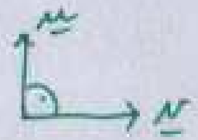
116

KOLMOST

- rozumíme ... kolmost vektorů

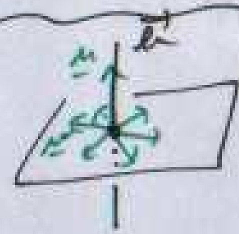


$u \perp v \iff u \cdot v = 0$

tedy ... kolmost přímek

$b \perp c \leftarrow$ protože $u \perp v$, $\vec{u} \in \vec{b}$, $\vec{v} \in \vec{c}$

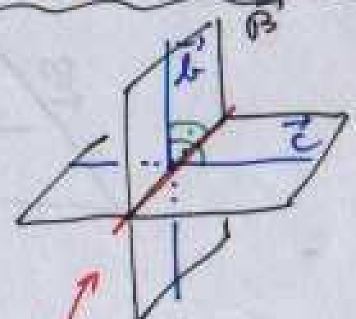
- obecněji .... přímka & podprostor



$\vec{\mathcal{E}}$ $\quad b \perp \mathcal{E} \leftarrow$ protože $u \perp v$ pro lib. $u \in \vec{b}$ a $v \in \vec{\mathcal{E}}$

(*) NELZE BRÁT OBECNĚ!!

- obecněji... dva podprostory



$\vec{\mathcal{E}}$ $\quad \mathcal{B} \perp \mathcal{E} \leftarrow$ protože $\vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{b}$ a $\vec{b} \perp \vec{\mathcal{E}}$ (ekvivalentně $\vec{\mathcal{E}} \supseteq \vec{c}$ a $\vec{c} \perp \vec{\mathcal{B}}$)

(**) LZE BRÁT OBECNĚ, POKUD SE DOPLNÍ $\vec{b} = \vec{\mathcal{E}}^{\perp}$ ($\vec{c} = \vec{\mathcal{B}}^{\perp}$)

$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}} \neq \{o\}$ ... problém s nápadem (*)

117 - postřeh .... nápady (*) a (**) jsou ekvivalentní, pouze když $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$

- OBECNÁ DEFINICE

$$\boxed{\begin{array}{l} \bullet\ \mathcal{B} \perp \mathcal{C}, \text{ pokud } \vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{C}} \\ \bullet\ \vec{\mathcal{B}} \perp \vec{\mathcal{C}}, \text{ pokud } \vec{\mathcal{B}} \supseteq \vec{\mathcal{C}}^{\perp} \text{ nebo } \vec{\mathcal{B}} \subseteq \vec{\mathcal{C}}^{\perp} \\ \qquad (\text{ekviv. } \vec{\mathcal{B}}^{\perp} \subseteq \vec{\mathcal{C}} \text{ nebo } \vec{\mathcal{B}}^{\perp} \supseteq \vec{\mathcal{C}}) \end{array}}$$

$\mathcal{B}, \mathcal{C}$ ... lib. podprostory v euklid. prostoru $\mathcal{E}$

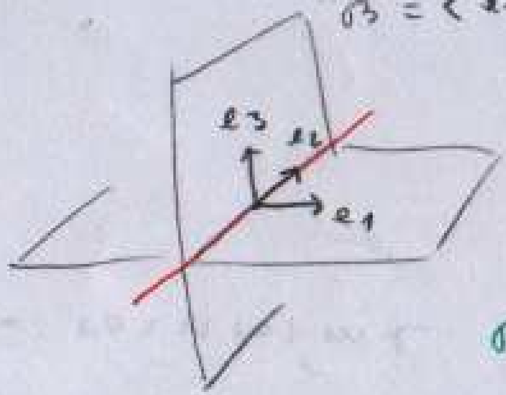
$\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}$ ... zaměření v $\vec{\mathcal{E}}$

$\vec{\mathcal{B}}^{\perp}, \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$ ... kolmý doplněk $\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}$ v $\vec{\mathcal{E}}$!!!!

POZNÁMKY

- tato definice zahrnuje všechny předchozí případy ....

- tato definice závisí na okolním prostoru $\mathcal{E}$, tj. podpr. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ mohou být kolmé v $\mathcal{E}$, ale nemusí být kolmé v nadprostoru $\mathcal{E}' \supset \mathcal{E}$ .. ....



$\vec{\mathcal{B}} = \langle e_1, e_3 \rangle \overset{②}{\supseteq} \langle e_3 \rangle = \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

$\vec{\mathcal{C}} = \langle e_1, e_2 \rangle$

① $\rightsquigarrow \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = \langle e_3 \rangle$

$\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ jsou kolmé v $\mathcal{E}$

(e_1, e_2, e_3) ... ON báze $\mathcal{E}$

$\vec{\mathcal{B}} = \langle e_1, e_3 \rangle \overset{②}{\cancel{\supseteq}} \langle e_3, e_4 \rangle = \vec{\mathcal{C}}^{\perp}$

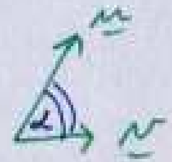
① $\rightsquigarrow \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = \langle e_3, e_4 \rangle$

$\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ nejsou kolmé v $\mathcal{E}'$

vložme do $\mathcal{E}'$ s ON bází (e_1, e_2, e_3, e_4)

ODCHYLKY

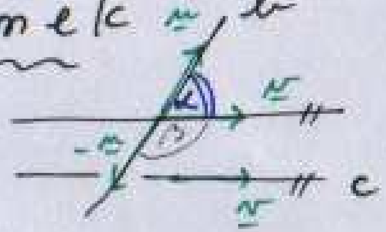
- rozumíme ... odchylka vektorů



$$\cos\alpha = \frac{u\cdot v}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

... $\alpha \in [0, 180°]$

tedy ... odchylka přímek u, b

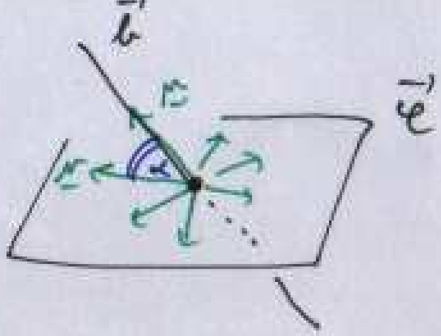


$$\cos\alpha = \frac{|u\cdot v|}{\|u\|\cdot\|v\|}$$

... $\alpha \in [0, 90°]$

$\beta \in [90°, 180°]$

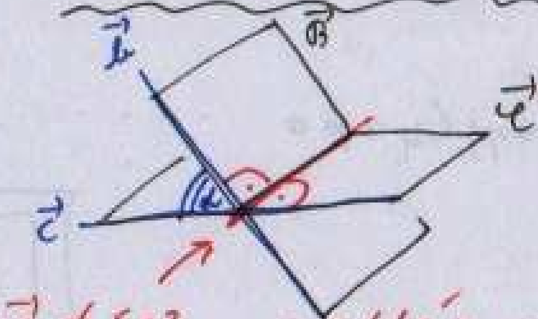
- obecněji ... přímka & podprostor



$$\alpha = \min\left\{ \measuredangle(u, v),\ \text{kde } \begin{array}{l} u \in \vec{b} \\ v \in \vec{\mathcal{E}} \end{array} \right\}$$

(*) NELZE BRÁT OBECNĚ !!

- obecněji ... dva podprostory



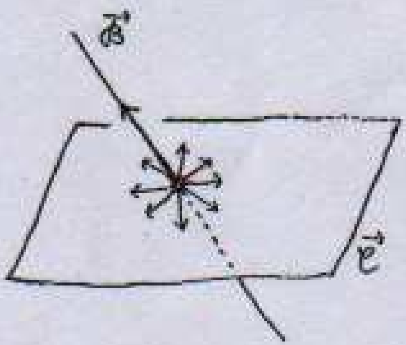
$\alpha = \measuredangle(\vec{b}, \vec{c})$, kde
$\vec{b} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\vec{b} \perp (\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}})$
$\vec{c} \in \vec{\mathcal{E}}$ a $\vec{c} \perp (\dots)$

(**) LZE BRÁT OBECNĚ !!

$\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{E}} \neq \{0\}$ ... problém s nápadem (*)

OBECNÁ DEFINICE

- $\vec{B}\cap\vec{e}=\{0\}$



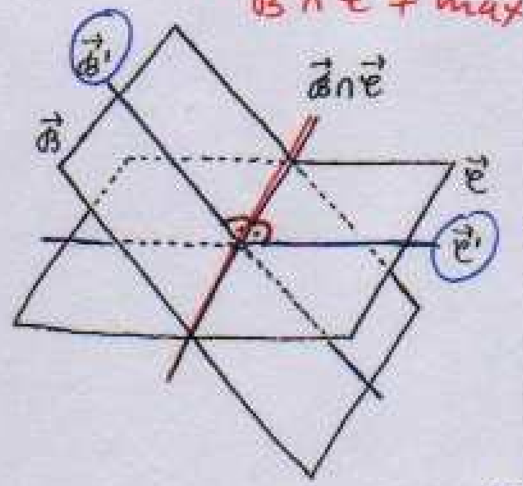
(*) $\measuredangle(\vec{B},\vec{e}) := \min\{\dots\}$

- $\vec{B}\cap\vec{e}\neq\{0\}$

$\vec{B}\cap\vec{e}=\max$

$\measuredangle(\vec{B},\vec{e}) := 0$

$\vec{B}\cap\vec{e}\neq\max$



$\measuredangle(\vec{B},\vec{e}) := \measuredangle(\vec{B}',\vec{e}')$ (**)

...

$\vec{B}'\cap\vec{e}'=\{0\}$

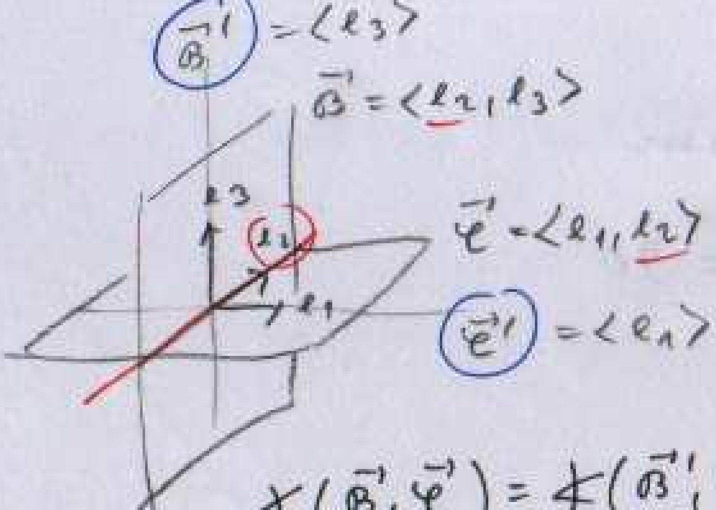
- $\measuredangle(B,e) := \measuredangle(\vec{B},\vec{e})$

stejně jako v kolmosti pracujeme pouze se zaměřeními ....

121 POZNÁMKY

- tato definice zahrnuje všechny předchozí případy . . . .

- tato definice NEZÁVISÍ na okolním prostoru $\mathcal{E}$, přesněji na vložení do většího nadprostoru . . . . . .



$\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = \measuredangle(\vec{\mathcal{B}}', \vec{\mathcal{C}}')$
$= \measuredangle(e_3, e_1) = 90°$

$(e_1, e_2, e_3) \ldots$ ON báze $\mathcal{E}$

všechno stejné !!

tedy $\measuredangle(\vec{\mathcal{B}}, \vec{\mathcal{C}}) = 90°$ ...

... taky v $\mathcal{E}'$

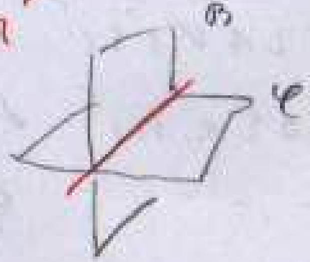
vložíme do $\mathcal{E}'$ s ON bází
(e_1, e_2, e_3, e_4)

ZÁVĚRY

- $\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \implies \sphericalangle(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 90^\circ$

$\cancel{\Longleftarrow}$

obecně neplatí

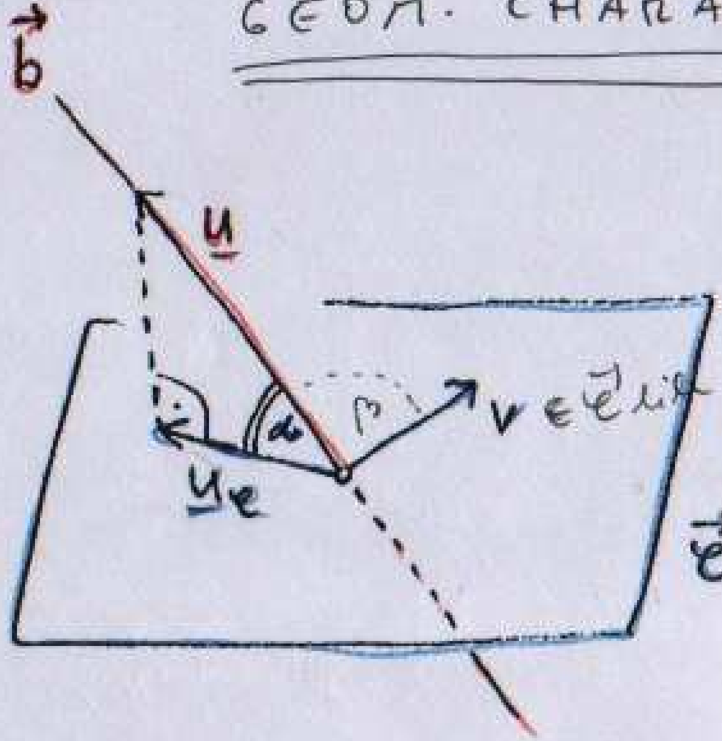
(viz  ve 4-dim prostoru)

- pokud $\vec{\mathcal{B}} \cap \vec{\mathcal{C}} = \{o\}$, potom

$$\mathcal{B} \perp \mathcal{C} \iff \sphericalangle(\mathcal{B},\mathcal{C}) = 90^\circ$$

GEOM. CHARAKTERIZACE $\sphericalangle(b, \mathcal{E})$

$\uparrow$ přímka $\quad \uparrow$ cokoliv



Platí:

- $b \perp \mathcal{E} \Rightarrow \sphericalangle(b, \mathcal{E}) = 90°$
- $b \not\perp \mathcal{E} \Rightarrow \sphericalangle(b, \mathcal{E}) = \sphericalangle(\underline{u}, \underline{u}_{\mathcal{E}})$

  kde $\underline{u} \in \vec{b}$ lib. a

  $\underline{u}_{\mathcal{E}}$ = kolmý průmět $\underline{u}$ do $\vec{\mathcal{E}}$

Důkaz:

- pro lib. $\underline{v} \in \vec{\mathcal{E}}$ chceme ukázat, že $\underbrace{\sphericalangle(\underline{u}, \underline{v})}_{\beta :=} \geq \underbrace{\sphericalangle(\underline{u}, \underline{u}_{\mathcal{E}})}_{=: \alpha}$

  tj. $\cos\beta \leq \cos\alpha$

- 

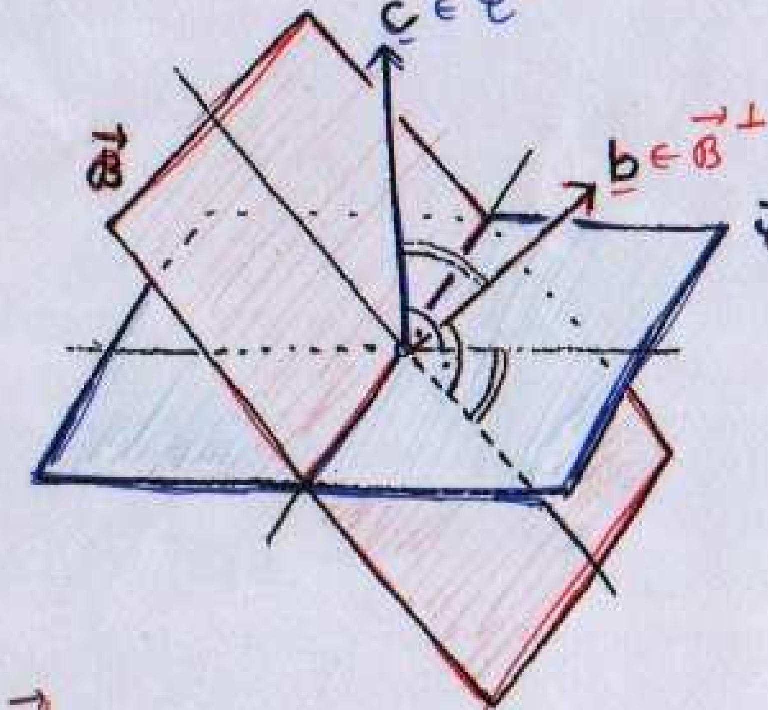
  $\underline{w} = \underline{u} - \underline{u}_{\mathcal{E}} \perp \vec{\mathcal{E}} \Rightarrow \underline{w} \cdot \underline{v} = 0$, tj. $(\underline{u} - \underline{u}_{\mathcal{E}}) \cdot \underline{v} = 0$

  tj. $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u}_{\mathcal{E}} \cdot \underline{v}$

- $$\cos\beta = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} = \frac{\underline{u}_{\mathcal{E}} \cdot \underline{v}}{\|\underline{u}\| \cdot \|\underline{v}\|} \leq \frac{\|\underline{u}_{\mathcal{E}}\| \cdot \cancel{\|\underline{v}\|}}{\|\underline{u}\| \cdot \cancel{\|\underline{v}\|}} = \cos\alpha . \quad \boxed{\text{Z}}$$

  Cauchyho-Schwarzova nerovnost

ZKRATKY

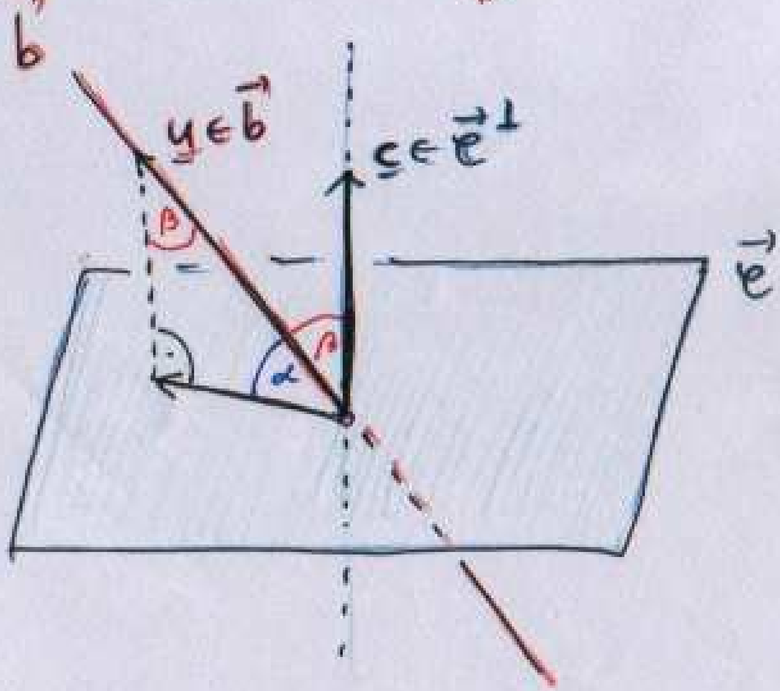


← DVĚ <u>NAD</u>-ROVINY:

$$\boxed{\measuredangle(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = \measuredangle(\underline{b}, \underline{c})}$$

normály

$\dim \vec{\mathcal{B}}^{\perp} = \dim \vec{\mathcal{C}}^{\perp} = 1$



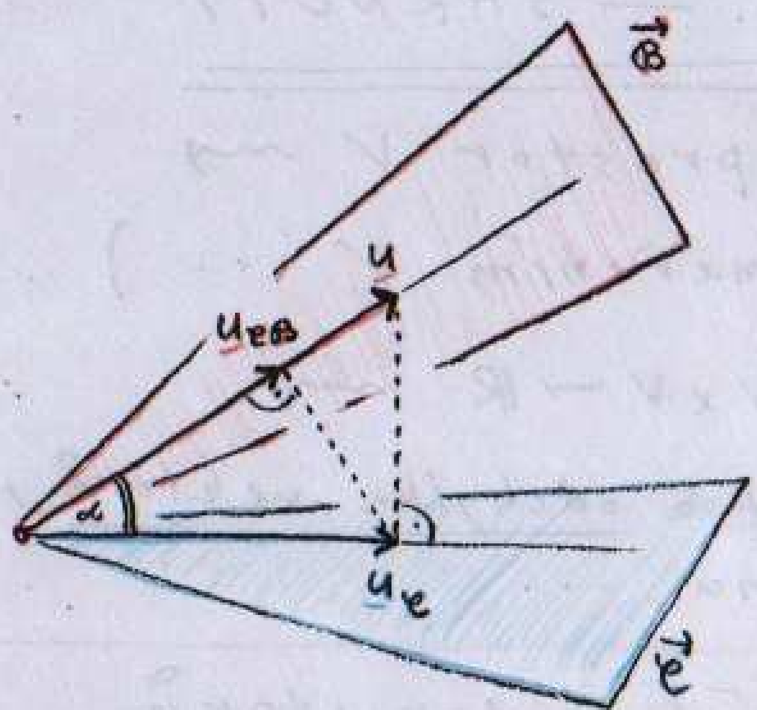
$\alpha + \beta = 90^\circ$

← PŘÍMKA A NAD-ROVINA:

$$\boxed{\cos \beta = \sin \alpha = \frac{|\underline{y} \cdot \underline{c}|}{\|\underline{y}\| \cdot \|\underline{c}\|}}$$

normála $\mathcal{C}$

GEOM. CHARAKTERIZACE OBECNĚ



Pokud $\sphericalangle(\mathcal{B}, \mathcal{E}) = \sphericalangle(\underline{u}, \underline{v}) =: \alpha$

pro $\underline{u} \in \vec{\mathcal{B}}$ a $\underline{v} \in \vec{\mathcal{E}}$,

potom taky (viz s. 123)

$$\alpha = \sphericalangle(\underline{u}, \underline{u}_{\mathcal{E}}) = \sphericalangle(\underline{v}, \underline{v}_{\mathcal{B}})$$

kolmý průmět $\underline{u}$ do $\vec{\mathcal{E}}$

kolmý průmět $\underline{v}$ do $\vec{\mathcal{B}}$

$\underline{u}_{\mathcal{E}}$ = násobek $\underline{v}$ a

$\underline{v}_{\mathcal{B}}$ = násobek $\underline{u}$ ...

... stačí tedy popsat (nějak chytře) složení kolmých projekcí $\vec{\mathcal{B}} \to \vec{\mathcal{E}} \to \vec{\mathcal{B}}$ a najít

CHARAKTERISTICKÉ (VLASTNÍ) VEKTORY tohoto zobrazení ...

(viz dále ...)

EUKLEIDOVSKÁ GEOMETRIE — SHRNUTÍ

- (Těleso $\mathbb{R}$ ⇝ vektorový prostor V ⇝ ⇝ afinní prostor se zaměřením V ...)
- NAVÍC SKALÁRNÍ SOUČIN $V \times V \to \mathbb{R}$ ⇝ ⇝ velikost vektoru, kolmost a odchylka vektorů, objem rovnoběžnostěnu, ...

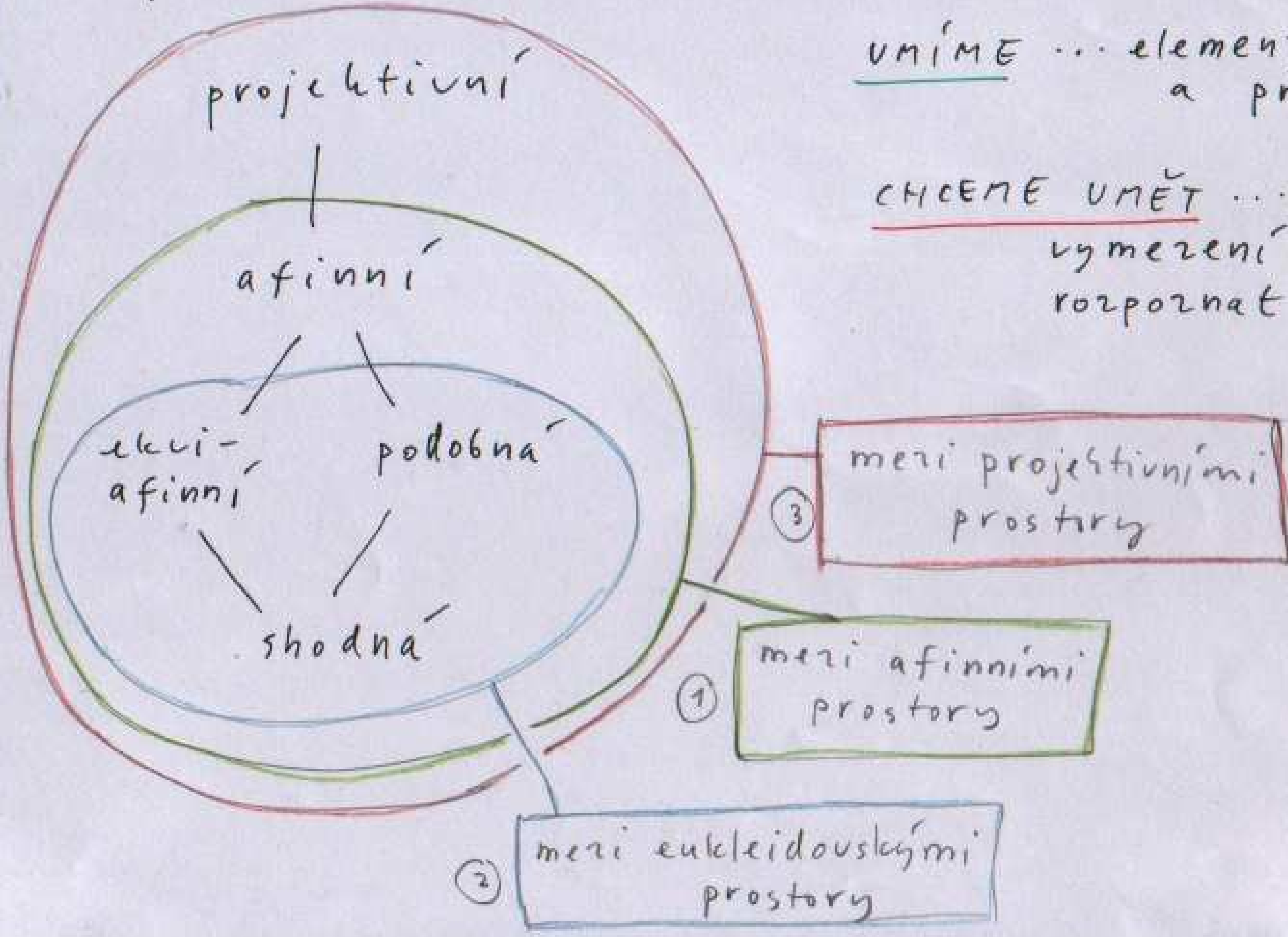
- VZDÁLENOST bodů a obecných podprostorů ⇝ definice, geom. charakterizace, souvislosti, zkratky...
- OBJEMY rovnoběžnostěnů apod. ⇝ definice, DETERMINANTY (vnější součin, Gramův), vektorový součin, ...
- KOLMOST přímek a obecných podprostorů ⇝ definice, záludnosti, ...
- ODCHYLKA přímek a obecných podprostorů ⇝ definice, geom. charakterizace, zkratky, ...

GEOMETRICKÁ ZOBRAZENÍ

podle hierarchie jako na s. 3 :

UMÍME ... elementární vymezení a příklady!

CHCEME UMĚT ... algebraická vymezení a počítání, rozpoznat základní zobr. ... apod.



OPAKOVÁNÍ – GEOMETRIE

obecně

• AFINNÍ zobrazení zachovává:

(a) "přímkovost" $\quad / \to /$ (nebo •) ← bod

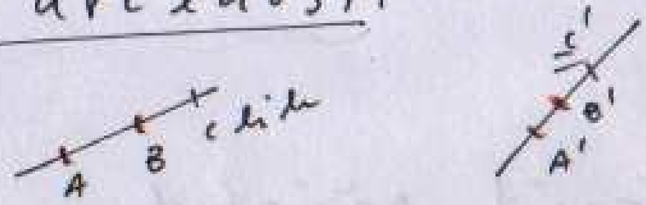
(b) rovnoběžnost $\quad \parallel \to \parallel$ (pokud ne •)

(c) poměry trojic kolin. bodů

(pokud ne •)

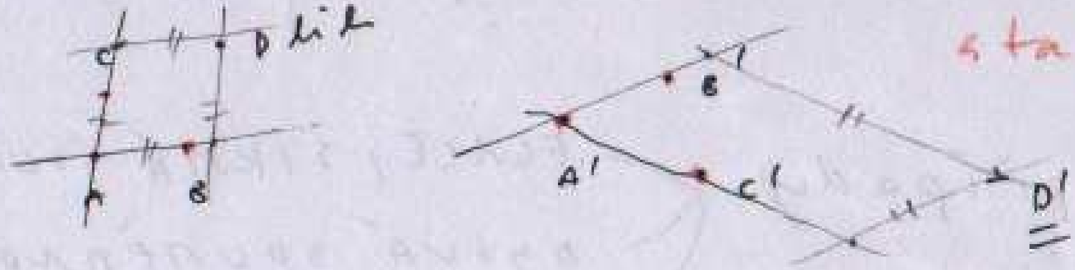
• "věta o určenosti"

$\underline{m = 1}$:



stačí $\underline{2} = m+1$

$\underline{m = 2}$:



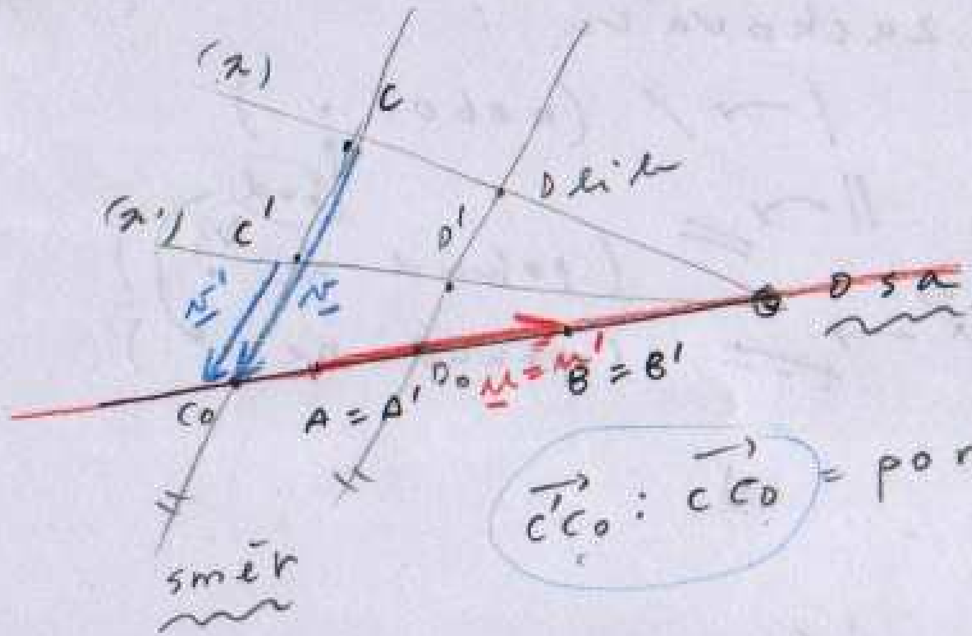
stačí $\underline{3} = m+1$

⋮

(za chvíli zobecníme)

129

- **základní** AFINNÍ (v rovině) = OSOVÁ AFINITA (škálování v jednom směru)



osa (= přímka pevných bodů)

$\overrightarrow{C'C_0} : \overrightarrow{CC_0}$ = poměr škálování (modul)

- degenerovaný (singulární) případ = ROVNOBĚŽNÉ PROMÍTÁNÍ

- speciální případy
  - ELACE, ŠIKMÁ SOUM. (ekviafinní)
  - OSOVÁ SOUMĚRNOST (shodné)
  - ...

OPAKOVÁNÍ — ALGEBRA

- U, V ... vektorové prostory
- $f : U \to V$ ... LINEÁRNÍ zobr. zachovává LINEÁRNÍ KOMBINACE vektorů, tj.

  ⓐ $f(a \cdot \underline{u}) = a f(\underline{u})$

  ⓑ $f(\underline{u} + \underline{v}) = f(\underline{u}) + f(\underline{v})$

  $a \in \mathbb{R}$, $\underline{u}, \underline{v} \in V$ lib.

- f = LINEÁRNÍ $\iff$ lze vyjádřit takto:

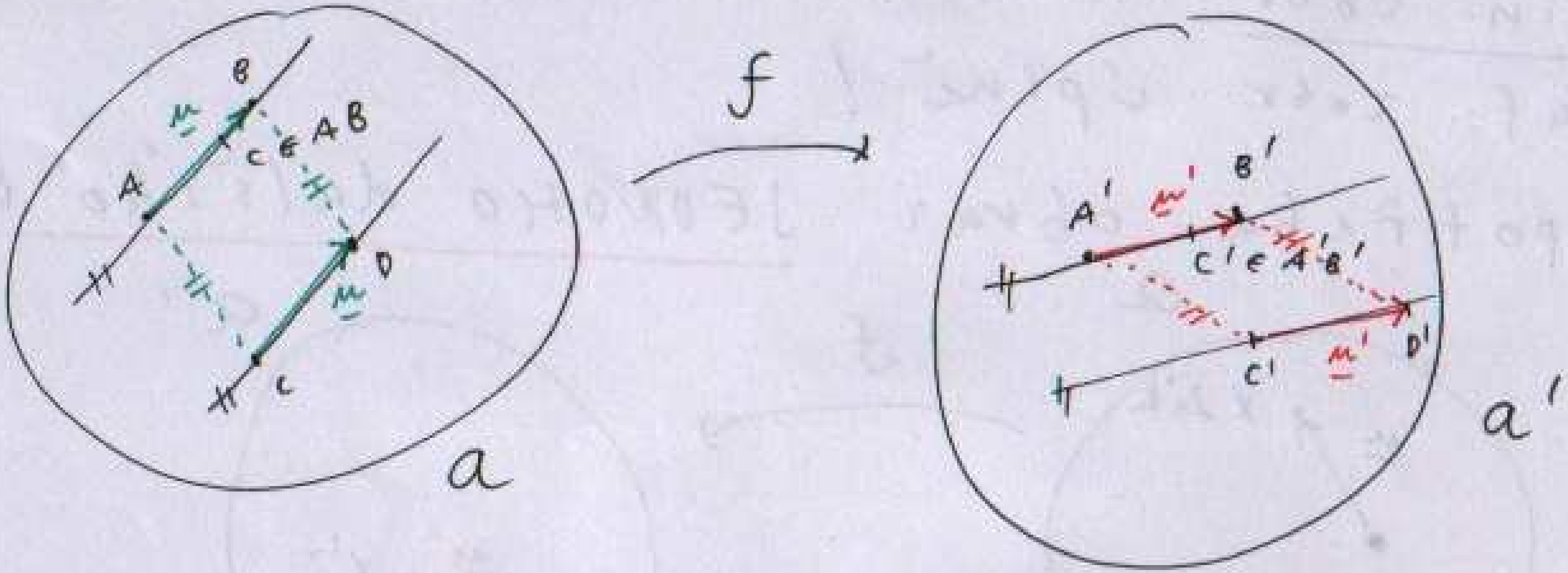
$$\boxed{f(\underline{u}) = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}}$$

MATICE f ... ← vzhledem k nějaké bázi ...

souřadnice $\underline{u}$ ...

NEW

$f: a \to a'$ … afinní zobrazení

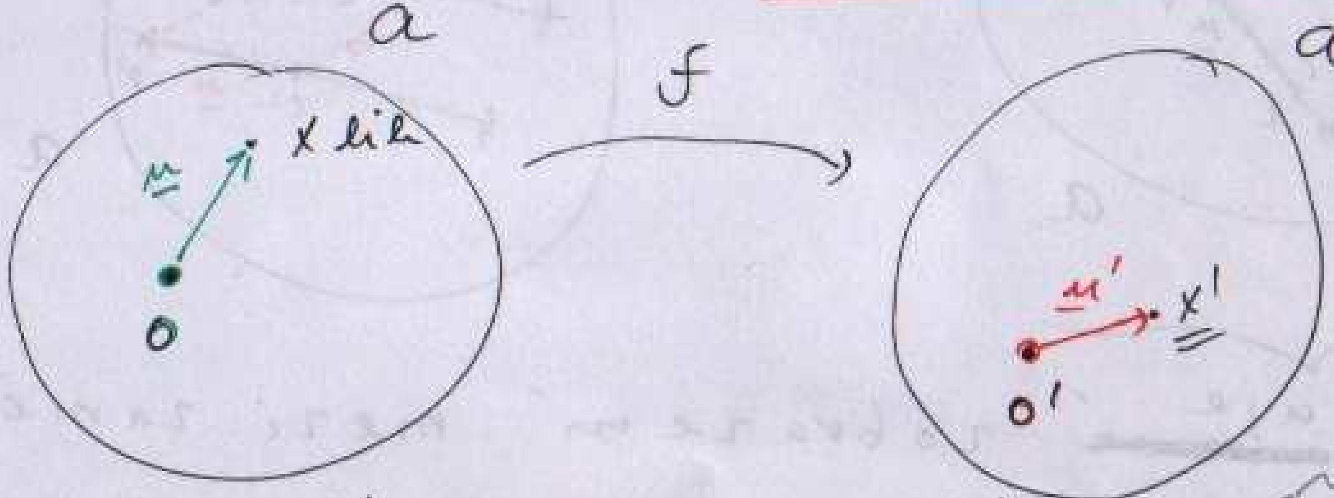


indukuje zobrazení mezi zaměřeními

$\vec{f}: \vec{a} \to \vec{a}'$, které je LINEÁRNÍ!

OPAČNĚ:

- lin. zobr. mezi $\vec{a} \to \vec{a}'$ NEURČUJE af. zobr. úplně!
- potřeba obraz JEDNOHO dalšího bodu:



$u = \vec{OX}$ $\qquad$ $u' = \vec{O'X'}$

$\vec{f}(\vec{OX}) = \vec{O'X'}$, tj.

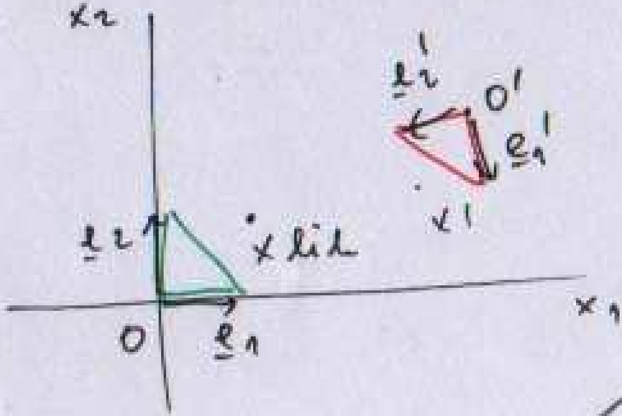
$$f : X \longmapsto \boxed{X' = O' + \vec{f}(\vec{OX})}$$

obraz JEDNOHO bodu $\qquad$ lin. část

„AFINNÍ ZOBR. = = POSUNUTÉ LINEÁRNÍ ZOBR.“

velké uvozovky

133 V SOUŘADNICÍCH



$X = [x_1, x_2]$

lin. zobr.

$X' = O' + \vec{f}(\vec{OX})$ ... $[x_1', x_2']$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}$$

obraz počátku souř. soustavy

matice lin. zobr. $\vec{f}$ vzhledem k bázi $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$,

tj. $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

souř. $\underline{e}_2'$ ....

souř. $\underline{e}_1'$ v bázi $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$

- SYMBOLICKY:

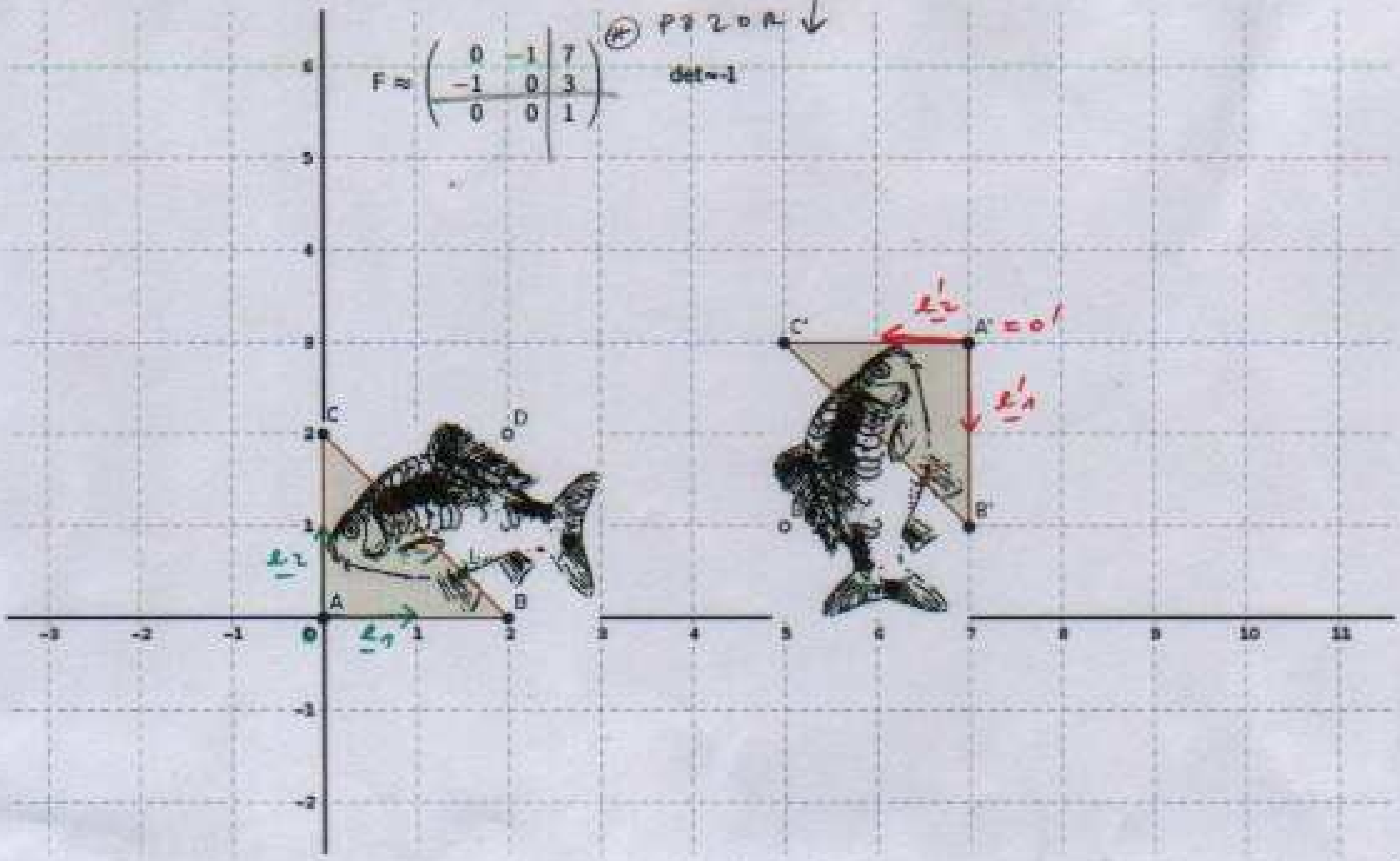
$$\boxed{X' = C + D \cdot X}$$

- POMOCÍ JEDNÉ VĚTŠÍ MATICE!

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ \hline X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \hline C & D \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \hline X \end{pmatrix}}$$!

(TO SE JEŠTĚ BUDE HODIT ...)

13/4 **1. PŘÍKLAD — SHODNOST**



⊛ ROZŠÍŘENÁ MATICE je zde (v Geogebře) organizována podle

D C

$$\text{obraz}\ \begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \hline 1\end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|c}\cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)\cdot\begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \hline 1\end{pmatrix}\ \text{vzor}$$

PŘÍMO (SNADNO) z předchozího:

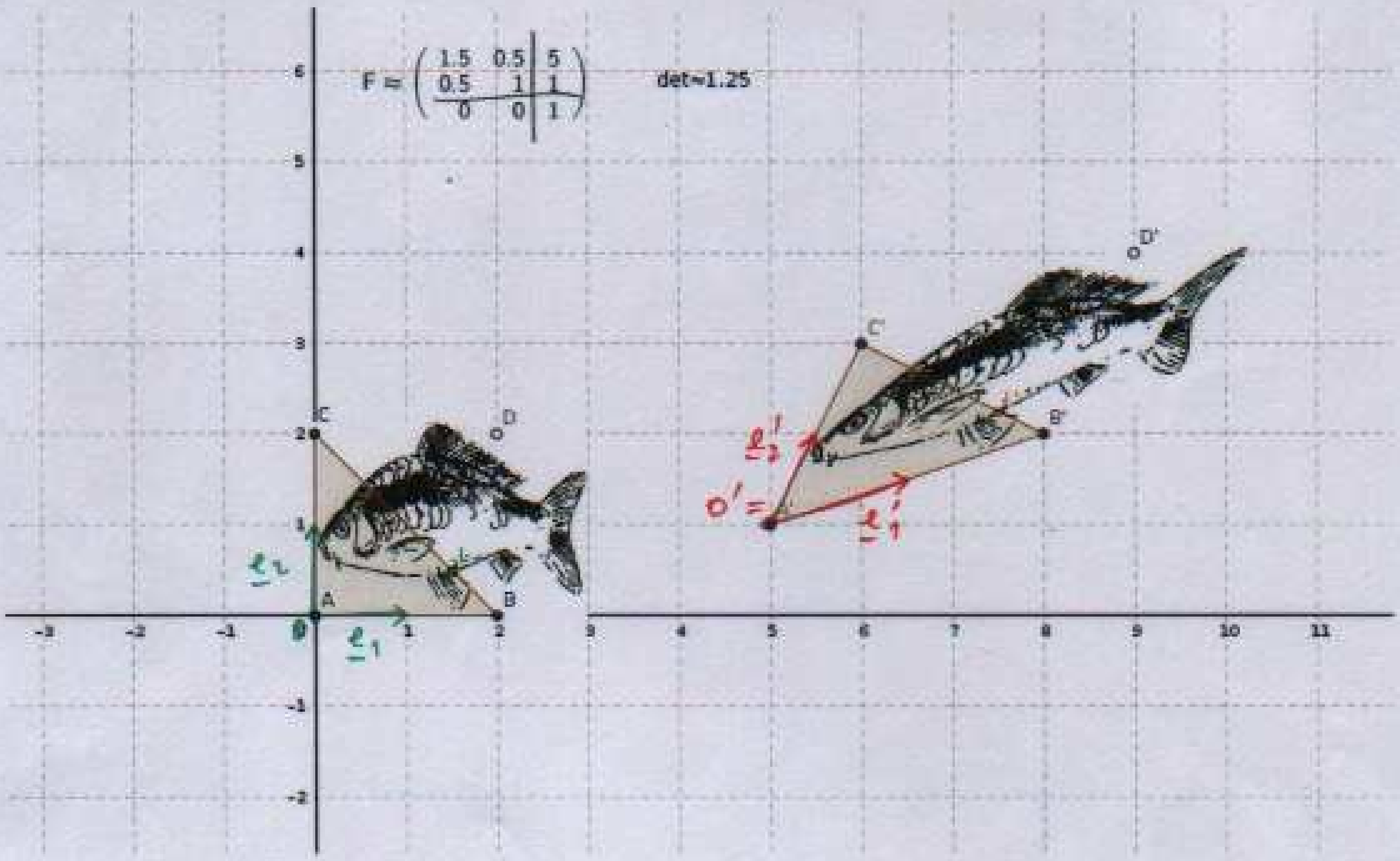
$e_1' = -e_2$

$e_2' = -e_1$

$O' = A'$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c}0 & -1 & 7\\ -1 & 0 & 3\\ \hline 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

135 2. PŘÍKLAD — obecné AFINNÍ zobr.



přímo (SNADNO) z předchozího:

$$\left.\begin{aligned} e_1 &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ e_2 &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\ O &= A \end{aligned}\right\}\quad \begin{aligned} e_1' &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{A'B'} = \tfrac{1}{2}(3,1) \\ e_2' &= \tfrac{1}{2}\overrightarrow{A'C'} = \tfrac{1}{2}(1,2) \\ O' &= A' \end{aligned}$$

$$F = \left(\begin{array}{cc|c} 3/2 & 1/2 & 5 \\ 1/2 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$