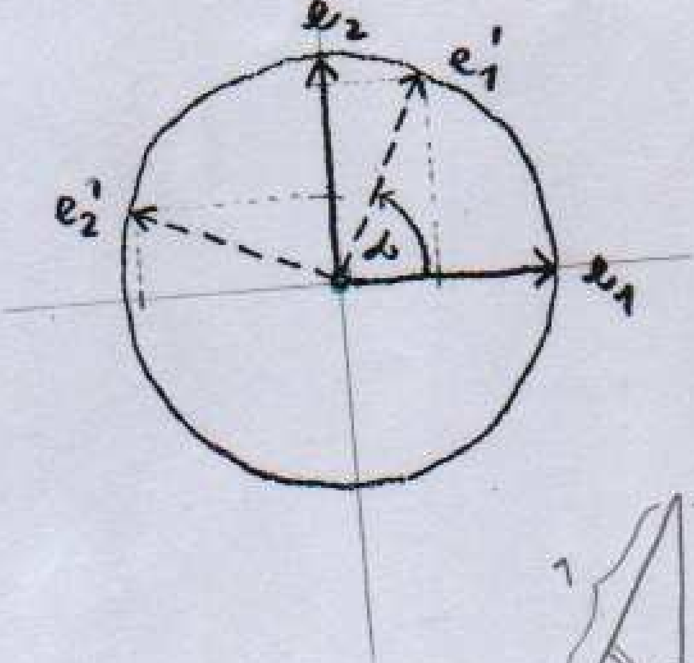
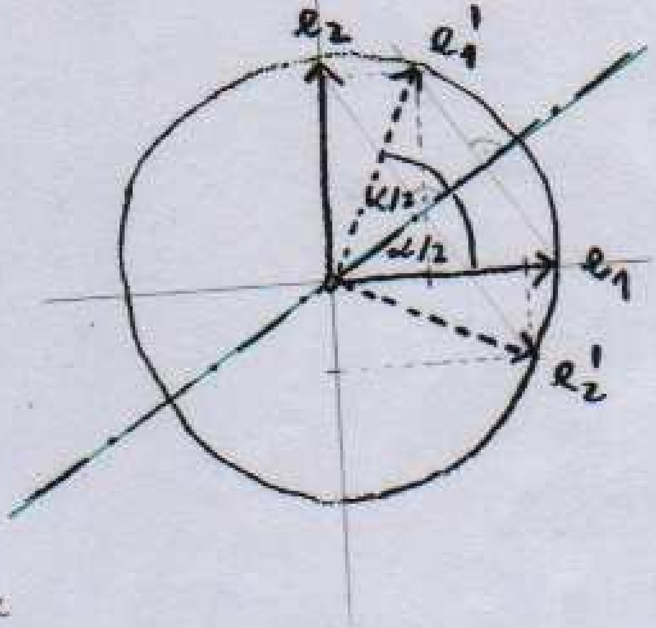
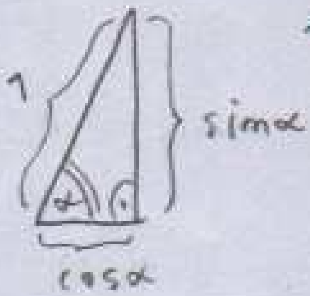
SHODNOSTI V ROVINĚ

přímá



nepřímá





$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

 SHODNOSTI V ROVINĚ ...

Samodružné směry / Samodružné body	Žádný	Právě dva na sebe kolmé	Každý
Žádný		N $X' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}$ Posunutá souměrnost	P $X' = X + \begin{pmatrix}c\\ 0\end{pmatrix}$ $c \neq 0$ Posunutí
Právě jeden	P $X' = \begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}X$ $\alpha \neq k\pi$, k celé Rotace o úhel α se středem v počátku		P $X' = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}X$ Středová souměrnost podle počátku
Vyplní přímku		N $X' = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}X$ Souměrnost podle osy x	
Každý			P $X' = X$ Identita

... KLASIFIKACE PODLE SAMODR. PRVKŮ.

... všechna vyjádření vzhledem ke VHODNÝM souř. soustavám.

... všimněme si prázdných polí!

155

PROČ UŽÍVÁME ROZŠÍŘENÉ MATICE ?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} \quad \text{místo} \quad X' = DX + C$$

- kompaktní zápis
- snazší skládání:

$$G \circ F \; \cdots \; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & D \end{pmatrix}}_{G} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ A & B \end{pmatrix}}_{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C+DA & DB \end{pmatrix}$$

$$\text{místo} \quad (G \circ F)(X) = D(BX+A)+C = DB\,X + DA+C$$

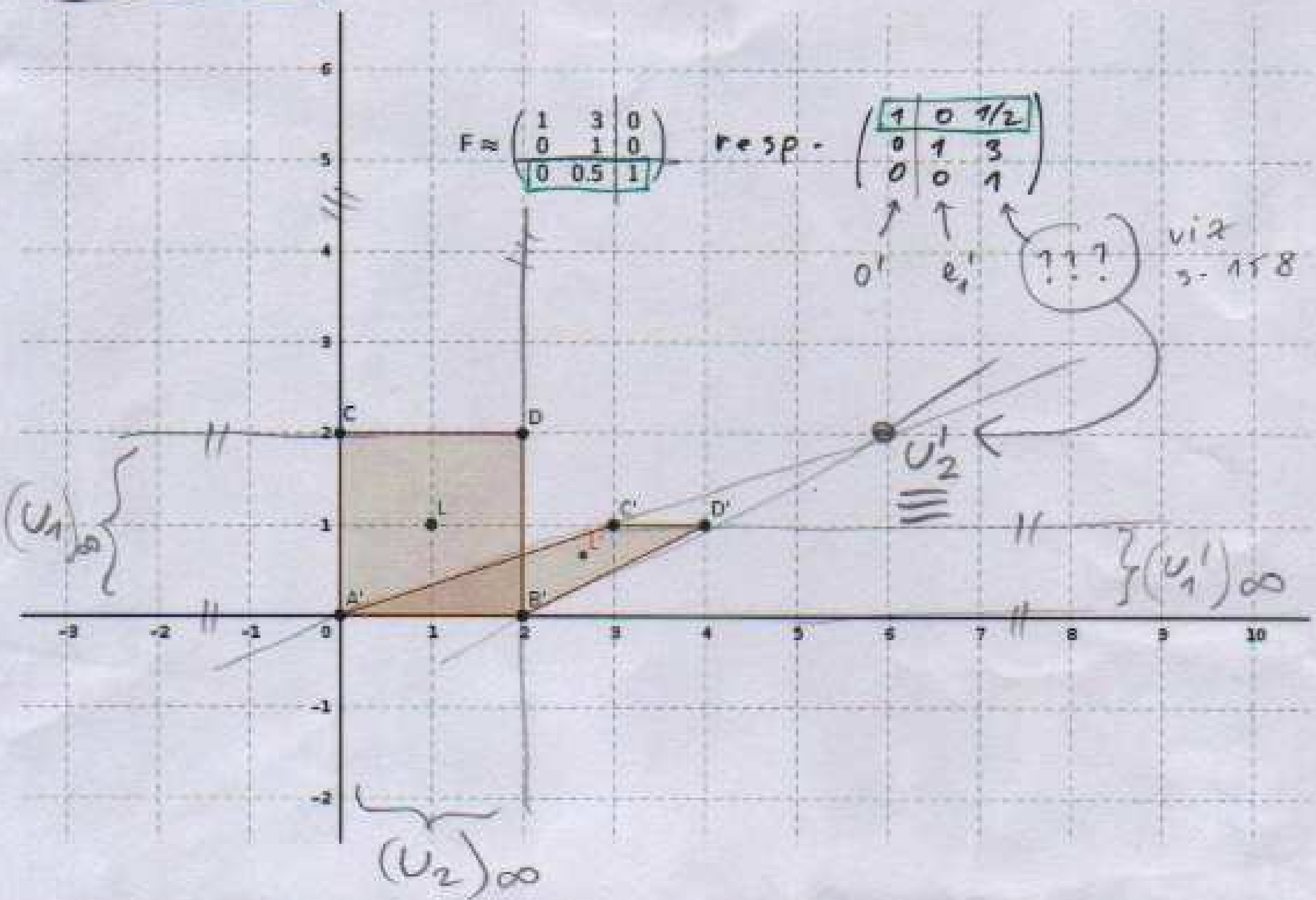
* zahrnuje také PROJEKTIVNÍ ZOBRAZENÍ

... rozšíření odp. proj. rozšíření afinního (eukleid.) prostoru

... násobení maticí odp. akci lineárního zobrazení

→ viz dále →

156 **PŘÍKLAD** — "PROJEKTIVNÍ ELACE"

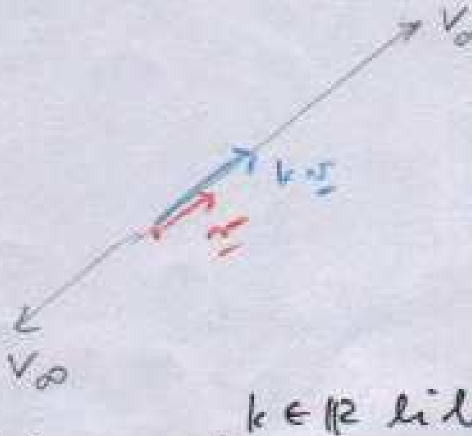


DOSUD jsme s rozšířením pracovali takto:

- (vlastní) bod $X = [x_1, x_2] \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} \boxed{1} \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$
- vektor $\underset{\sim}{v} = (v_1, v_2) \rightsquigarrow$ vektor $\begin{pmatrix} \boxed{0} \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ (nevlastní bod)

POSTŘEH:

- vektory $\underset{\sim}{v} = (v_1, v_2)$ a $k\underset{\sim}{v} = (kv_1, kv_2)$ ukazují na tentýž NEVLASTNÍ BOD . . .



$0 \neq k \in \mathbb{R}$ lib.

po rozšíření:

- vektory $\begin{pmatrix} \boxed{0} \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} \boxed{0} \\ kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}$, $\overset{\neq 0}{k} \in \mathbb{R}$ lib

ukazují na tentýž $\boxed{\text{NEVLASTNÍ BOD}}$

PROČ NEPOUŽÍT STEJNOU KONVENCI PRO VLASTNÍ BODY?

⇝ vektory $\begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} k \\ kx_1 \\ kx_2 \end{pmatrix}$, $\overset{\neq 0}{k} \in \mathbb{R}$ lib

ukazují na tentýž VLASTNÍ BOD

„HOMOGENNÍ SOUŘADNICE"

na řádku se obvykle píše takto:

- $(\underline{0} : v_1 : v_2) = (\underline{0} : kv_1 : kv_2)$
- $(\underline{1} : x_1 : x_2) = (\underline{k} : kx_1 : kx_2)$

$0 \neq k \in \mathbb{R}$ lib

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  homog. souř. počátku O

  homog. souř. obrazu počátku $O' = O$

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  hom. souř. nevlastního bodu osy x_1

  hom. souř. obrazu … tj. úběžník osy x_1

- $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \hline 3 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

  hom. souř. nevl. bodu osy x_2

  hom. souř., tj. úběžník osy x_2

  $\rightsquigarrow$ úběžník v afinních souř. $U_2' = [6, 2]$

---

cvičení:

a) elementárně
b) početně

Ukažte, že zobrazení má

- OSU = přímka $\{x_2 = 0\}$
- STŘED = $(1 : 6 : 0)$

Naopak

- pro $O = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O'$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U_1'$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \hline 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 6 \\ 2 \end{pmatrix} = U_2'$$

- máme přímo (a SNADNO) akorát:

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ \hline 0 & b & 6c \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix} \qquad a, b, c \neq 0$$

- potřebujeme ještě (jako vLONi)
  - buď 2 body na osách...
  - nebo 1 bod v "dostatečně obecné" poloze, např.

vzhledem k předchozím třem...

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 2 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 1 \\ \hline 4 \\ 1 \end{pmatrix} = D'$$

$\vdots$

· dosazení:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 6c \\ 0 & 0 & 2c \end{pmatrix}}_{F} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{D} = \boxed{\begin{pmatrix} a+2c \\ 2b+12c \\ 4c \end{pmatrix} \sim \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{D'}}$$

$$\Updownarrow$$

2 nezávislé rovnice
3 neznámé

$$\boxed{\begin{aligned} a+2c &= 4c \\ 2b+12c &= 4(4c) \\ &\ldots \end{aligned}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} a-2c &= 0 \\ 2b-4c &= 0 \end{aligned}} \iff \boxed{\begin{aligned} a &= k \text{ lib} \\ c &= \tfrac{1}{2}k \\ b &= k \end{aligned}}$$

· $F = k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad k \neq 0$ lib

ZÁVĚR — VĚTY O URČENOSTI ....

PROSTÉ

projektivní zobrazení prostoru dimenze $\boxed{n}$ je určeno obrazy

- buď $\boxed{n+1}$ bodů v obecné poloze
  a $\boxed{n}$ odpovídajícími úběžníky

- nebo $\boxed{n+2}$ bodů v "dostatečně obecné" poloze

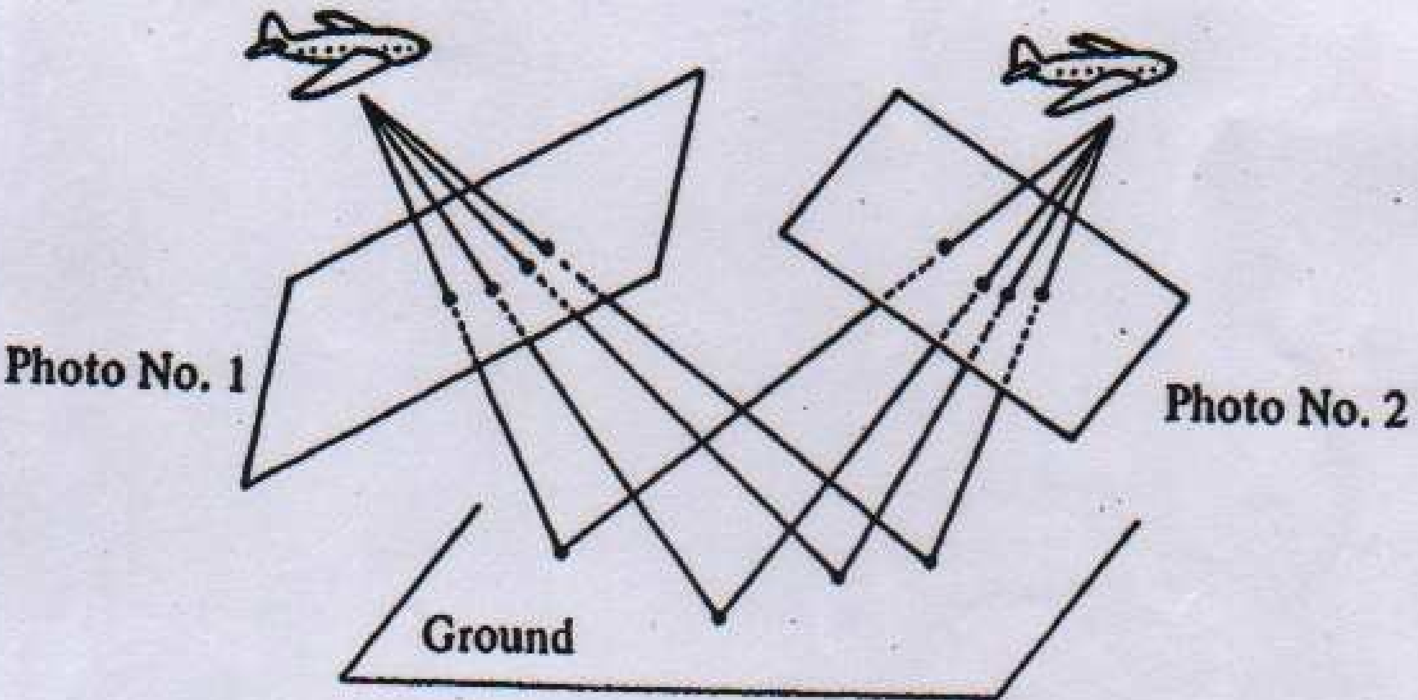
(každých $\boxed{n+1}$ je v obecné poloze)

Speciálně

LIB.

Afinní zobrazení prostoru dimenze $\boxed{n}$ je určeno obrazy $\boxed{n+1}$ bodů v obecné poloze.

APLIKACE (pro $n=2$)

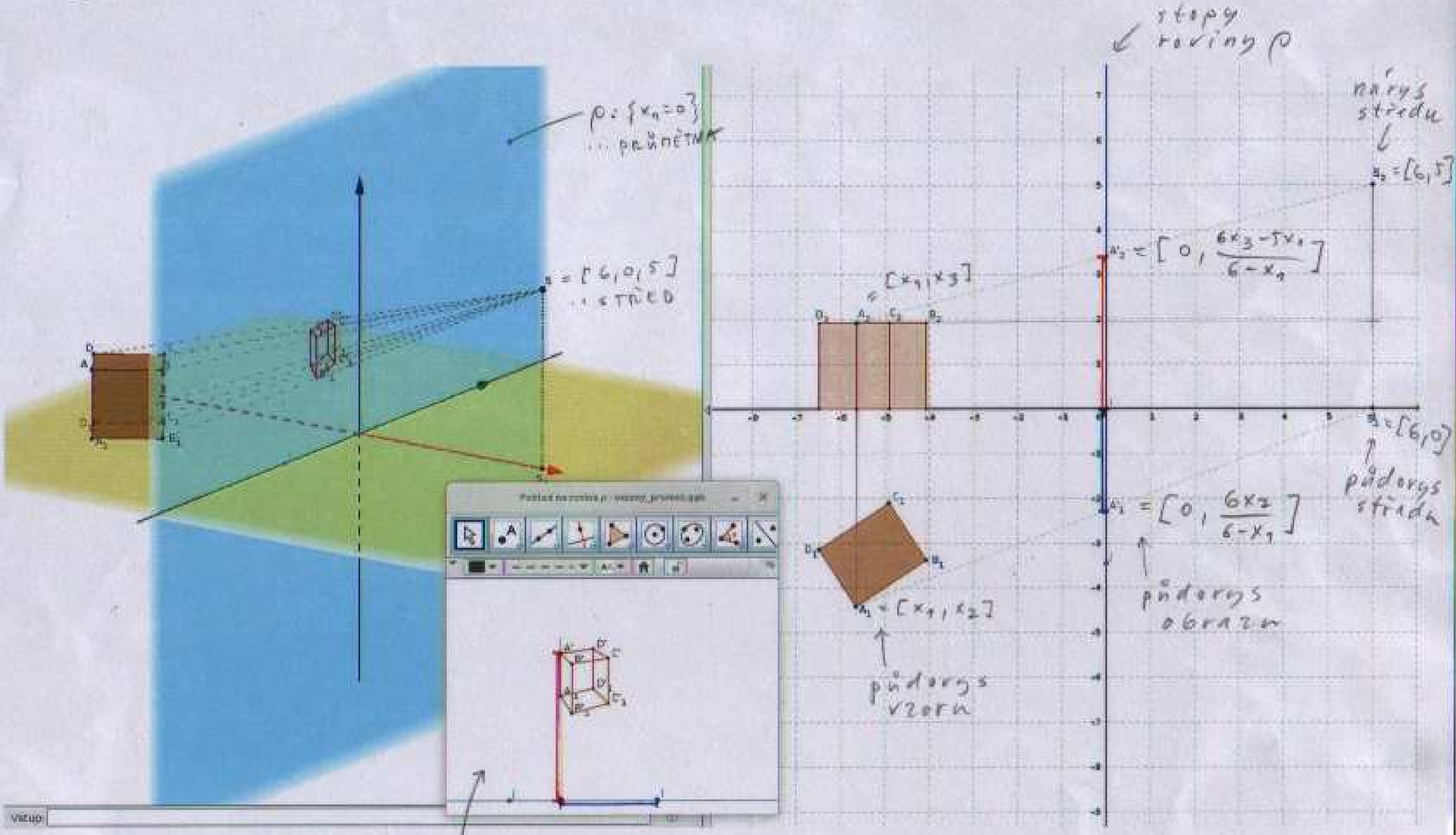


4 referenční body stačí ...

$\boxed{n+2}$

(... k porovnání / skládání fotek ...)

163 **PŘÍKLAD** — STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ



skutečný průmět ...

STŘEDOVÉ PROMÍTÁNÍ

- ze středu $S = [6, 0, 5]$ do roviny $\rho : \{ x_1 = 0 \}$

(podobné $\triangle$)

- v afinních souřadnicích:

$$X = [x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left[0, \frac{6x_2}{6 - x_1}, \frac{6x_3 - 5x_1}{6 - x_1} \right] = X'$$

- v homogenních souřadnicích:

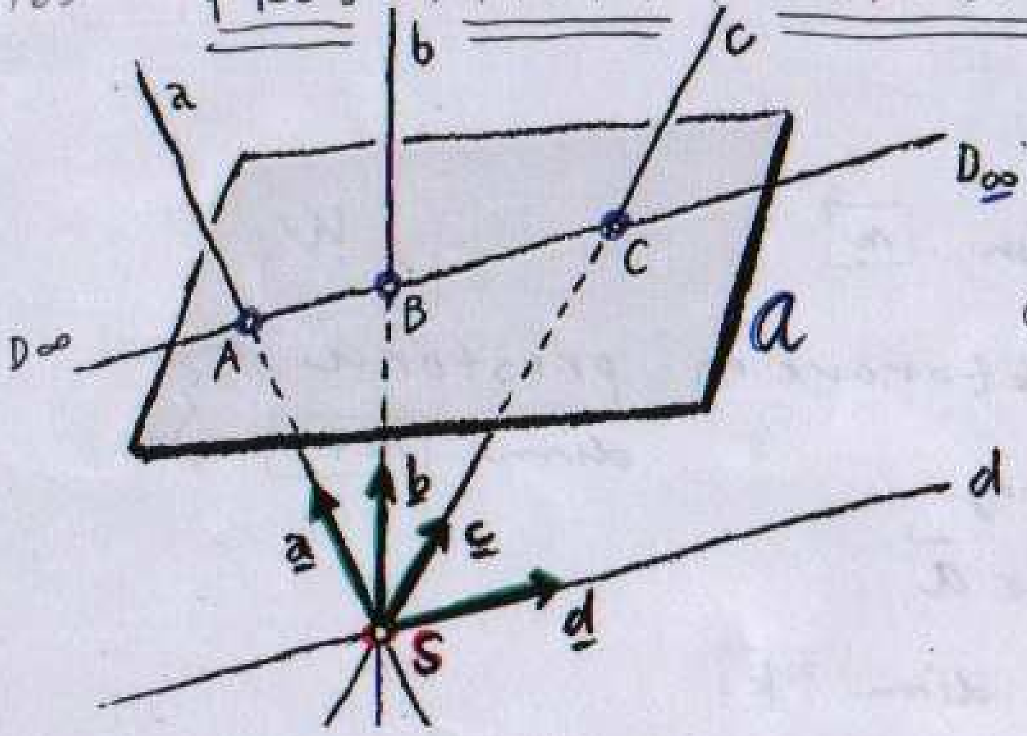
$$X = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \longmapsto (6x_0 - x_1 : 0 : 6x_2 : 6x_3 - 5x_1) = X'$$

tj.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 6 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

všechno v jedné matici
(sr. s předchozím úsilím...)

PROJEKTIVNÍ ROZŠÍŘENÍ POŘÁDNĚ



ZÁKLADNÍ PROJEKTIVNÍ TRIK

dívejme se na náš afinní prostor (a) zvenku (S)!

- nadprostor "a+S" ozn. n
- zaměření $\vec{a} \subset \vec{n}$ ozn. $V \subset W$
- rozšířený prostor ozn. $\tilde{a}$

- $\{$ $\boxed{\text{vlastní}}$ body v $\tilde{a}$ $\}$ $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ přímky proch. S $\boxed{\text{různoběžné}}$ s a $\}$

  $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ směry ve W $\boxed{\text{nepatří}}$ do V $\}$

- $\{$ $\boxed{\text{nevlastní}}$ body v $\tilde{a}$ $\}$ $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ přímky proch. S $\boxed{\text{rovnoběžné}}$ s a $\}$

  $\overset{1:1}{\rightleftarrows}$ $\{$ směry ve W $\boxed{\text{patří}}$ do V $\}$

obecně

$\tilde{a}$

- projektivní prostor dim $\boxed{n}$

W

= { směry ve vektorovém prostoru dim $\boxed{n+1}$ }

1-dim podprostory

$\tilde{b} \subseteq \tilde{a}$

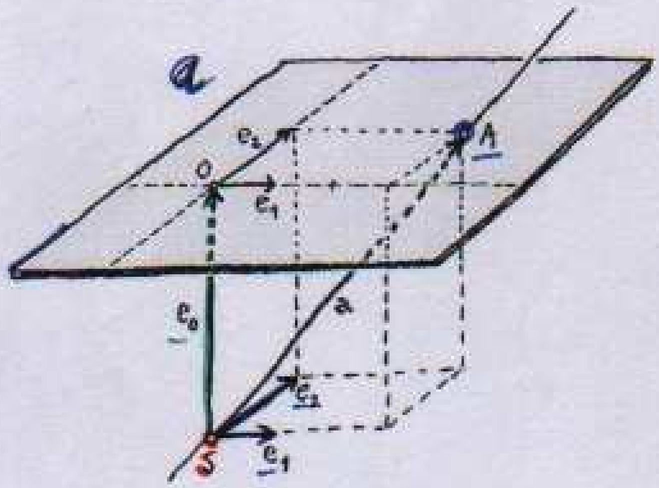
- projektivní podprostor dim $\boxed{k}$

= vektorový podprostor dim $\boxed{k+1}$

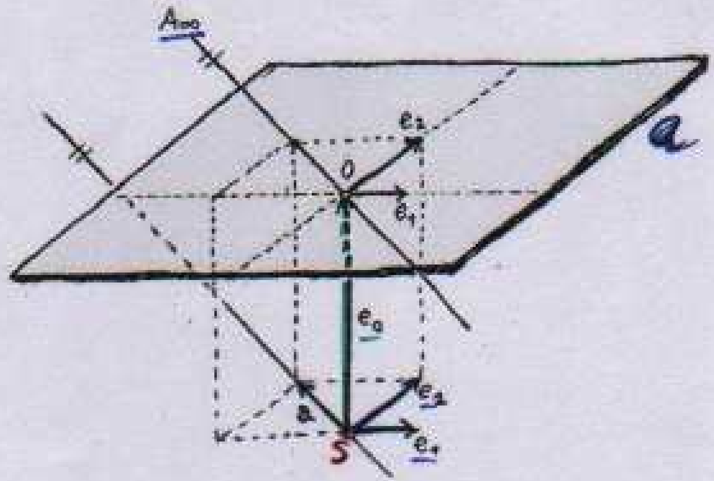
$U \subseteq W$

HOMOGENNÍ SOUŘADNICE POŘÁDNĚ

A vlastní



A nevlastní



- afinní souřadnice:

$A \doteq [3, 1]$ $\qquad$ $\underline{a} \doteq (-2, 1)$

- homogenní souř.:

$A \doteq (\underline{1} : 3 : 1)$ $\qquad$ $A \doteq (\underline{0} : -2 : 1)$

vzhledem k rozšířené souř. soustavě,
tj. $A = \underbrace{S + 1 \cdot \underline{e_0}}_{O} + 3 \cdot \underline{e_1} + 1 \cdot \underline{e_2}$

vzhledem k afinní souřadné soustavě,
tj. $A = O + 3 \cdot \underline{e_1} + 1 \cdot \underline{e_2}$

168

POZOROVÁNÍ

- $\tilde{a}, \tilde{a}'$ ... projektivní prostory (dim ≥ 2)
- W, W' ... odp. vektorové prostory (dim ≥ 3)
- $F : W \to W'$ ... LINEÁRNÍ (120.)

  $\rightsquigarrow$ obraz vekt. podpr. $U \subseteq W$ je vekt. podpr. (stejné dim)

  $\rightsquigarrow$ indukc. zobrazení $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$, a to takové, že

  $\to$ f zobr. proj. přímky na proj. přímky

  $\rightsquigarrow$ (a navíc bijektivní)

$$\begin{tikzcd} \langle \mathbf{a} \rangle \in W \arrow[r, "F"] \arrow[d] & W' \ni \langle \mathbf{a}' \rangle \arrow[d] \\ A \in \tilde{a} \arrow[r, dashed, "f"'] & \tilde{a}' \ni A' \end{tikzcd}$$

- FUNGUJE TO I OPAČNĚ?

ZÁKLADNÍ VĚTA PROJEKTIVNÍ GEOMETRIE

- ANO, FUNGUJE TO I OPAČNĚ!
- TJ.

  $f: \tilde{a} \xrightarrow{1:1} \tilde{a}'$ mezi prostory dim ≥ 2, které zobrazuje přímky na přímky

  $\Downarrow$

  f je určeno nějakým LINEÁRNÍM izomorfismem $F: W \xrightarrow{1:1} W'$.

- Důkaz ... pro nás příliš těžký (viz von Staudt 19. stol.)
- Důsledek

  $f: \tilde{a} \to \tilde{a}'$ jako výše ...

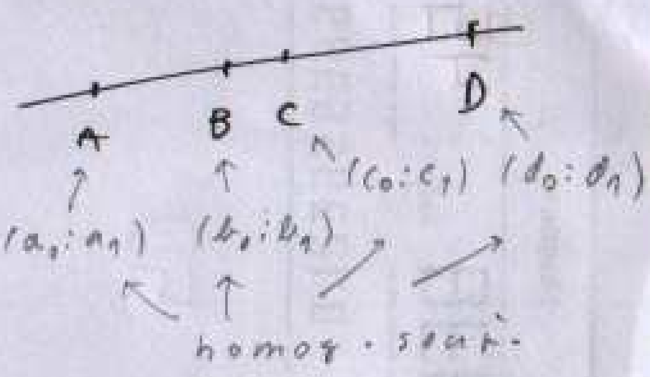
  ... přímky na přímky

  $\Downarrow$

  f zachovává DVOJPOMĚRY, a tudíž je PROJEKTIVNÍ!

- Důkaz důsledku (snadný):

... stačí alg. popis DVOJPOMĚRU

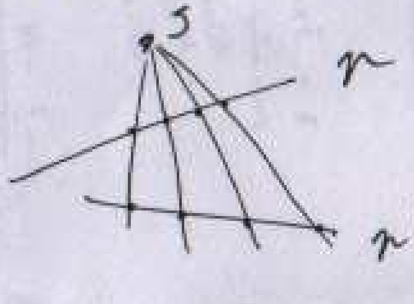


$$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 & d_0 \\ b_1 & d_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_0 & c_0 \\ b_1 & c_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & d_0 \\ a_1 & d_1 \end{vmatrix}}$$

... plus Cauchyova věta o součinu det:

$$(A'B'C'D') = \frac{|(F)\cdot(\vdots\vdots)| \cdot |(F)\cdot(\vdots\vdots)|}{|(F)\cdot(\vdots\vdots)| \cdot |(F)\cdot(\vdots\vdots)|} = \frac{\cancel{|F|}\cdot|\vdots\vdots|\cdot\cancel{|F|}\cdot|\vdots\vdots|}{\cancel{|F|}\cdot|\vdots\vdots|\cdot\cancel{|F|}\cdot|\vdots\vdots|} = (ABCD)$$

- CVIČENÍ ... sr. s tvrzením a důkazem Pappovy věty (minulý semestr)



POZNÁMKY

• dim = 1 ... (PROSTÉ) PROJEKTIVNÍ ZOBR. mezi PŘÍMKAMI
určeno obrazem $\boxed{3}$ bodů ...
(lib. další určen hodnotou DVOJPOMĚRU)

... lze taky popsat LINEÁRNÍM ZOBR.
mezi 2-dim vektorovými prostory ... !

• OBECNÉ (neprosté) LINEÁRNÍ ZOBR. $F: W \to W'$
... třeba vyloučit jádro F ... !

$\{\underline{x} \in W : F(\underline{x}) = \underline{o}\}$

obecné (neprosté) PROJEKTIVNÍ ZOBR. není
definováno na celém proj. prostoru ... !

na rozdíl od AFINNÍCH !

viz např. středové promítání

POZNÁMKY

$\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \neq 0 \\ x' \end{pmatrix}$

- $f : \tilde{a} \to \tilde{a}'$ afinní $\Leftrightarrow$ zobr. vlastní body na vlastní

  $\Leftrightarrow$ ... ne- ...... ne- ...

  $\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix}$

- $F : W \to W'$

  $\begin{pmatrix} x_0' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix}$

  ... odp. LINEÁRNÍ

  $\Leftrightarrow$ $a \neq 0$ a $B = 0$

- samodr. body f $\rightleftarrows$ char. vektory F

  $f(x) = X$ $\quad$ $F(\underline{x}) = \lambda \cdot \underline{x}$

- pro afinní .... $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ C & D - \lambda E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

výzva ... dokažte elementárně ...

$\lambda = 1$ je vždy kořen ...

tj. $\boxed{\text{každá afinní transformace má nějaký samodr. bod (vlastní či nevlastní)}}$

POZNÁMKY

- ještě samodr. body pro afinní:

... vlastní: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ C & D-\lambda E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

nutně $\lambda = 1$ a předchozí je ekviv.

$1 \cdot C + (D-E) \cdot X = 0$, tj. $\boxed{(D-E)X = -C}$

... nevlastní: $\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ C & D-\lambda E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

λ = bez omezení a předchozí je ekviv.

$0 \cdot C + (D-\lambda E) \cdot X = 0$, tj. $\boxed{(D-\lambda E)X = 0}$

známe z předchozího! ✓

GEOM. ZOBRAZENÍ — SHRNUTÍ

vzhledem k rozšířené kartézské sour. soust.

JMÉNO	VLASTNOSTI	ALG. VYMEZENÍ	ANAL. VYJÁDŘENÍ	PŘÍKLADY
PROJEKTIVNÍ $f: \tilde{a} \to \tilde{a}'$	← kolin. ← dvojpoměr	určeno LINEÁRNÍM zobr. $F: W \to W'$	$\underline{x}' = \begin{pmatrix} a & B \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$	osová kolineace středová prom.
AFINNÍ $f: a \to a'$	— " —, navíc $\parallel \to \parallel$ ← rovnoběž. ← děl. poměr	— " —, navíc $\vec{a} \subset W \xrightarrow{F} \vec{a}' \subset W'$ $F\vert_{\vec{a}} =: \vec{f}$	$\underline{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ C & D \end{pmatrix} \cdot \underline{x}$ $X' = D \cdot X + C$	osová afinita rovnoběžné prom.
EKVI-AFINNÍ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	— " —, navíc obsahy/objemy	— " —, navíc $\vec{f}$ zach. vnější součin...	$\det(D^T \cdot D) = 1$ resp. $\det D = \pm 1$	šikmá soum. elace
PODOBNÉ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	poměry vzdál. odchylky, ...	— " —, navíc $\vec{f}$ zach. skalární součin až na násobek ... k	$D^T \cdot D = k^2 \cdot E$	stejnolehlost
SHODNÉ $f: \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$	vzdálenosti, odchylky, obsahy, ...	— " —, navíc $k = 1$	$D^T \cdot D = E$	osová soum. posunutí otáčení