17 $\boxed{\text{OBECNĚ}}$ – SOUŘADNICE (AFINNÍ)

- prvky vekt. prostoru V = lin. kombinace bázových vektorů V

$$\underline{v} = c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + \dots$$

báze V (*)

souřadnice vektoru $\underline{v}$ vzhledem k bázi (*)

píšeme $\underline{v} = (c_1, c_2, \dots)$

V $\qquad$ $\mathbb{R}^n$

- prvky afinního prostoru $\mathcal{A}$ = jeden prvek $\mathcal{A}$ + + lin. komb. bázových vekt. V

$$A = \underline{P} + c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 + \dots$$

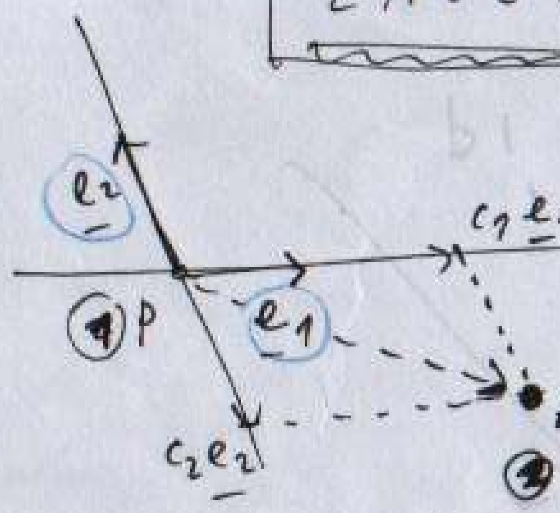
báze V (*)

píšeme $A = [c_1, c_2, \dots]$

$\mathcal{A}$ $\qquad$ $\mathbb{R}^n$

souřadnice bodu A vzhledem s souřadné soustavě s počátkem $\underline{P}$ a bází (*)

ZÁVĚR



$A = P + c_1 \underline{e}_1 + c_2 \underline{e}_2 \dots$

(3) $A = [c_1, c_2, \dots]$

všechny vektorové / afinní prostory stejné dimenze jsou IZOMORFNÍ

(1) volba souř. soustavy (*):

potom přiřazení $\mathcal{A} \to \mathbb{R}^n$

$A \mapsto$ souřadnice A vzhledem k (*)

(2) (3)

je vzájemně jednoznačné & af. struktura v $\mathcal{A}$ odpovídá af. str. $\mathbb{R}^n$

Jiná souř. soustava $\Longrightarrow$ jiné souřadnice ....

(viz matice přechodu + posunutí počátku)

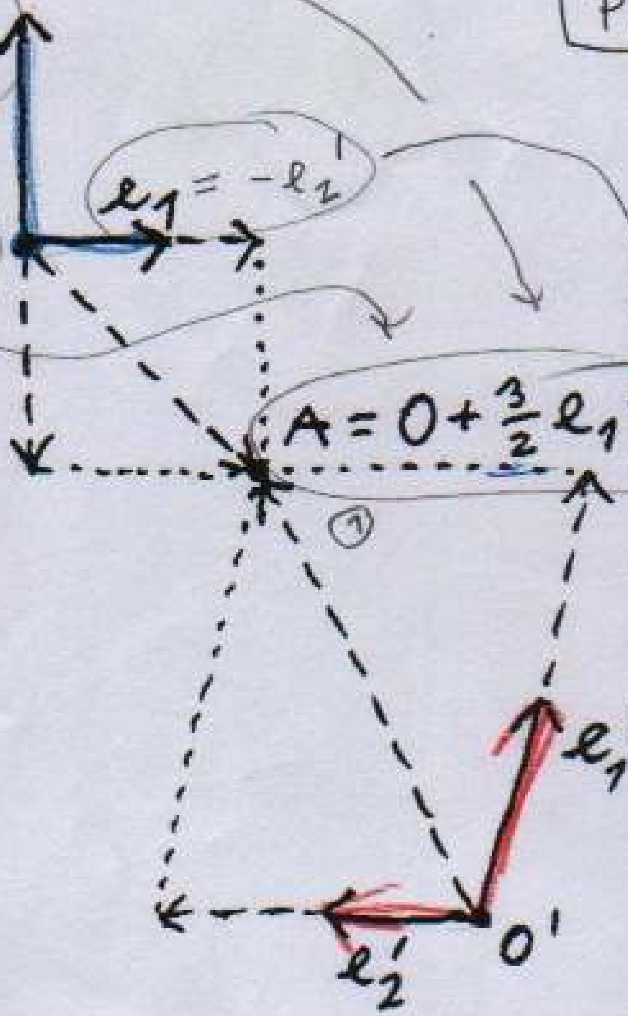
PŘÍKLAD – PŘECHOD

$e_1' + \frac{1}{3} e_2' = e_2$

$e_1 = -e_2'$

2

$O' + 3e_1' + 4e_2' = O$

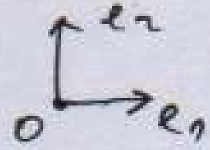


$A = O + \frac{3}{2} e_1 - e_2 = \boxed{O' + 2 e_1' + \frac{13}{6} e_2'}$

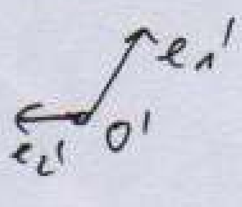
1

3

$A = [\frac{3}{2}, -1]$ vzhledem k souř. soust.



$A = [2, \frac{13}{6}]$ vzhledem k souř. soust.



20.

$$A \overset{③}{=} \left(0' + 3e_1' + 4e_2' \right) + \frac{3}{2}\boxed{-e_2'} - \left(e_1' + \frac{1}{3}e_2' \right)$$

$$= 0' + 2e_1' + (\ \ )e_2'$$

$$4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} = \frac{13}{6}$$

Formálně (maticově)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{13}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

matice přechodu od báze (e_1, e_2) k bázi (e_1', e_2')

posunutí počátku $\to$ tj. vektor $\overrightarrow{O'O}$ (vzhledem k bázi (e_1', e_2'))

Předp. $\mathcal{A}$ ... afinní prostor se zaměřením V, dim $= n$

Def: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ podmnožina, která je sama afinním prostorem se nazývá

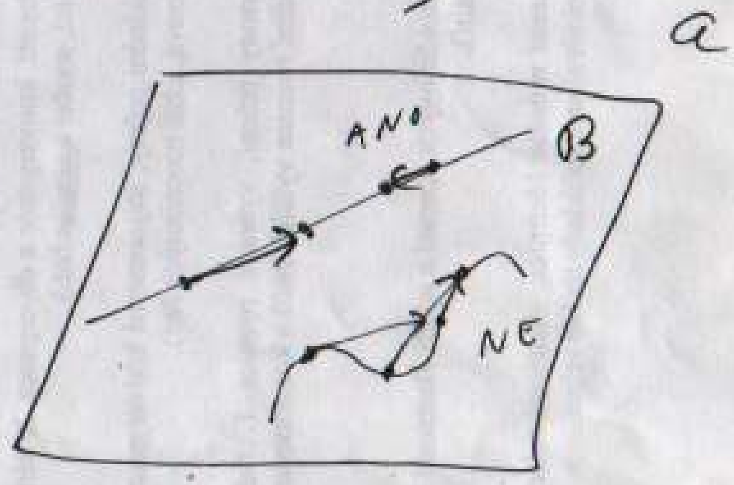
$\boxed{\text{afinní podprostor}}$

(vzhledem ke "zděděné" struktuře)

Nutně: $U :=$ { všechny vekt. $\vec{AB}$ pro lib. $A, B \in \mathcal{B}$ }

je vekt. podprostor ve V

... $U = \vec{\mathcal{B}}$ zaměření $\mathcal{B}$



Spec: podpr. dim ... 0 ... bod

... 1 ... přímka

... 2 ... rovina

⋮

$n-1$ ... **NADROVINA** (= max. možný různý od $\mathcal{A}$)

$\boxed{\text{POSTŘEHY}}$

(a … af. pr. | V … zaměření)

Ekvivalentní vymezení téhož:

• podm. $\mathcal{B} \subseteq a$ <u>af. podpr.</u>

$\Updownarrow$ (def)

$\mathcal{B}$ je af. <u>prostor</u>

$\Updownarrow$

• $U := \{ \vec{BC} \in V \mid \text{kde } B, C \in \mathcal{B} \} \subseteq V$ je <u>vekt. podpr.</u>

$\Updownarrow$

• "$\mathcal{B} = B + U$", pro $B \in \mathcal{B}$, $U \subseteq V$ <u>vekt. podpr.</u>

$\Updownarrow$

• pro lib. $B, C \in \mathcal{B} \Rightarrow$ <u>přímka</u> $BC \subseteq \mathcal{B}$

23

příklady

- z minule $\mathcal{A} = \{$ řešení soustavy lin. rovnic $2x_1 + x_2 = 3$, $3x_1 - x_3 = 4$ $\}$

  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$

  1-dim afinní podprostor v stand. af. prostoru $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3)\}$

- z minule $\mathcal{A} = \{$ řešení lin. dif. rovnice $y'' - 4y' + 5y = 10$ $\}$

  2-dim afinní podprostor v "prostoru všech funkcí" (∞ - dim)

- z analýzy dále např. $\mathcal{B} = \{$ konstantní řeš. $y'' - 4y' + 5y = 10\}$

  $\mathcal{B} = \{y = 2\} \leftarrow$ 0-dim af. podpr v $\mathcal{A}$

24

dim k   dim n

$\boxed{\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \quad \text{af. podprostor}}$

(CVIČENÍ)

souř. vyjádření

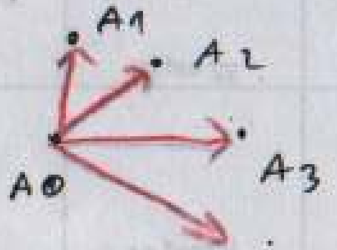
určeno několika body

parametrické vyjádření

rovnicové vyjádření

k+1 bodů

v OBECNÉ POLOZE



$t_i \cdot \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots \overrightarrow{A_0A_k}$

LIN. NEZÁVISLÉ

$\mathcal{B} = \{ B + t_1 \underline{u}_1 + t_2 \underline{u}_2 \dots \mid t_1, t_2 \dots \in \mathbb{R} \}$

k – LIN. NEZÁV. vektorů

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{matrix} a x_1 + b x_2 + \dots = c \\ \vdots \end{matrix} \right\}$

n−k … LIN. NEZÁV. rovnic

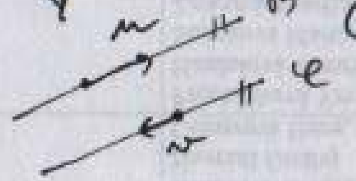
25

$\boxed{\text{POSTŘEHY (další)}}$ pro dva af. podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$

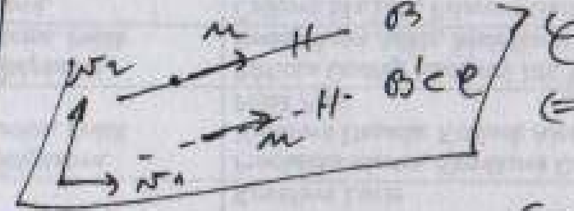
(zaměření $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}} \subseteq \vec{\mathcal{A}} = V$)

INCIDENCE

- $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C} \;\; \overset{\cancel{\Leftarrow}}{\Longrightarrow} \;\; \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}$



$\Longleftrightarrow$ u = násobek v $\Longleftrightarrow$ $\left(\vec{\mathcal{B}} = \{t u\}\right) \subseteq \left(\vec{\mathcal{C}} = \{s \cdot v\}\right)$



$\Longleftrightarrow$ u = lin. komb. v_1 a v_2

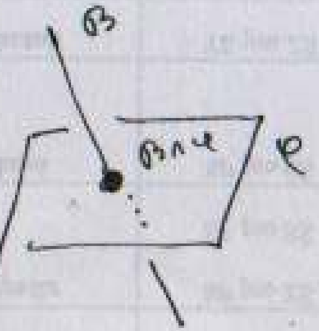
$\Longleftrightarrow$ $\vec{\mathcal{B}} = \{t u\} \subseteq \vec{\mathcal{C}} = \{s_1 v_1 + s_2 v_2\}$

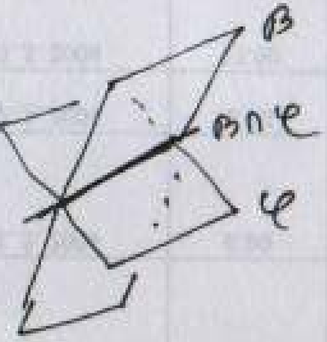
apod.

PRŮNIK

- $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \;\; \longrightarrow \;\; \vec{\mathcal{B} \cap \mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$

průnik vekt. podpr. je vekt. podpr.





průnik af. podpr. (pokud je neprázdný) je af. podpr.

(ROVNOBĚŽNOST) viz dále

26

SJEDNOCENÍ

• $\overrightarrow{\mathcal{B} \cup \mathcal{E}}$? $\vec{\mathcal{B}} \cup \vec{\mathcal{E}}$

nemusí být af. podpr.

nemusí být vekt. podpr.

(nemá smysl uvažovat)

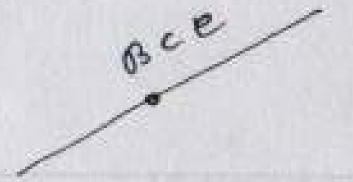
SOUČET

• $\overrightarrow{\mathcal{B} + \mathcal{E}}$? $\vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{E}}$

Např. $=$ pro případ a)

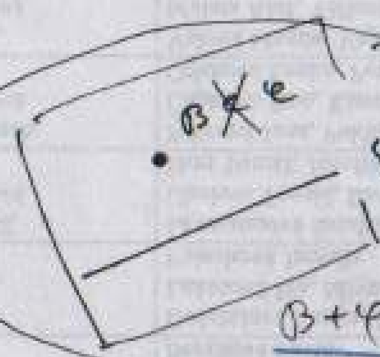
$\supset$ pro případ b)

jak to je obecně ??

a) $B \in \mathcal{E}$  $\mathcal{E} = \mathcal{B} + \mathcal{E}$

$\Rightarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{E} = \mathcal{E}$

af. podpr.

b) 

$B \notin \mathcal{E}$

$\mathcal{E}$

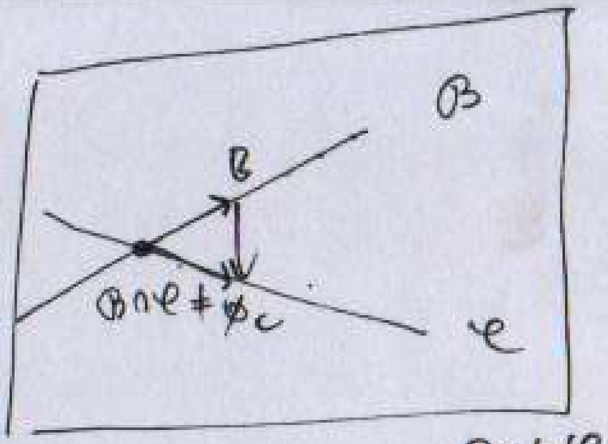
$\Rightarrow \mathcal{B} \cup \mathcal{E}$ není af. podpr.

$\mathcal{B} + \mathcal{E}$ = rovina obs. $\mathcal{B}, \mathcal{E}$

Def. nejmenší af. podprostor obsahující $\mathcal{B} \cup \mathcal{E}$ se nazývá součet $\mathcal{B} + \mathcal{E}$

(afinní obal ...)

Např.



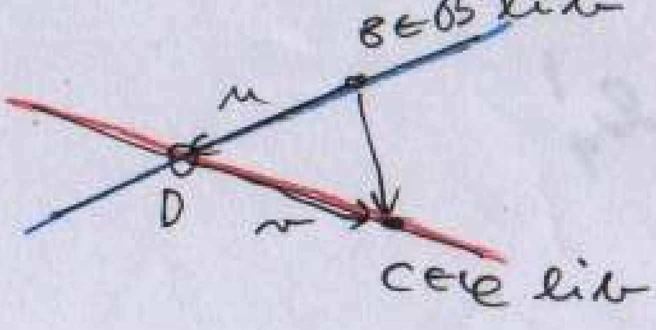
obecně platí

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}}+\vec{\mathcal{C}} \quad\Updownarrow\quad \mathcal{B}\cap\mathcal{C}\neq\emptyset}$$

Důkaz: "$\Downarrow$"

$$\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \{\overrightarrow{BC}, \text{ kde } B\in\mathcal{B}, C\in\mathcal{C}\}$$
$$\vec{\mathcal{B}}+\vec{\mathcal{C}} = \{u+v, \text{ kde } u\in\vec{\mathcal{B}}, v\in\vec{\mathcal{C}}\}$$

předp. $\overrightarrow{BC}$ pro lib $B\in\mathcal{B}, C\in\mathcal{C}$ je rovno
$\overrightarrow{BC} = u+v$ pro nějaké $u\in\vec{\mathcal{B}}, v\in\vec{\mathcal{C}}$:

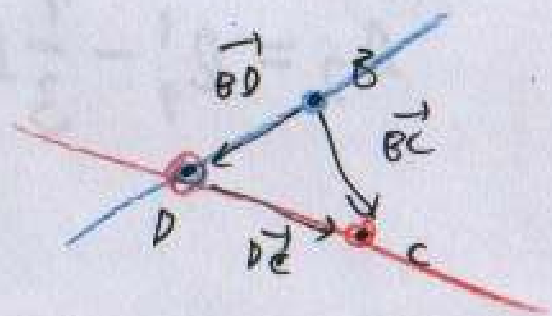


tj. $C - B = u + v$

ekviv. $\underbrace{\underset{\in\mathcal{C}}{C - v} = \underset{\in\mathcal{B}}{B + u}}_{\text{společný bod } D\in\mathcal{B}\cap\mathcal{C}}$

"⇐" předp. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \ni D$ lib.:

pro lib. $B \in \mathcal{B}$ a $C \in \mathcal{C}$



$$\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} \ni \overrightarrow{BC} = \underbrace{\overrightarrow{BD}}_{\in \vec{\mathcal{B}}} + \underbrace{\overrightarrow{DC}}_{\in \vec{\mathcal{C}}}, \text{ tedy } \overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} \quad \boxed{\lightning}$$

Důsledky: • obecně $\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} \neq \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$

$$\supset$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{B}+\mathcal{C}} = \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}} + \{t \cdot \overrightarrow{BC}\}}$$

$B \in \mathcal{B}$ $\quad C \in \mathcal{C}$

geom. vztah mezi $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

• Podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ se protínají ($\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$) $\iff$ $\overrightarrow{BC} \in \vec{\mathcal{B}} + \vec{\mathcal{C}}$ pro lib. $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$

algeb. vztah mezi vektory.

viz též výpočty na cvičení