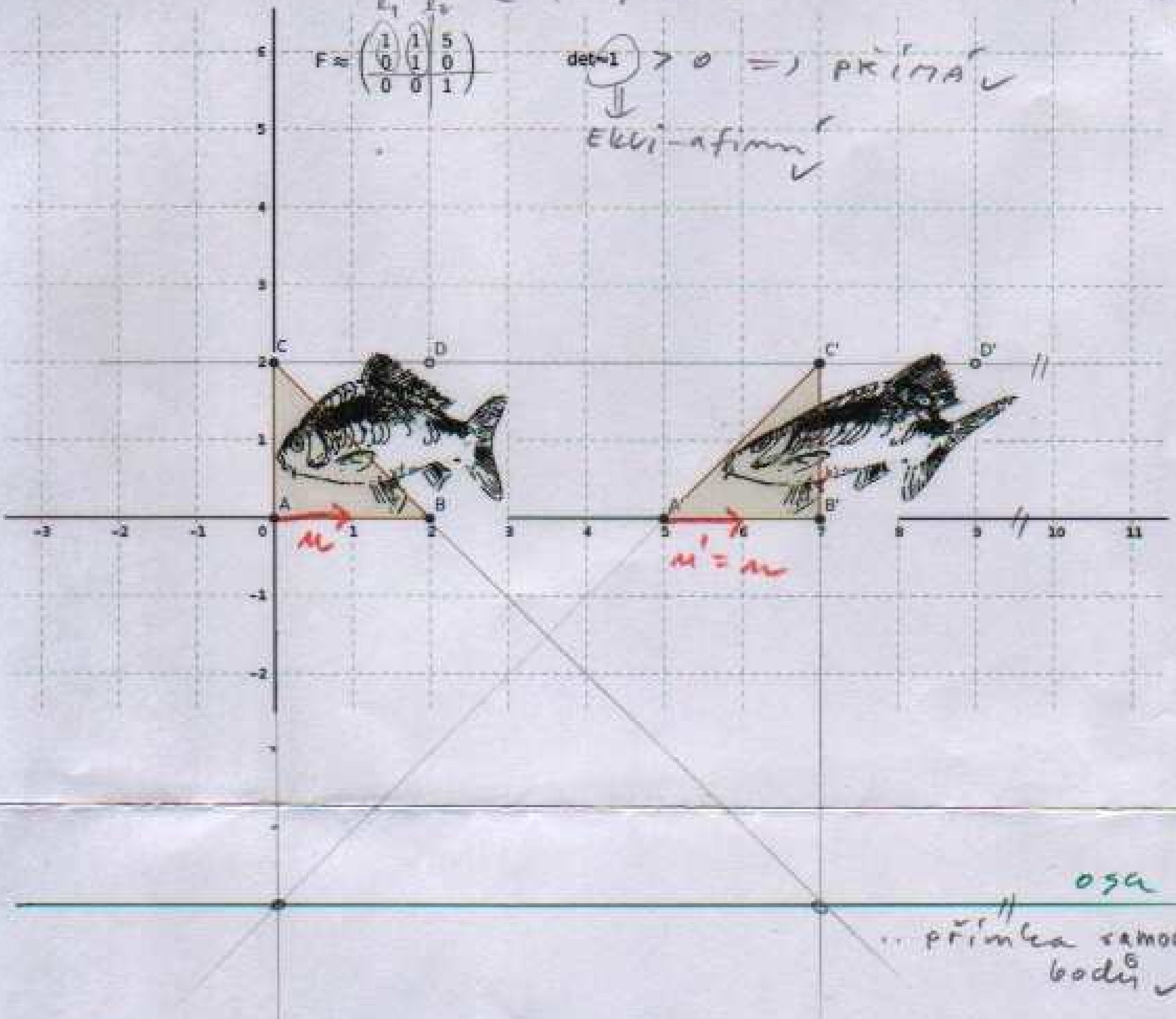
$e_1'$ $e_2'$ ← (nejsou $\perp$ ⇒) není PODOBNÉ/SHODNÉ ✓

$$F \approx \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

det=1 > 0 ⇒ PŘÍMÁ ✓

⇓

Ekvi-afinní ✓




$\boxed{\text{POZN}}$ ... $|D-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2$

$\lambda = 1$ .. 2násobný kořen

$\lambda = 1$ ..... $v' = \underbrace{D \cdot v = 1 \cdot v}$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ } $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ✓ a všechny násobky .. dim 1

OBECNĚ ✓ (ALGEBRA):

(dim podpr. char. vektorů odp. $\lambda$) $\leq$

$\leq$ (algebraická násobnost kořene $\lambda$)