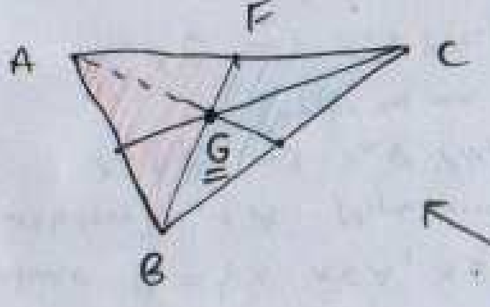
67 $\boxed{\text{POZNÁMKA}}$

BODY A, B, C JSOU V OBECNÉ POLOZE



těžiště $\triangle ABC$ = "$\frac{1}{3}B + \frac{2}{3}F$"

"$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$"

$F = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C$

těžiště hmotné soustavy

$= \frac{1}{2}B + \frac{2}{3}F$

$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$

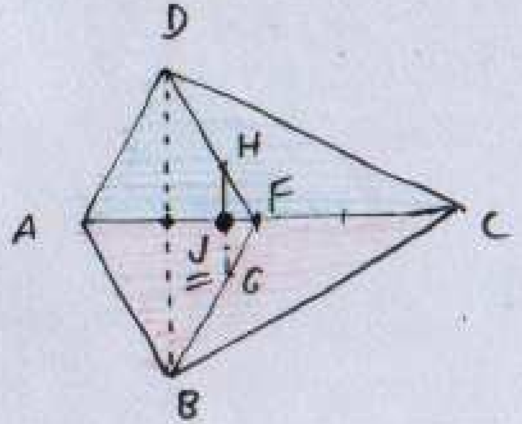
TOTÉŽ!

68 POZNÁMKA

BODY A, B, C, D NEJSOU V OBECNÉ POLOZE!

(*) předp. např. deltoid

$$\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{3}{4}A + \frac{1}{4}C$$

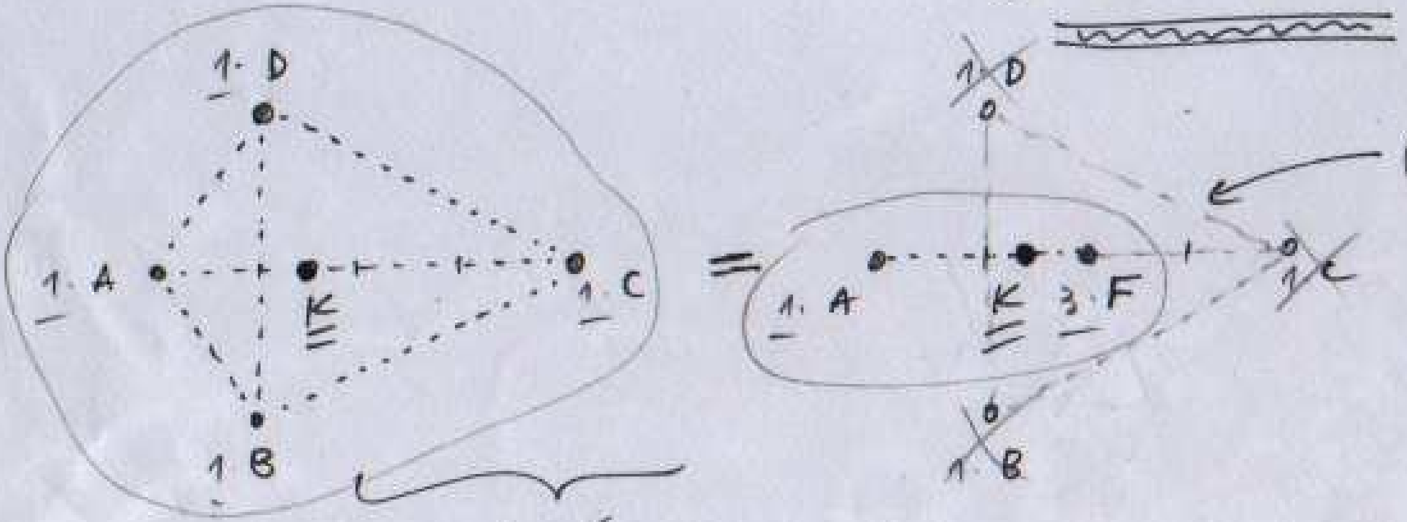


$\Rightarrow$ těžiště ABCD $= \frac{1}{2}$ těžiště ABC $+ \frac{1}{2}$ těžiště ACD

$$J = \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}H$$

$$= \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}C\right) + \left(\frac{1}{6}A + \frac{1}{6}C + \frac{1}{6}D\right) = \dots$$

$$\dots \overset{(*)}{=} \frac{7}{12}A + \frac{5}{12}C$$



$$\left(F = \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C + \frac{1}{3}D \overset{(*)}{=} \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}C\right)$$

NENÍ TOTÉŽ

těžiště hmotné soustavy $= \frac{1}{4}A + \frac{3}{4}F = \frac{1}{4}A + \frac{1}{4}B + \frac{1}{4}C + \frac{1}{4}D = \dots$

$$\dots \overset{(*)}{=} \frac{5}{8}A + \frac{3}{8}C$$

AFINNÍ GEOMETRIE — SHRNUTÍ

- (těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor V ⇝)
- Afinní prostor $\mathcal{A}$ a podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$
- jeden podpr. . . . analytická vyjádření
- dva podpr. . . . vzájemné polohy
- více podpr. . . . příčky
- omezené podpr. . . . polo-prostory, konvexní obaly, . . .

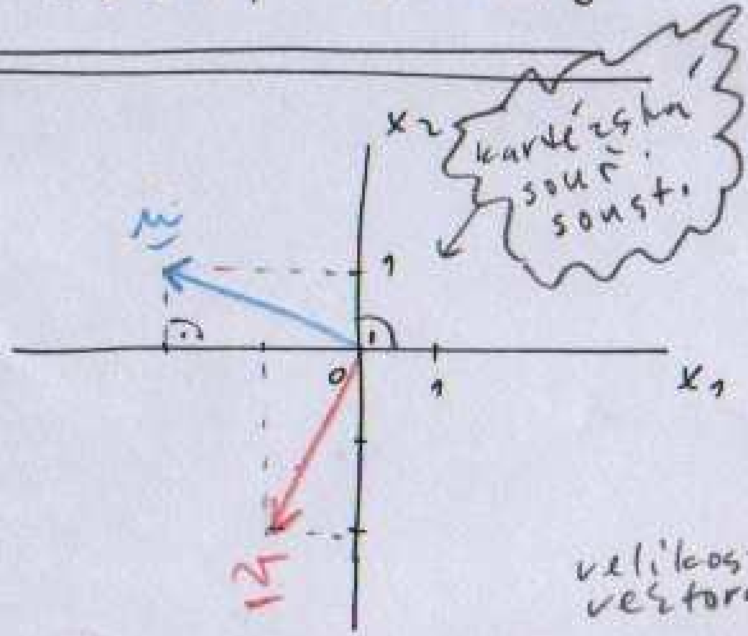
. . . dosud pouze INCIDENCE, ROVNOBĚŽNOST, USPOŘÁDÁNÍ, SPOJITOST

---

za chvíli navíc $\boxed{\textbf{SHODNOST}}$ . . .

70 ZE ŠKOLY ZNÁME

VELIKOST A KOLMOST VEKTORŮ



$\underline{u} = (-2, 1)$ $\quad$ $\underline{v} = (-1, -2)$

$$\|\underline{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

pythagorova věta

velikost vektoru

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = (-2)\cdot(-1) + 1\cdot(-2) = 0$$

skalární součin

kolmost (viz podobné trojúh...)

→ s. 71

obecněji

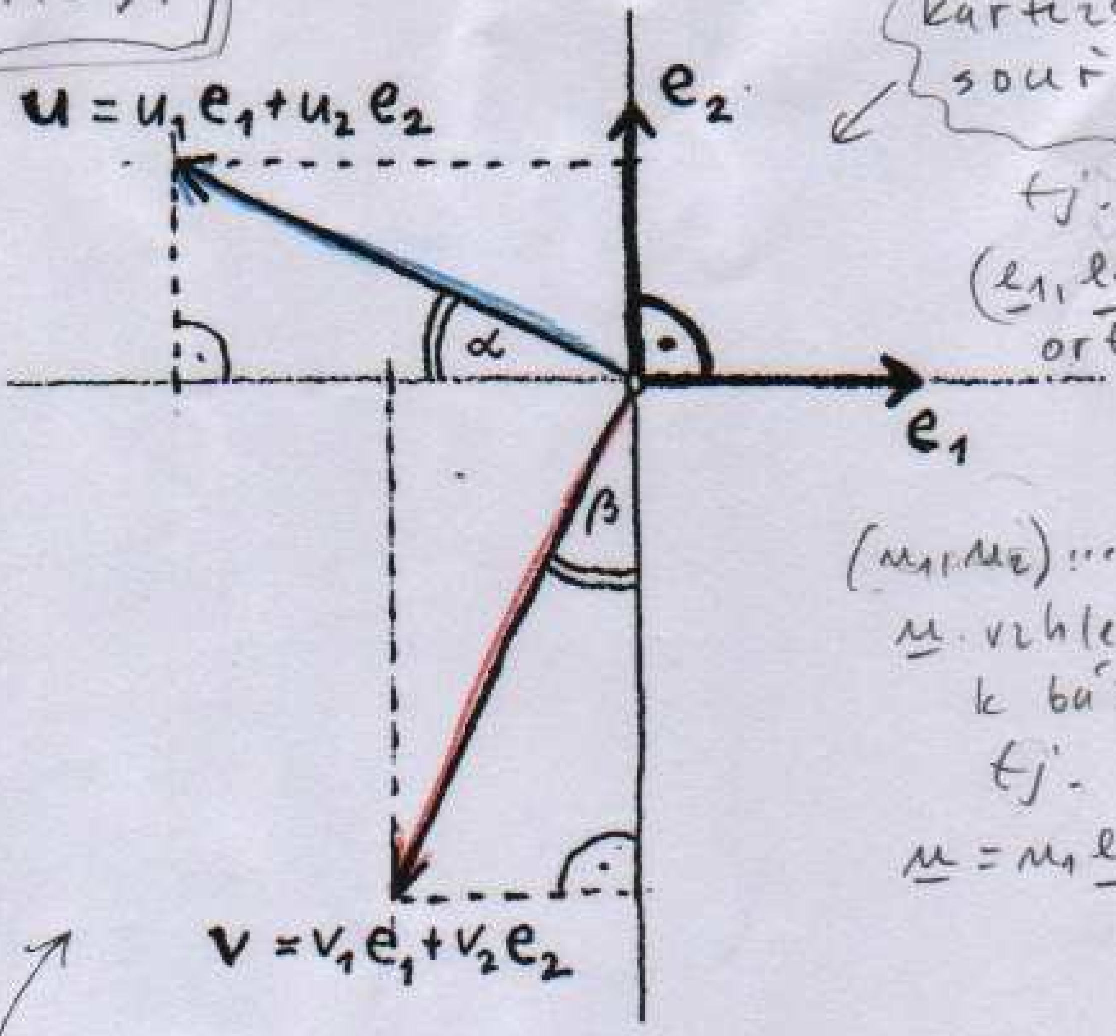
$\underline{u} = (u_1, u_2, \dots)$ $\quad$ $\underline{v} = (v_1, v_2, \dots)$

ⓐ $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots$

ⓑ $\|\underline{u}\| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$

$$= \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots}$$

71 **KOLMOST**



kartézská souř. soust.

tj. $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ je ortonormální báze

(u_1, u_2) ... souř. $\underline{u}$ vzhledem k bázi $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

tj. $\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2$

$$\boxed{\left.\begin{array}{l}\underline{u} = (u_1, u_2) \\ \underline{v} = (v_1, v_2)\end{array}\right\} \text{kolmé}} \iff \alpha = \beta \iff$$

$$\iff \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{u_2}{u_1}, \qquad \operatorname{tg}\beta = \frac{v_1}{v_2}$$

$$\iff -\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_1}{v_2} \iff -u_2 v_2 = u_1 v_1$$

$$\iff u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0 \iff \boxed{\underline{u} \cdot \underline{v} = 0}$$

Z ALGEBRY DOPLŇUJEME (ke s. 70)

(a) … je souřadnicové vyjádření vzhledem ke $\boxed{\text{kartézské souř. soust. (resp. ON bázi)}}$

(b) … funguje pro lib. vektor $\underline{u}$, pouze když $\boxed{\underline{u} \cdot \underline{u} \geq 0}$

OBECNÉ (PODSTATNÉ) VLASTNOSTI SKALÁRNÍHO SOUČINU:

$V \times V \to \mathbb{R}$

* $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$ ← SYMETRICKÉ
* $(\underline{u} + \underline{v}) \cdot \underline{w} = \underline{u} \cdot \underline{w} + \underline{v} \cdot \underline{w}$ } ← BI-LINEÁRNÍ ← lineární v obou složkách
* $(a \cdot \underline{u}) \cdot \underline{v} = a(\underline{u} \cdot \underline{v})$
* $\underline{u} \neq \underline{o} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} > 0$ ← POSITIVNĚ DEFINITNÍ

… $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in V \quad a \in \mathbb{R}$ lib.

Z TĚCHTO VLASTNOSTÍ

CVIČENÍ

$\Downarrow$

lib. SKALÁRNÍ SOUČIN
vyjádřený vzhledem
k lib. ORTONORMÁLNÍ BÁZI
vypadá jako ⓐ

$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + \dots$

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{pokud } i \neq j \\ 1 & \text{pokud } i = j \end{cases}$$

ZÁKLADNÍ NEROVNOSTI

- $\underline{u}\cdot\underline{u} \boxed{\geq} 0$, přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{\underline{u}=\underline{o}}$

$$\Downarrow$$

- Cauchyho-Schwarzova nerovnost:

lin. závislé

$|\underline{u}\cdot\underline{v}| \boxed{\leq} \|\underline{u}\|\cdot\|\underline{v}\|$, přičemž $\boxed{=}$, právě když $\boxed{\underline{u}\ \underline{v}}$

$$\Downarrow$$

- Trojúhelníková nerovnost:

$\|\underline{u}+\underline{v}\| \boxed{\leq} \|\underline{u}\|+\|\underline{v}\|$, přičemž $\boxed{=}$, ~~právě~~ pouze když $\boxed{\underline{u},\underline{v}}$ lin. závislé

... DOSUD ALGEBRA

NYNÍ GEOMETRIE ...... JAK POJEM SHODNOSTI ?

(A) <u>shodnost úseček</u> pomocí vzdáleností bodů

$|AB| = |CD|$

← reálná čísla!

pomocí velikosti vektorů

$|AB| := \sqrt{u \cdot u}$, $\vec{u} = \vec{AB}$

SKALÁRNÍ SOUČIN

<u>POZN:</u>

takto def. vzdálenosti

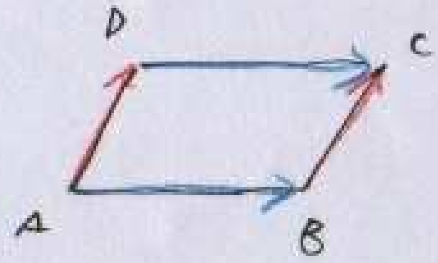
určuje METRIKU ...

... dvěma bodům $\mapsto$ číslo:

- $|AB| \geq 0$, přičemž $|AB| = 0 \iff A = B$
- $|AB| = |BA|$
- $|AC| \leq |AB| + |BC|$

7b Naše METRIKA je navíc EUKLEIDOVSKÁ,
tzn. kompatibilní s afinní strukturou,
tedy $\underbrace{\text{s}}_{\text{hlavně}}$ ROVNOBĚŽNOSTÍ ...

. . . .

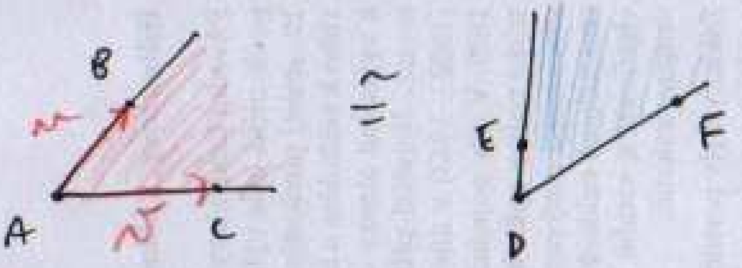


$\parallel$ + $\vec{AD} = \vec{BC} \Rightarrow |AD| = |BC|$

POZN: USPOŘÁDÁNÍ (bodů na přímce) pomocí metriky:

B mezi A a C $\Leftrightarrow$ $|AB| + |BC| \overset{!}{=} |AC|$

(B) shodnost úhlů pomocí odchylky vektorů



$\sphericalangle(\vec{AB},\vec{AC}) = \sphericalangle(\vec{DE},\vec{DF})$

↖ reálná čísla

odchylka vektorů $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v})$ ... ozn. $\alpha \in [0,180°]$

$$\boxed{\cos\alpha := \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|}}$$

- podle Cauchy ≤ :

$$-1 \le \frac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \le 1$$

- $\sphericalangle(\underline{u},\underline{v}) = \sphericalangle(a\underline{u}, b\underline{v})$

lib. $a, b \in \mathbb{R}$

✓

- $180° \le \alpha \le 0$

✓

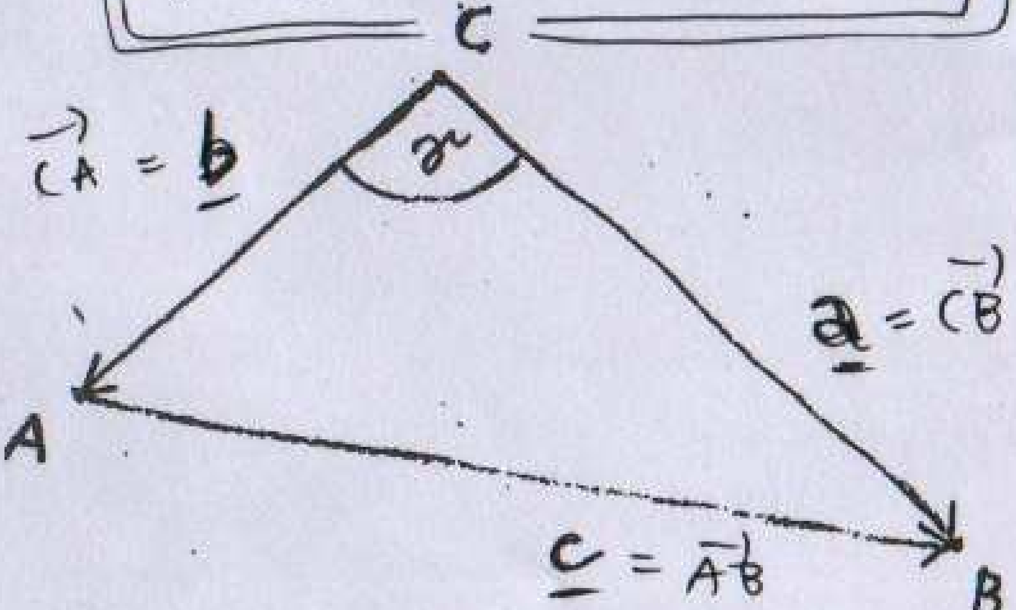
Jak se na to přišlo ???

- $\alpha = 90° \iff u \cdot v = 0$

$(u \perp v)$

✓

KOSINOVÁ VĚTA



- bez vektorů:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

- s vektory:

bilinearita

$$c^2 = \underline{c}\cdot\underline{c} = (\underline{a}-\underline{b})\cdot(\underline{a}-\underline{b}) = \underline{a}\cdot\underline{a} - \underline{a}\cdot\underline{b} - \underline{b}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{b}$$

$$= \underline{a}\cdot\underline{a} + \underline{b}\cdot\underline{b} - 2\,\underline{a}\cdot\underline{b}$$

symetričnost

$$= a^2 + b^2 - 2\,\underline{a}\cdot\underline{b}$$

$\|\underline{a}\| =: a$

$\|\underline{b}\| =: b$

$\|\underline{c}\| =: c$

$\underline{c} = \underline{a} - \underline{b}$

$$ab\cos\gamma = \underline{a}\cdot\underline{b}$$

$$\boxed{\cos\gamma = \frac{\underline{a}\cdot\underline{b}}{\|\underline{a}\|\cdot\|\underline{b}\|}}$$

tedy definující rovnost na s. 77 je jen algebraicky přepsaná kosinová věta . . .