$\boxed{\text{MINULE}}$ ... na vše stačí

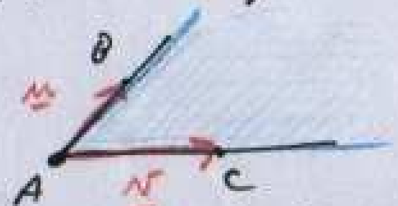
SKALÁRNÍ SOUČIN : $V \times V \to \mathbb{R}$

(A) VELIKOST ÚSEČKY $|AB|$ = velikost vektoru $u = \overrightarrow{AB}$
(VZDÁLENOST BODŮ)

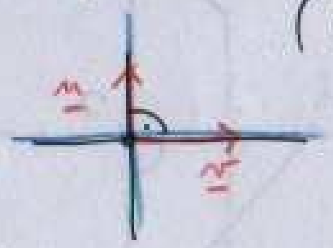
$= \sqrt{u \cdot u} \leftarrow$ $\boxed{\text{Pythagorova věta}}$

(B) VELIKOST ÚHLU $\measuredangle ABC$ = odchylka vektorů $u = \overrightarrow{AB}$, $v = \overrightarrow{AC}$
(odchylka ...)

$= \arccos \dfrac{u \cdot v}{\|u\| \cdot \|v\|} \leftarrow$ $\boxed{\text{kosinová věta}}$



spec. PRAVÝ ÚHEL (KOLMOST) $\iff$ $u \cdot v = 0$



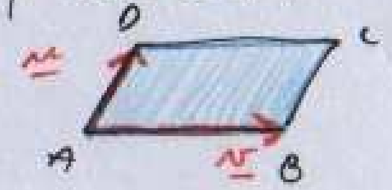
EUKLEIDOVSKÝ PROSTOR $\mathcal{E}$ = afinní prostor se skalárním součinem (na zaměření $V = \overrightarrow{\mathcal{E}}$)

DNES

... další (známé) interakce

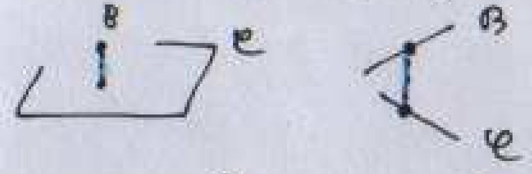
GEOMETRIE ⟷ ALGEBRA

(c) OBSAHY / OBJEMY . . . . DETERMINANT (vnější součin) vektorový součin



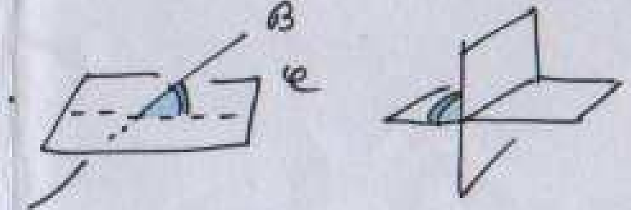
... zobecnění všech předchozích pojmů

(A) VZDÁLENOST PODPROSTORŮ



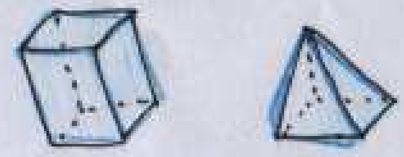
. . . . viz s. 84 →

(B) ODCHYLKA A KOLMOST PODPR.



. . . . viz s. 116 →

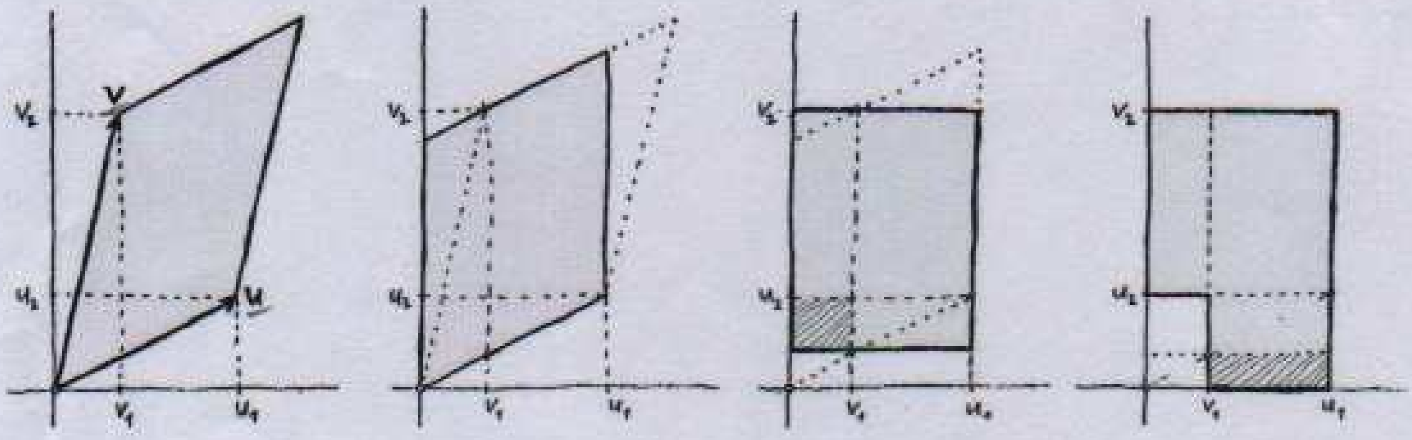
(C) OBJEM ROVNOBĚŽNOSTĚNU (SIMPLEXU ...) apod.



. . . . viz s. 100 →

OBSAHY a DETERMINANTY

(a) přímo (naivně) (dim V = 2)



$\underline{u} = (u_1, u_2)$

$\underline{v} = (v_1, v_2)$

obsah $= \cdots\cdots = $ obsah

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

DETERMINANT $\longrightarrow \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$

(b) koncepčně:

- obsah : $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+$
- det : $V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

lineární ve všech složkách

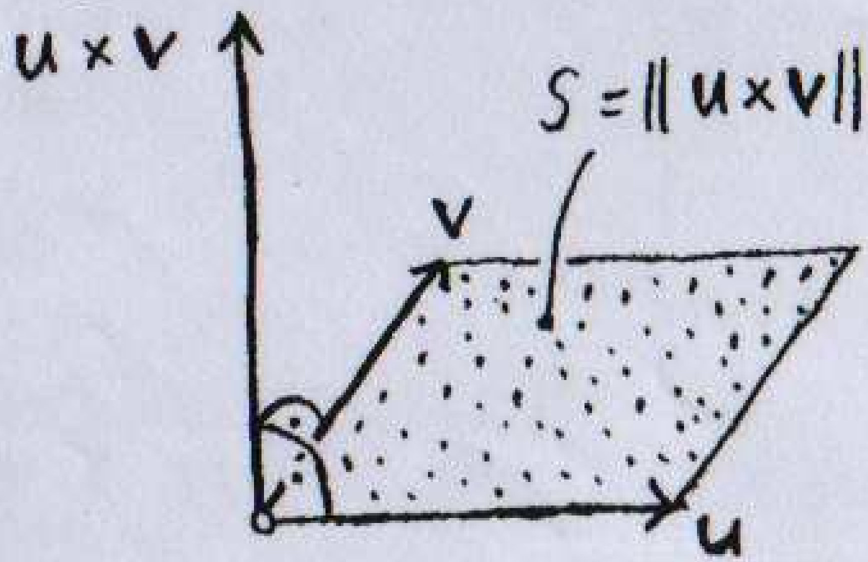
mají (SKORO) STEJNÉ VLASTNOSTI!!!

viz znaménka

více viz s. 105 →

83 # VEKTOROVÝ SOUČIN

dim $V = \underline{3}$



$V \times V \to V$

geom. vlastnosti:

- $u \times v \perp u$
  $\perp v$
- $\|u \times v\|$ = obsah 
- $(u, v, u \times v)$ tvoří kladnou bázi V

pro u, v nezávislé (jinak $u \times v = 0$)

alg. vlastnosti:

- lineární ve všech složkách
- antisymetrické

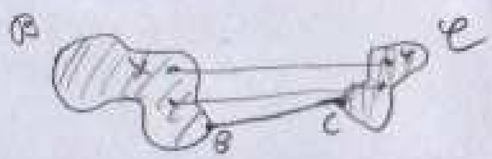
více viz s. 111 →

VZDÁLENOSTI ... DEFINICE

- rozumíme ... vzdál. dvou bodů

- obecně pro lib. podmnožiny $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$

vzdálenost $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \inf \{ |XY|, \text{ kde } X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C} \}$



... inf = min

... min neex., inf vždy ano

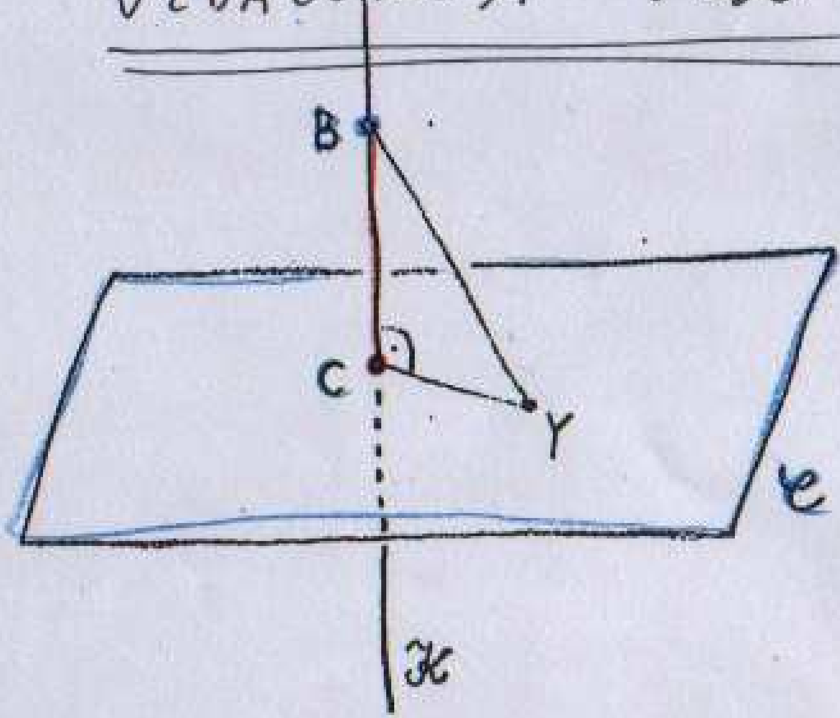
- pro lib. podprostory $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$

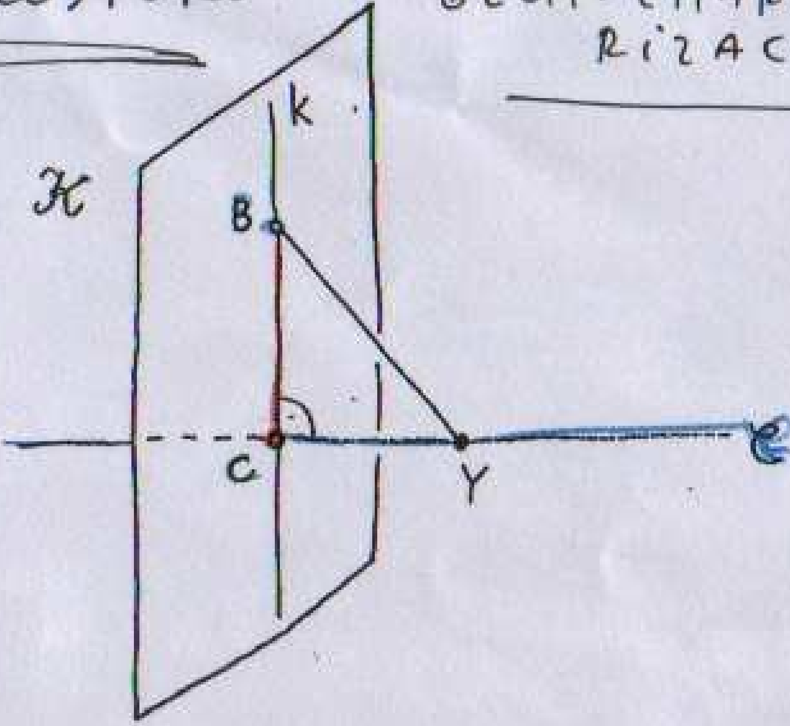
... inf = min.

- zřejmě $v(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = 0 \iff \mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$.

POZN ... podle definice najít vzdál. = najít glob. minimum funkce (více prom.)

VZDÁLENOST BODU A PODPROSTORU ... GEOM. CHARAKTERIZACE





Platí $C \in \mathcal{E}$

$$\boxed{|BC| = \min \iff \vec{BC} \perp \mathcal{E}}$$

Glob. min. funkce více prom.

soustava lin. rovnic

Důkaz plyne z Pythagorovy věty ....

$|BC|^2 + |CY|^2 = |BY|^2$

$|BC|^2 \leq |BY|^2$

$\blacksquare$

... BOD B a PODPROSTOR $\mathcal{E}$

možné výpočty:

(A) předchozí char. $\rightsquigarrow$ C = "pata kolmice" $\rightsquigarrow$ $|BC|$

(B) "kolmice $\mathcal{K}$" $\rightsquigarrow$ pata $C = \mathcal{K} \cap \mathcal{E}$ $\rightsquigarrow$ $|BC|$

$\boxed{\text{ODBOČKA}}$:

kolmý doplněk $\vec{\mathcal{E}}$ v $\vec{\mathcal{E}}$

$$\mathcal{K} = \{ X = B + \vec{\mathcal{E}}^{\perp} \}$$

$$\underset{\text{ozn}}{U} \subseteq V$$

$\twoheadrightarrow$ $U \subseteq V$ $\rightsquigarrow$ kolmý doplněk $U^{\perp} := \{$všechny vektory v V, které jsou $\perp$ ke všem vektorům v $U\}$

U … vekt. podpr.

kolmý doplněk … také vekt. podpr. ("normálový")

$$= \{ \underline{x} \in V \mid \underline{x} \cdot \underline{u} = 0 \text{ pro všechna } \underline{u} \in U \}$$

rovnicový popis $U^{\perp}$

$$\ldots \quad U^\perp = \left\{ \underline{x} \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} \underline{x} \cdot \underline{u}_1 = 0 \\ x \cdot \underline{u}_2 = 0 \\ \vdots \end{array} \right\}$$

$\underbrace{\underline{u}_1, \underline{u}_2 \ldots}_{\underline{\underline{k}}}$ nezávislé generátory U

$\dim V = \underline{\underline{n}}$

soustava $\underline{k}$ rovnic
$\underline{n}$ neznámých

$$\dim U^\perp = n - k$$

předp.:

$$\ldots \quad \underline{u} \in U \cap U^\perp \Rightarrow \underline{u} \perp \underline{u} \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{u} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{u} = o$$

$$U \cap U^\perp = \{o\}$$

ZÁVĚR: U a $U^\perp$ jsou vskutku doplňkové podprostory:

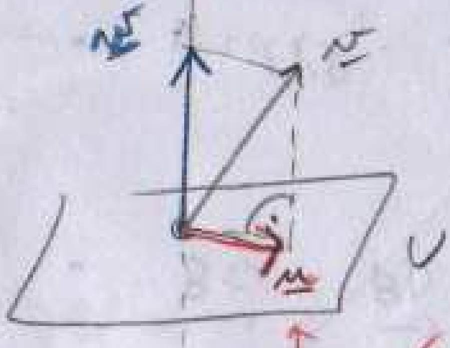
$$\boxed{\boxed{U \cap U^\perp = \{o\}} \quad \text{a} \quad \boxed{U + U^\perp = V}}$$

DŮSLEDKY:

- $\mathcal{B}, \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$ totálně kolmé, tj. $\vec{\mathcal{B}} = U$, $\vec{\mathcal{C}} = U^\perp$ se protínají (tj. $\boxed{\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset}$) v bodě (tj. $\boxed{\dim \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = 0}$)

kolmý průmět $\underline{v}$ do $U^\perp$

$U^\perp$



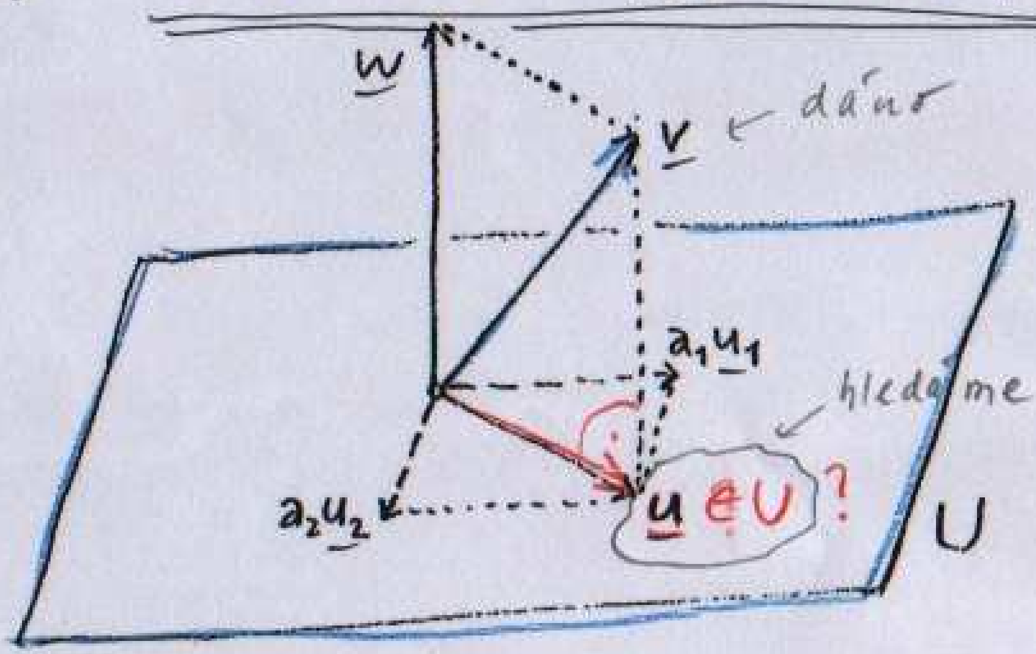
kolmý průmět $\underline{v}$ do U

- lib. $\underline{v} \in V$ lze $\boxed{\text{JEDNOZNAČNĚ}}$ $\boxed{\text{vyjádřit}}$ jako součet

$$\boxed{\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}}$$

$\underline{u} \in U$ $\quad$ $\underline{w} \in U^\perp$

KOLMÝ PRŮMĚT VEKTORU $\underline{v}$ do podprostoru $U \subseteq V$



- U generován vektory $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots$

  tj. $\underline{u} \in U \iff \underline{u} = a_1 \underline{u}_1 + a_2 \underline{u}_2 + \dots$

  pro nějaké $a_1, a_2 \dots \in \mathbb{R}$

- $\underline{u}$ je kolmý průmět $\underline{v}$

$$\iff \underline{w} = \underline{v} - \underline{u} \perp U$$

$$\iff \begin{array}{l} (\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{u}_1 = 0 \\ (\underline{v} - \underline{u}) \cdot \underline{u}_2 = 0 \\ \vdots \end{array}$$

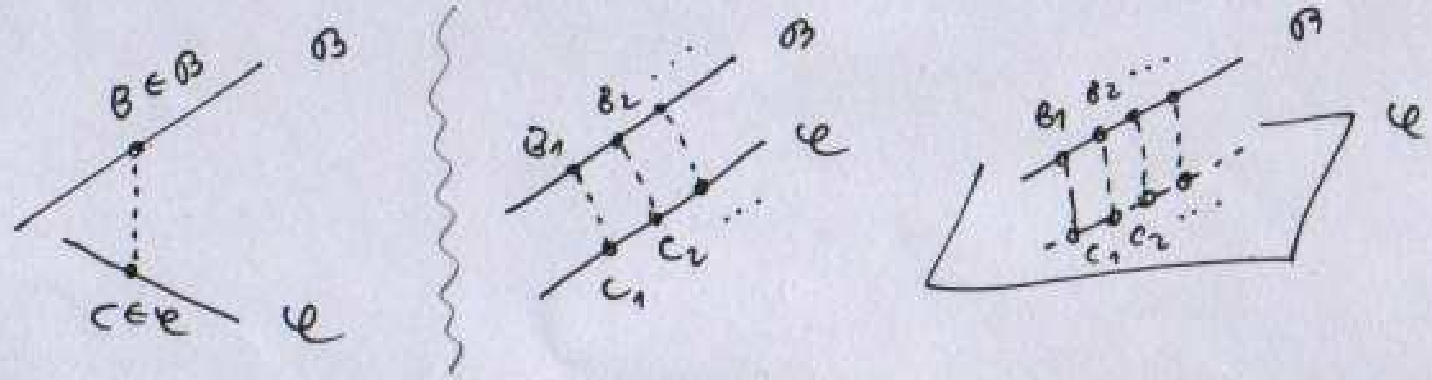
$$\iff \boxed{\begin{array}{l} \underline{u} \cdot \underline{u}_1 = \underline{v} \cdot \underline{u}_1 \\ \underline{u} \cdot \underline{u}_2 = \underline{v} \cdot \underline{u}_2 \\ \vdots \end{array}}$$

(KONEC ODBOČKY)

$\dim U = k$

soustava $\underline{k}$ rovnic $\underline{k}$ neznámých $(a_1, a_2, \dots)$

VZDÁLENOST DVOU PODPROSTORŮ – OBECNÁ GEOM. CHARAKTERIZACE



platí $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$

$$\boxed{|BC| = \min \iff \vec{BC} \perp \mathcal{B} \ \text{a} \ \vec{BC} \perp \mathcal{C}}$$

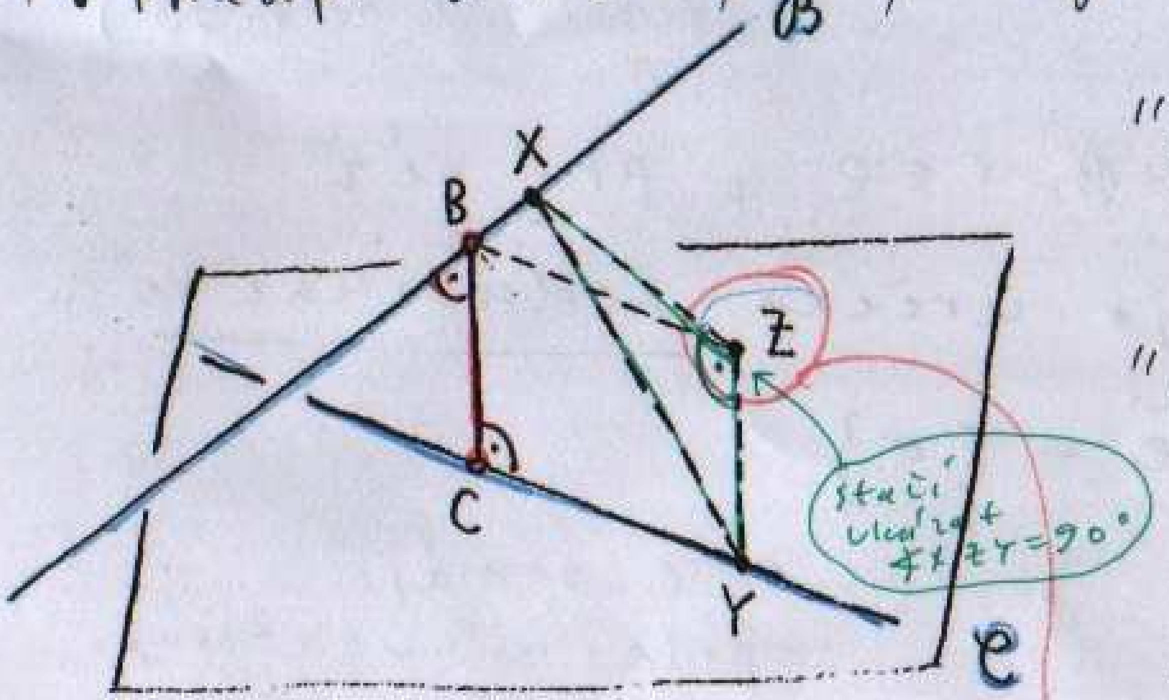
Glob. min funkce...

soustava lin. rovnic

<u>Důkaz</u>: • pokud $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$, tj. vzdál $= 0$

.... tvrzení $\underbrace{\text{platí}}_{\text{zřejmě}}$ ...

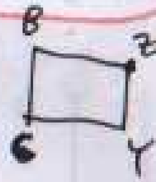
91. • předp. $\mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset$, tj. vzdál. $\neq 0$.



"$\Rightarrow$" plyne z předcho-zího ...

"$\Leftarrow$" předp. $\vec{BC} \perp \mathcal{B}$ a $\vec{BC} \perp \mathcal{C}$

chceme pro lib. $X \in \mathcal{B}, Y \in \mathcal{C}$ ukázat, že $|XY| \geq |BC|$

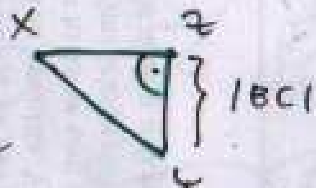
• doplň bod Z tak, aby 

byl rovnoběžník, tj. $\vec{ZY} = \vec{BC}$.

• $\vec{BC} \perp \mathcal{C} \Rightarrow \vec{ZY} \perp \vec{ZB}$ ($\in \vec{\mathcal{C}}$)

• $\vec{BC} \perp \mathcal{B} \Rightarrow \vec{ZY} \perp \vec{BX}$ ($\in \vec{\mathcal{B}}$)

$\Big\}\ \vec{ZY} \perp (\underbrace{\vec{ZB} + \vec{BX}}_{\vec{ZX}})$

• trojúhelník 

je pravoúhlý ... z Pyth. věty $\Rightarrow$ $|XY| \geq |ZY| = |BC|$

$\boxed{\text{Dodatek}}$

- dvojice bodů $B \in \mathcal{B}$, $C \in \mathcal{C}$, pro niž $|BC| = \min$, je určena <u>jednoznačně</u>

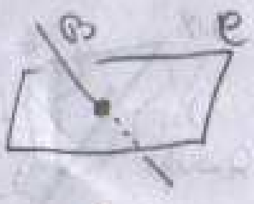
$$\iff \vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$$

podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ nemají společné vektory kromě o

- souvislost se <u>vzájemnou polohou</u> $\mathcal{B}, \mathcal{C}$:

např.:

$v \neq 0$
$d = 1 = \dim \mathcal{B}$



$v = 0$
$d = 0 < \dim \mathcal{B}$

		d max	d není max
	$\mathcal{B} \cap \mathcal{C}$ \ $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}}$	je max	není max
$v = 0$	$\neq \emptyset$	$\subseteq$	X
$v \neq 0$	$= \emptyset$	$\parallel$	X

$v :=$ vzdál. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

$d := \dim \{$všech dvojic bodů B, C, v nichž se vzdál. v realizuje$\}$

$(d \leq \min\{\dim \mathcal{B}, \dim \mathcal{C}\})$

93

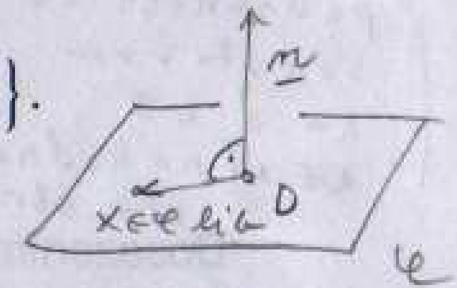
CVIČENÍ

Je dán bod B a (nad-)rovina C v eukleidovském prostoru:

$$B = [-1, 5, 7],$$
$$C = \left\{ \underbrace{[1,2,3]}_{D} + r\underbrace{(1,1,-1)}_{u} + s\underbrace{(2,1,0)}_{v} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} \quad = \{ x_1 - 2x_2 - x_3 = -6 \}.$$

Kolmý doplněk k $\overrightarrow{C}$ je $\underline{x} \cdot \underline{u}$, kde $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$

$$\overrightarrow{C}^{\perp} = \{ \underline{x_1 + x_2 - x_3 = 0}, \; 2x_1 + x_2 = 0 \} \quad = \left\{ t\underbrace{(1,-2,-1)}_{n} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$



Označíme body a vektory tak, že

$$\begin{aligned} C &= \left\{ \underline{D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\} \quad = \left\{ \overrightarrow{DX} \,.\, \mathbf{n} = 0 \right\}, \\ \overrightarrow{C}^{\perp} &= \{ \mathbf{x} \,.\, \mathbf{u} = 0, \; \mathbf{x} \,.\, \mathbf{v} = 0 \} \quad = \left\{ \underline{t\mathbf{n}} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Hodláme určit vzdálenost $v(B, C)$, a to pomocí charakterizace:

$$|BC| = \min \iff \overrightarrow{BC} \perp C. \tag{2}$$

A. pata kolmice, vzdálenost ← « velmi OBECNÝ postup

Pro $C \in \mathcal{C}$ platí (2), právě když

$$\boxed{\overrightarrow{BC} \,.\, \mathbf{u} = 0 \text{ a } \overrightarrow{BC} \,.\, \mathbf{v} = 0,}$$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + r u + s v$

což po rozepsání ($C = D + r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$) vede k soustavě lineárních rovnic

(podobnost se soustavou na s. 89 NENÍ náhodná! viz obr. ⊛) →

$$\boxed{\begin{aligned} r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{u} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{u} &= \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{u},\\ r\mathbf{u}\,.\,\mathbf{v} + s\mathbf{v}\,.\,\mathbf{v} &= \overrightarrow{DB}\,.\,\mathbf{v}.\end{aligned}}$$

← 2 rovnice / 2 neznámé

$\underbrace{\dim \mathcal{C}}_{2} + \underbrace{\dim \mathcal{B}}_{0}$

Dosazením vektorů ze zadání dostáváme

$$\boxed{\begin{aligned} 3r + 3s &= -3,\\ 3r + 5s &= -1.\end{aligned}}$$

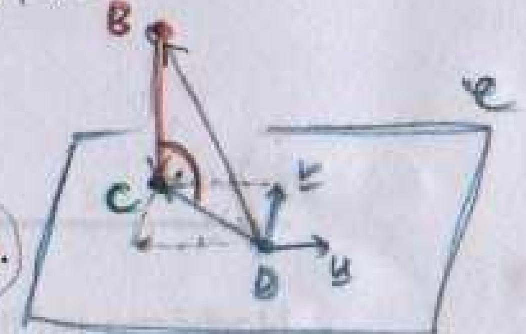
Tato soustava má jednoznačné řešení $r = -2$ a $s = 1$, tedy

$$C = D - 2\mathbf{u} + \mathbf{v} = [1, 1, 5] \quad \text{a} \quad \overrightarrow{BC} = (2, 4, -2) = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je

$$v(B, C) = |BC| = 2\|\mathbf{n}\| = 2\sqrt{6}.$$

⊛ pozn.:

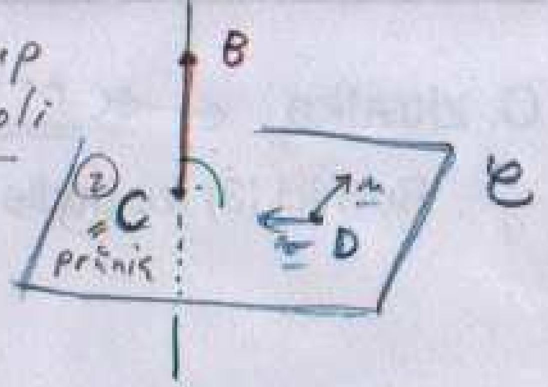


• $\overrightarrow{DC} = -2u + v$ ... kolmý průmět $\overrightarrow{DB}$ do $\vec{\mathcal{C}}$

• $\overrightarrow{BC} = 2n$ ... kolmý průmět $\overrightarrow{BD}$ do $\vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

95

B. kolmice, pata kolmice, … ← «"konstrukční" postup pro B = bod, $\mathcal{C}$ = cokoli



① Kolmice k $\mathcal{C}$ procházející bodem B je

$$\mathcal{K} = B + \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = \left\{ B + t\mathbf{n} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

① $\mathcal{K}$ = kolmice

② Pata kolmice $C = \mathcal{K} \cap \mathcal{C}$ odpovídá řešení rovnice

(dosazení do rovnice $\mathcal{C}$) ⟶

$$\boxed{(-1+t) - 2(5-2t) - (7-t) = -6.} \qquad (3)$$

← ① rovnice / ① neznámá

dim $\vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

Tato rovnice má jednoznačné řešení $t = 2$, tedy

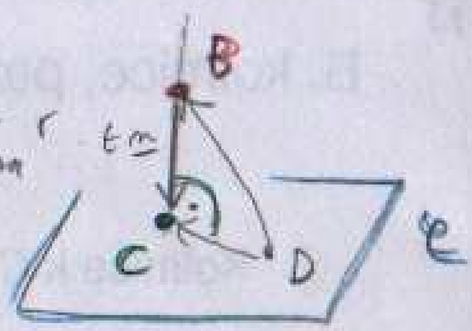
$$C = B + 2\mathbf{n} = [1, 1, 5].$$

Vzdálenost je

$$v(B, C) = |BC| = 2\|\mathbf{n}\| = 2\sqrt{6}.$$

96

C. zkratka ← « pro B = bod, ϱ = nadrovina



Rovnici (3) lze podle (1) obecně zapsat takto: ← 1 rovnice / 1 neznámá

$$\boxed{(\underbrace{\overrightarrow{DB} + t\mathbf{n}}_{\overrightarrow{DC}}) \,.\, \mathbf{n} = \overrightarrow{DB} \,.\, \mathbf{n} + t\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n} = 0.}$$

$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB} + t\mathbf{n}$

$C \in \varrho$

$\Downarrow$

$\boxed{\overrightarrow{DC} \cdot \mathbf{n} = 0}$

Tato rovnice má jednoznačné řešení

$$t = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}} = \frac{12}{6} = 2,$$

tedy

$$\overrightarrow{BC} = \frac{\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}}{\mathbf{n} \,.\, \mathbf{n}}\mathbf{n} = 2\mathbf{n}.$$

Vzdálenost je ← "vzoreček"

$$\boxed{v(B, C) = |BC| = \frac{|\overrightarrow{BD} \,.\, \mathbf{n}|}{\|\mathbf{n}\|} = 2\sqrt{6}.}$$

V duchu (1) můžeme poslední výpočet vyjádřit také takto: dosazení B do rovnice ϱ

$$v(B, C) = \frac{|-1 - 2\cdot 5 - 7 + 6|}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}.$$

← velikost normály