D. podle definice ← velmi OBECNÝ postup

- $\vec{BC} = \vec{BD} + r\mathbf{u} + s\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2+r+2s \\ -3+r+s \\ -4-r \end{pmatrix}$
- vzdál. $|BC| = \|\vec{BC}\| = \sqrt{(2+r+2s)^2+(-3+r+s)^2+(-4-r)^2} = \dots$

$$\dots = \sqrt{3r^2+6rs+6r+5s^2+2s+29}$$

← ozn. $f(r,s)$

- hledáme GLOBÁLNÍ MINIMUM funkce f:

⇝ derivace $\dfrac{\partial f}{\partial r} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6r+6s+6}{\sqrt{\dots}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial s} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{6r+10s+2}{\sqrt{\dots}}$

⇝ STACIONÁRNÍ BOD(Y) = řešení soustavy

$$\left(\boxed{\begin{matrix} 6r+6s+6=0 \\ 6r+10s+2=0 \end{matrix}}\right) \sim \dots \sim \begin{pmatrix} r=-2 \\ s=1 \end{pmatrix}$$

(podobnost se soustavou na s. 94 NENÍ náhodná!)

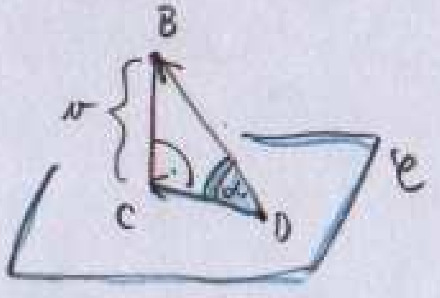
⇝ nutně MINIMUM .... ↯

- $v(B,\mathcal{C}) = f(-2,1) = \dots = 2\sqrt{6}$

E. souvislost s odchylkou

kolmý průmět

$\vec{DC} = -2\underline{u} + \underline{v} = (0,-1,2)$



$\alpha := \angle(DB, \ell) \overset{!}{=} \angle(\vec{DB}, \vec{DC})$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{DB}\cdot\vec{DC}}{\|\vec{DB}\|\,\|\vec{DC}\|} = \dots = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{29}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \dots = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{29}}$$

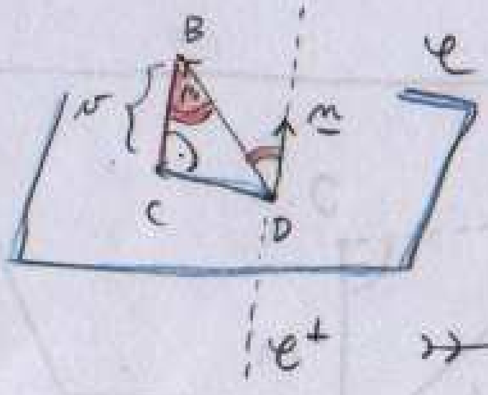
B = bod

ℓ = cokoli

$$\longrightarrow \boxed{v = |DB|\cdot\sin\alpha} = \dots = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

ZKRATKA:

normála



$\beta := \angle(DB, n)$ $\quad (\because\ \alpha+\beta = 90^\circ)$

$$\cos\beta = \frac{|\vec{DB}\cdot n|}{\|\vec{DB}\|\cdot\|n\|}$$

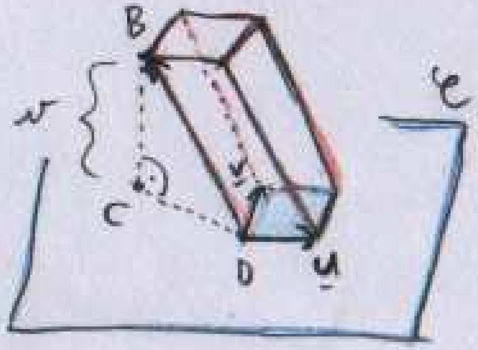
$$\longrightarrow \boxed{v = |DB|\cdot\cos\beta} = \frac{|\vec{DB}\cdot n|}{\|n\|} = \dots = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

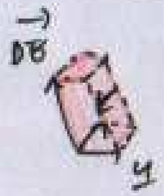
B = bod

ℓ = nad-rovina

tentýž "vzoreček" jako na s. 96!

F. souvislost s objemy ← velmi OBECNÝ postup



$V :=$ objem 

$S :=$ obsah 

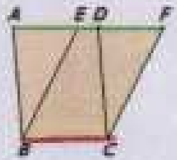
$$\boxed{v = \frac{V}{S}} = \left(\cdots \right) = \frac{12}{\sqrt{6}} = 2\sqrt{6}$$

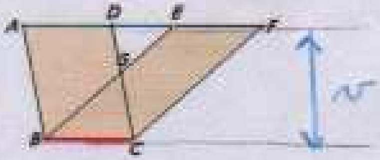
viz dále ... !

Opakování

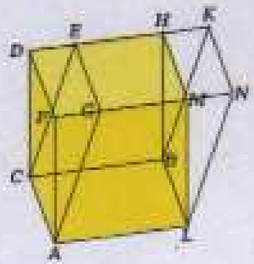
OBSAHY a OBJEMY

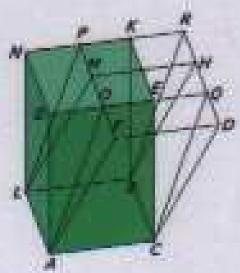
- Rovnoběžníky se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný obsah.





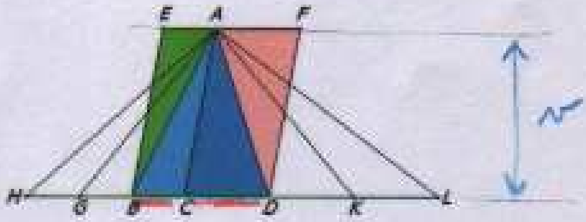
- Rovnoběžnostěny se stejnými základnami a stejnými výškami mají stejný objem.



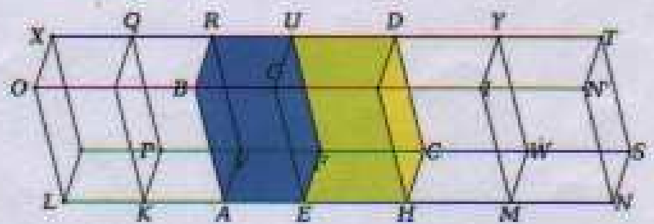


101 Opakování

- Poměr obsahů rovnoběžníků se stejnou výškou je stejný jako poměr délek jejich základen.



- Poměr objemů rovnoběžnostěnů se stejnou výškou je stejný jako poměr obsahů jejich základen.



102 Opakování

"vzorečky"

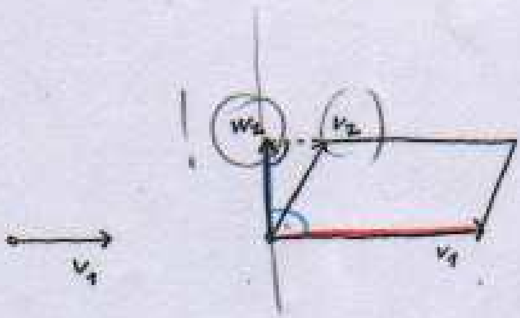
Odtud:

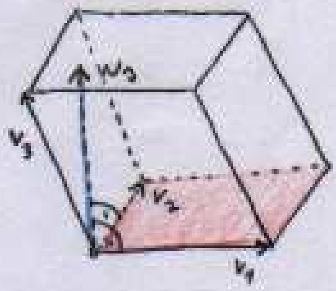
- $S = a \cdot v$,
  kde S = obsah rovnoběžníku, a = velikost strany, v = velikost odp. výšky,
- $V = S \cdot w$,
  kde V = objem rovnoběžnostěnu, S = obsah stěny, w = velikost odp. výšky.

"objem = (základna) · (výška)"

103

Obecně pomocí vektorů





Objem rovnoběžnostěnu určeného vektory $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots$ je nezáporné reálné číslo, ozn. $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots)$, takové, že

- $V(\mathbf{v}_1) := \|\mathbf{v}_1\|$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) := V(\mathbf{v}_1, \underline{\mathbf{w}_2}) = \|\underline{\mathbf{v}_1}\| \cdot \|\underline{\mathbf{w}_2}\|$, základna výška
  kde $\mathbf{w}_2 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_2$ do $\mathbf{v}_1^{\perp}$,
- $V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) := V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \underline{\mathbf{w}_3}) = \underline{V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)} \cdot \|\underline{\mathbf{w}_3}\|$,
  kde $\mathbf{w}_3 =$ kolmý průmět vektoru $\mathbf{v}_3$ do $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^{\perp}$,
- atd...

Počítání

$v_2 \perp v_2$

- Pro $k = 2$ např.:

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\| \cdot \sin\alpha,$$

kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, ... $\|v_2\|$ ← výška (umíme) ✓

- Pro obecné k např.: ← soustava rovnic
  – podle definice, tj. pomocí kolmého průmětu,
  – podle vlastností, tj. pomocí **determinantu**, vektorového součinu, apod. ...
  (naučíme) !

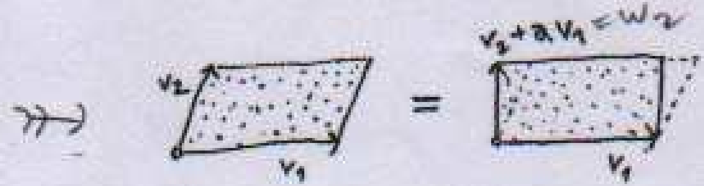
„vzoreček"

105

~~Úvod (koncepčně)~~ OPAKOVÁNÍ

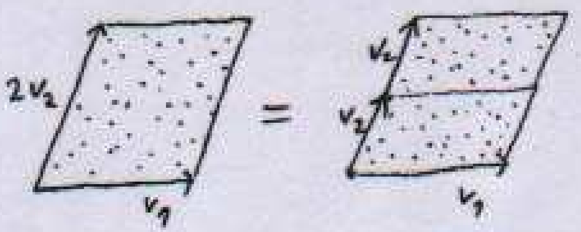
Vlastnosti obsahu/objemu se nápadně podobají vlastnostem determinantu:

$$V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1) = 0$$



lineární!

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \overset{0}{V(\mathbf{v}_1, a\mathbf{v}_1)} =$$
$$= V(\mathbf{v}_1, \underbrace{\mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1}_{w_2})$$



$$V(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2) = \underbrace{|b|}_{\geq 0} \cdot V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$$

$$\boxed{\text{objem}: V \times \ldots \times V \longrightarrow \mathbb{R}_+}$$

106 # Determinant

OPAKOVÁNÍ Z ALGEBRY

Determinant chápeme

buď $\mathrm{Mat}(n \times n) \to \mathbb{R}$ nebo $\boxed{\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n} \to \mathbb{R},}$ kde $V = \mathbb{R}^n$.

Definice ....[1]

Vlastnosti základní:

- **anti-symetrické**

$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots) = -\det(\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots)$$

- **multi-lineární**

ve všech složkách

$$\det(\mathbf{v}_1, b\mathbf{v}_2, \ldots) = b \cdot \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots)$$
$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2, \ldots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots) + \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \ldots)$$

Vlastnosti odvozené:

$$\boxed{\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 + a\mathbf{v}_1, \ldots) = \det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots)}$$
$$\det(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots) = 0 \iff \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \text{ jsou lineárně závislé}$$

[1] viz algebra (DÚ)

107

Vnější součin

det : $V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}$ závisí na souřadnicovém vyjádření vektorů, tj. na zvolené bázi...[2]

Pro ortonormální báze je výsledek tentýž:

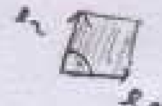
> *Vnějším součinem* n-tice vektorů $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ v n-rozměrném eukleidovském prostoru je determinant matice tvořené souřadnicemi těchto vektorů vzhledem k nějaké ortonormální bázi; ozn.
>
> $$[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n] := \det(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n).$$

→ zejména pro libo. ON bázi $(e_1, \ldots, e_n)$:

$[e_1, \ldots, e_n] = \underline{\underline{1}} =$ objem jednotkové n-krychle

Z předchozího plyne, že

$$V(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \begin{cases} 0 & \text{pro } k > n \\ \pm[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k] & \text{pro } k = n \\ ? & \text{pro } k < n \end{cases}$$



$\underline{\underline{V = 1 \cdot 1}}$

[2] viz matice přechodu a Cauchyova věta (o součinu determinantů)

Kouzlo ($k = 2$)

Víme, že

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cancel{\|\mathbf{v}_1\|} \cdot \cancel{\|\mathbf{v}_2\|} \cdot \sin\alpha,$$

přičemž

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \qquad \cos\alpha = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_1\| \cdot \|\mathbf{v}_2\|}.$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}{\|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{v}_2\|^2}} = \sqrt{\frac{\|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2}{\cancel{\|\mathbf{v}_1\|^2} \cdot \cancel{\|\mathbf{v}_2\|^2}}}$$

Odtud

$$V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \cdots = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 \|\mathbf{v}_2\|^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2} \overset{!}{=} \sqrt{\begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 \end{vmatrix}},$$

zase determinant, ...

Kouzlo (obecně)

← k = lib

…tzv. *Gramův determinant*, ozn.

$$G(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k) := \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{v}_k \end{vmatrix}.$$

Věta

Pro libovolnou k-tici vektorů v eukleidovském prostoru platí

$$V(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k) = \sqrt{G(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_k)}.$$

110

Kouzlo (důkaz)

1) Pro navzájem kolmé vektory (kvádr):

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \|\mathbf{v}_1\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_2\|^2 \cdot \|\mathbf{w}_3\|^2 = V(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3)^2.$$

(zejména $0 \leq$)

2) Pro lib. našikmené vektory $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2 + a\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_3 = \mathbf{w}_3 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{w}_2$:

$a, b, c \in \mathbb{R}$ lib.

$$G(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_3 \end{vmatrix} =$$

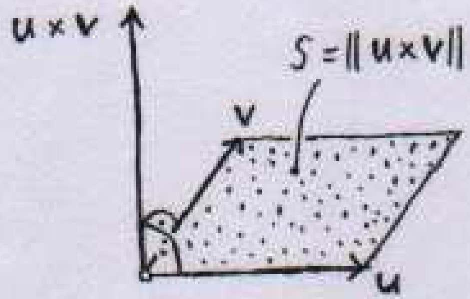
plyne z vlastností skalárního součinu a determinantu

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_1 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_2 & \mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{w}_3 \end{vmatrix} = G(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3). \quad \square$$

111

Vektorový součin ($n = 3$) (viz s. 83)

Ze SŠ známe jako operaci $V \times V \to V$ s několika užitečnými vlastnostmi. . .



Sice nevíme proč, ale pro $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ počítáme takto:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

112

Vektorový součin (obecně)

Návod k předchozímu souř. vyjádření — Laplaceův rozvoj determinantu:

$$[\underline{u},\underline{v},\underline{x}] = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & x_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 \\ u_3 & v_3 & x_3 \end{vmatrix} = \overset{(-1)^{1+3}}{+}\begin{vmatrix} u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_1 \overset{(-1)^{2+3}}{-} \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_3 & v_3 \end{vmatrix} x_2 + \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} x_3. = (\underline{u}\times\underline{v}) \cdot \underline{x}$$

$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ lib.

Důležitá (bezsouřadnicová) interpretace:

$$[\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{x}] = (\mathbf{u}\times\mathbf{v})\,.\,\mathbf{x},^{3}$$

vnější součin skalární součin

Obecná definice:

Vektorovým součinem $(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})$-tice vektorů $(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1})$ v $\boldsymbol{n}$-rozměrném eukleidovském prostoru je vektor $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$ splňující

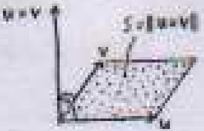
$$[\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{n-1},\mathbf{x}] = \mathbf{w}\,.\,\mathbf{x}$$

pro všechna $\mathbf{x} \in V$.

[3] nalevo vnější součin, napravo tzv. "smíšený součin"

113

Vektorový součin (vlastnosti)



Věta

Ozn. $\mathbf{w} := \mathbf{v}_1 \times \cdots \times \mathbf{v}_{n-1}$, $n = \dim V$.

(a) ▸ *Toto je anti-symetrické multi-lineární zobrazení* $\underbrace{V \times \cdots \times V}_{n-1} \to V$.

(b) ▸ $\mathbf{w} = \mathbf{o} \iff \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně závislé.*

(c) ▸ $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$ *jsou lineárně nezávislé* $\implies (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}, \mathbf{w})$ *je kladná báze.*

(d) ▸ $\mathbf{w}$ *je kolmý ke všem vektorům* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1}$.

(e) ▸ $\|\mathbf{w}\| = \mathrm{V}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-1})$. = objem

Důkaz.

Všechno plyne z definující rovnosti a vlastností determinantu. . . □

Vlastnosti vekt. součinu — DŮKAZ:

(*) def. rovnost $[v_1, \dots, v_{n-1}, x] = w \cdot x$, kde $x \in V$ lib.

vnější součin (determinant)

skalární součin

(a) vnější součin = anti-sym. + multi-lin. $\Rightarrow$ vektorový součin TAKY

(b) $[v_1, \dots, v_{n-1}, x] = 0 \quad \forall x \in V \overset{\text{det.}}{\Leftrightarrow} v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. ZÁVISLÉ

$w \cdot x = 0 \quad \forall x \in V \overset{\text{skal. souč.}}{\Leftrightarrow} w = o$

(c) $v_1, \dots, v_{n-1}$ lin. NEZÁVISLÉ $\overset{(b)}{\Rightarrow} w \neq o \Rightarrow \dots$ báze

$[v_1, \dots, v_{n-1}, w] \overset{(*)}{=} w \cdot w \overset{\text{skal. souč.}}{>} 0$

(d) $w \cdot v_i \overset{(*)}{=} [\underset{\sim}{v_1, \dots}, v_{n-1}, \underset{\sim}{v_i}] \overset{\text{det.}}{=} 0$, pro lib. i

(e) $\|w\|^2 = w \cdot w \overset{(*)}{=} [v_1, \dots, v_{n-1}, w] \overset{(c)}{=} V(v_1, \dots, v_{n-1}, w) \overset{(d)}{=}$

$= \underbrace{V(v_1, \dots, v_{n-1})}_{\text{základna}} \cdot \underbrace{\cancel{\|w\|}}_{\text{výška}}$

Poznámky

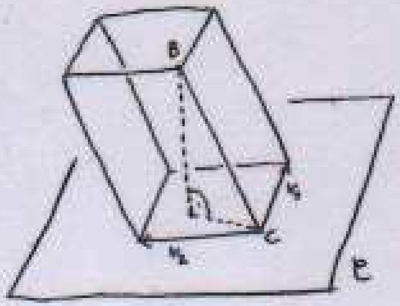
- K vektorovému součinu pro $n = 3$:

$$\|\mathbf{u} \times \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \sin \alpha,$$ (viz s. 104)

kde $\alpha = \sphericalangle(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

obsah

- K aplikacím: vzdálenosti podprostorů bez řešení soustav rovnic. . .



$$v(B,C) = \frac{V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \overrightarrow{BC})}{V(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}$$ (viz s. 99)

- Ještě pro $n = 3$:
  vekt. součin $V \times V \to V$ je binární operace na V, která NENÍ asociativní!
  - tj. obecně neplatí
    $$(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$$
  - zato platí tzv. Jacobiho identita:
    $$(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$$