RNDr. Jiří HERMAN, Ph.D.
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

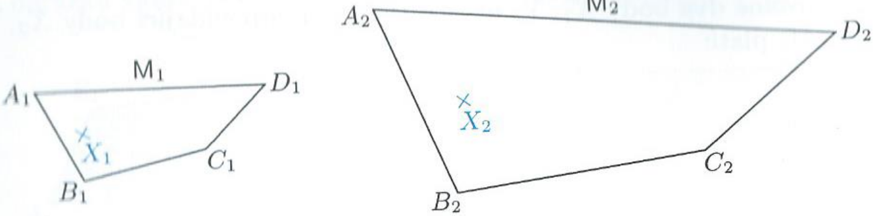
Prima
Sekunda
Tercie
Kvarta

Matematika

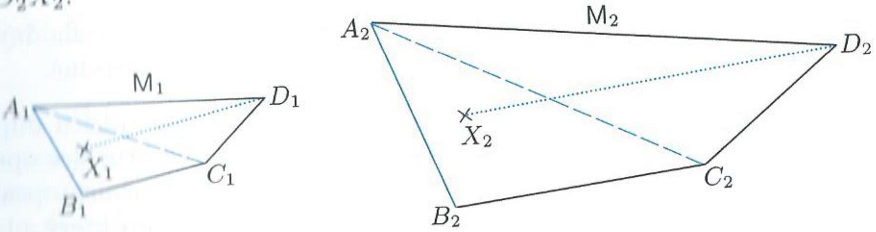
Podobnost a funkce úhlu

PROMETHEUS

Vyznačme ještě libovolný bod X_1 čtyřúhelníku M_1 a jemu odpovídající bod X_2 čtyřúhelníku M_2:



Posoudíme nyní, jakým zvětšením čtyřúhelníku M_1 je čtyřúhelník M_2. Provedeme to tak, že změříme nejprve vzdálenost některých dvou bodů čtyřúhelníku M_1 a pak vzdálenost odpovídajících bodů čtyřúhelníku M_2, například délky úseček A_1B_1 a A_2B_2 nebo A_1C_1 a A_2C_2 nebo D_1X_1 a D_2X_2:

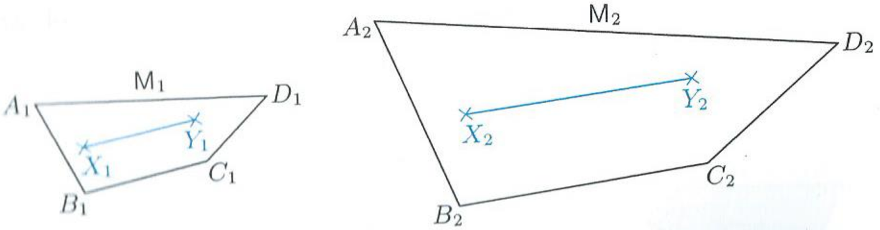


Zjistíme, že platí:

$$|A_2B_2| = 2 \cdot |A_1B_1|, \quad |A_2C_2| = 2 \cdot |A_1C_1|, \quad |D_2X_2| = 2 \cdot |D_1X_1|$$

Ve všech rovnostech vystupuje totéž číslo 2, které vyjadřuje, že čtyřúhelník M_2 je *dvojnásobným zvětšením* čtyřúhelníku M_1. Znamená to, že pro libovolné body X_1 a Y_1 čtyřúhelníku M_1 a jim odpovídající body X_2 a Y_2 čtyřúhelníku M_2 platí:

$$|X_2Y_2| = 2 \cdot |X_1Y_1|$$



Říkáme, že čtyřúhelník M_2 je *podobný* čtyřúhelníku M_1 s ***koeficientem podobnosti*** rovným číslu 2.

Kdybychom posuzovali, jakým zmenšením čtyřúhelníku M_2 je čtyřúhelník M_1, každá z rovností

$$|A_1B_1| = \tfrac{1}{2} \cdot |A_2B_2|, \quad |A_1C_1| = \tfrac{1}{2} \cdot |A_2C_2|, \quad |D_1X_1| = \tfrac{1}{2} \cdot |D_2X_2|$$

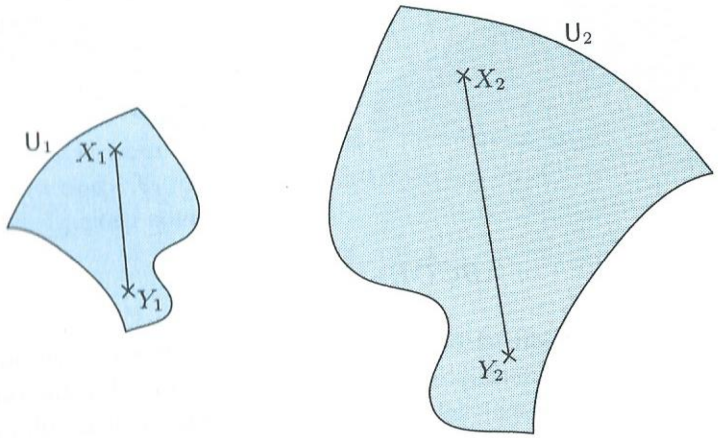
by nás přivedla k závěru, že čtyřúhelník M_1 je podobný čtyřúhelníku M_2 s koeficientem podobnosti $\frac{1}{2}$.

Řekneme, že útvar U_2 je podobný útvaru U_1, pokud lze všechny jejich body sdružit do dvojic (kterým říkáme dvojice odpovídajících si bodů) tak, že pro některé kladné číslo k platí rovnosti

$$|X_2Y_2| = k \cdot |X_1Y_1|,$$

kde X_1, Y_1 jsou libovolné body útvaru U_1 a X_2, Y_2 odpovídající body útvaru U_2.

Číslo k se nazývá koeficient podobnosti (útvaru U_2 vzhledem k útvaru U_1).

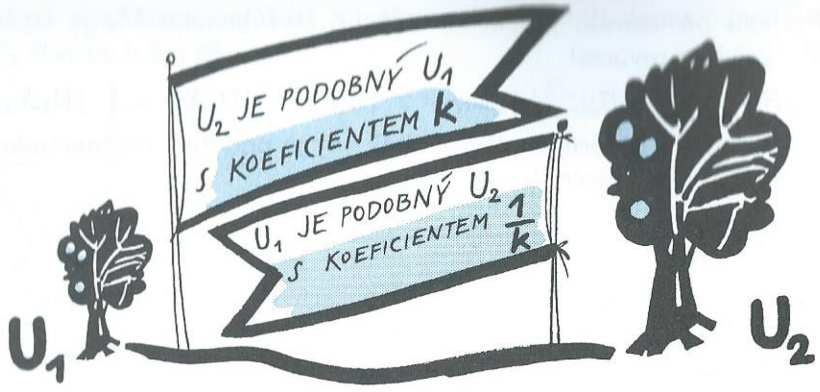


Je-li útvar U_2 podobný útvaru U_1 s koeficientem podobnosti k, je také útvar U_1 podobný útvaru U_2, a to s koeficientem podobnosti $\frac{1}{k}$.

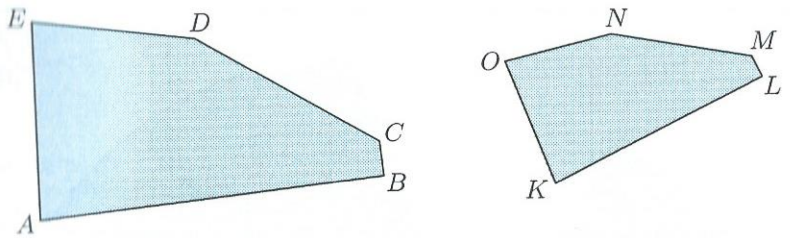
Proto stručně hovoříme o *podobných útvarech* U_1 a U_2 (aniž rozlišujeme jejich pořadí) a jejich podobnost zapisujeme pomocí symbolu $\sim$ (čti „je podobný“):

$$\mathsf{U}_1 \sim \mathsf{U}_2 \quad \text{znamená totéž co} \quad \mathsf{U}_2 \sim \mathsf{U}_1$$

Pokud však uvádíme koeficient podobnosti, musí být pořadí útvarů jasně stanoveno (často právě vazbou „*co* je podobné *čemu*“).



Dohodneme se, že při zápisu podobnosti dvou *mnohoúhelníků* pomocí jejich vrcholů a znaku $\sim$ budeme odpovídající si vrcholy zapisovat na stejných místech před i za znakem $\sim$:



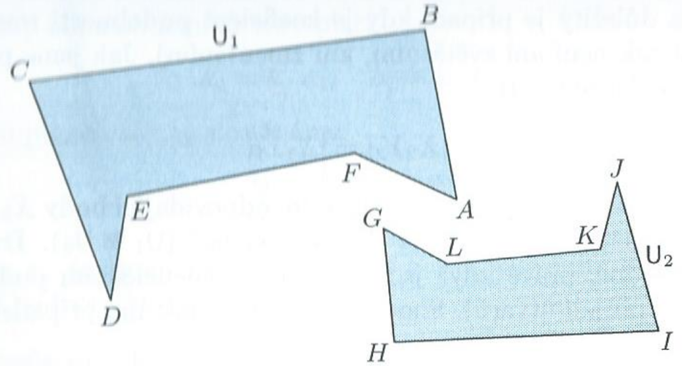
$$ABCDE \sim KLMNO$$

V našem příkladu vrcholu A odpovídá vrchol K, vrcholu B vrchol L atd. (Stejnou dohodu jsme učinili dříve při zápisu shodnosti mnohoúhelníků pomocí symbolu $\cong$.) Slovně však shodnost nebo podobnost mnohoúhelníků vyjadřujeme volněji. K předchozímu obrázku například můžeme říci, že pětiúhelník $CBAED$ je podobný pětiúhelníku $LMNOK$.

□ **3.** Útvary U_1 a U_2 na obrázku jsou podobné. Pomocí pojmenovaných bodů doplňte úměry:

a) $|HI| : |BC| = |IJ| : ?$ b) $|KL| : |EF| = ? : |AF|$

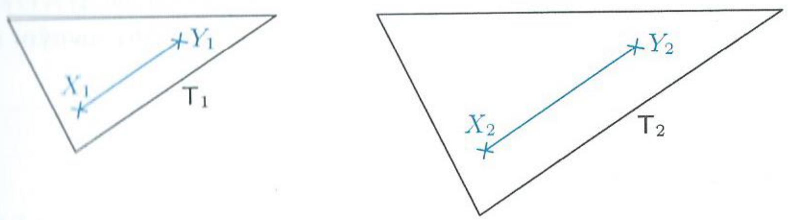
c) $|HG| : ? = |JI| : |DC|$ d) $? : |BF| = |IK| : |CE|$



?

Kdy je podobnost zvětšením a kdy zmenšením?

Na obrázku jsou narýsovány trojúhelníky T_1 a T_2.



Trojúhelník T_2 je podobný trojúhelníku T_1 s koeficientem podobnosti $\frac{3}{2}$: Pro každé dva body X_1, Y_1 trojúhelníku T_1 a jim odpovídající body X_2, Y_2 trojúhelníku T_2 platí rovnost

$$|X_2Y_2| = \tfrac{3}{2} \cdot |X_1Y_1|.$$

Znamená to, že úsečka X_2Y_2 je vždy *delší* než úsečka X_1Y_1. Proto je trojúhelník T_2 *zvětšením* trojúhelníku T_1. Můžeme také říci, že trojúhelník T_1 je *zmenšením* trojúhelníku T_2 (koeficient podobnosti je $\frac{2}{3}$).

O tom, zda je podobnost zvětšením, či zda je zmenšením, rozhoduje hodnota k koeficientu podobnosti. Je-li $k > 1$, jde o zvětšení; je-li $k < 1$, jde o zmenšení.

Předpokládejme, že útvar U_2 je podobný útvaru U_1 s koeficientem podobnosti k.

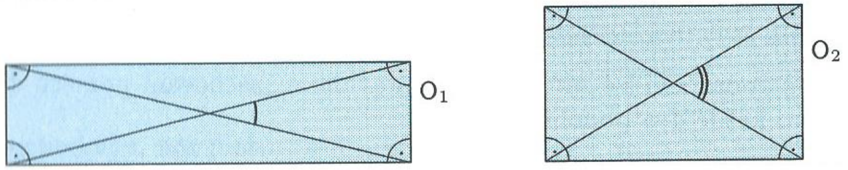
Je-li $k > 1$, je útvar U_2 zvětšením útvaru U_1.

Je-li $k < 1$, je útvar U_2 zmenšením útvaru U_1.

Pětiúhelník P_2 je dvojnásobným zvětšením pětiúhelníku P_1. Měřením se přesvědčte, že platí:

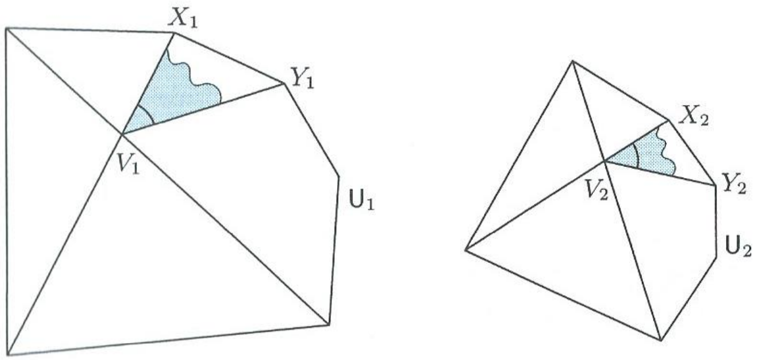
$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2, \quad \delta_1 = \delta_2, \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Také obdélníky O_1 a O_2 z dalšího obrázku mají shodné vnitřní úhly (jako ostatně každé dva obdélníky), nejsou však podobné. Liší se například v úhlech, které svírají jejich úhlopříčky.



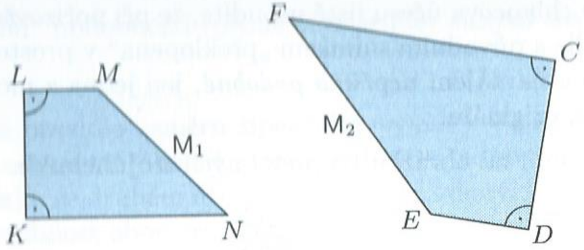
Pro každé tři body X_1, V_1, Y_1 útvaru U_1 takové, že $V_1 \neq X_1$ a $V_1 \neq Y_1$, a jim odpovídající body X_2, V_2, Y_2 podobného útvaru U_2 platí:

$$|\sphericalangle X_1V_1Y_1| = |\sphericalangle X_2V_2Y_2|$$



□ **6.** Na obrázku jsou podobné čtyřúhelníky M_1 a M_2. Pomocí pojmenovaných bodů doplňte úměry:

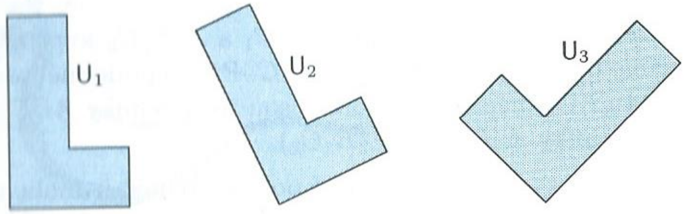
a) $|MN| : |ML| = |EF| : ?$ b) $|LK| : ? = |DC| : |ED|$
c) $|EC| : |FD| = |MK| : ?$ d) $|CE| : |CF| = ? : |KN|$



?

Co je *přímá* a *nepřímá* podobnost?

Nejprve připomeňme, které dva útvary se nazývají *přímo* shodné a které *nepřímo* shodné. Na obrázku vidíte tři shodné útvary U_1, U_2 a U_3.



Útvary U_1 a U_2 jsou přímo shodné. Útvar U_1 stačí totiž „natočit“ a „posunout“ v rovině tak, aby se kryl s útvarem U_2.

Přemísťováním v rovině však nikdy nedosáhneme toho, aby se kryly útvary U_1 a U_3 (i když jsou, jak jsme uvedli, shodné). K tomu potřebujeme přemísťovaný útvar „překlopit“ v prostoru. Útvary U_1 a U_3 jsou nepřímo shodné.

Podobným způsobem budeme rozlišovat *přímo podobné* a *nepřímo podobné* útvary.

Z jednoho portrétu chlapce byly zhotoveny dvě zmenšeniny:

10. Rozhodněte, zda existují dva obdélníky, které mají stejné obsahy a které

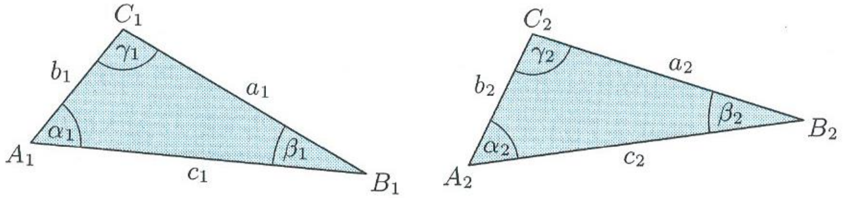
a) jsou podobné,
b) jsou podobné a nejsou shodné.

2 PODOBNÉ TROJÚHELNÍKY

V této kapitole se budeme věnovat důležité otázce – kdy jsou podobné dva trojúhelníky. Výsledky výkladu shrneme do několika vět, které jsou obdobami známých tvrzení o shodnosti dvou trojúhelníků. Proto všechny běžné věty o shodnosti trojúhelníků nejprve připomeneme.

? Kdy jsou dva trojúhelníky *shodné*?

Na obrázku jsou narýsovány dva shodné trojúhelníky $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ a obvyklým způsobem jsou označeny jejich strany a vnitřní úhly.

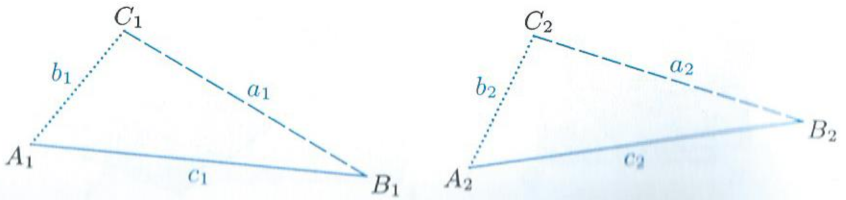


Víme, že platí šest rovností:

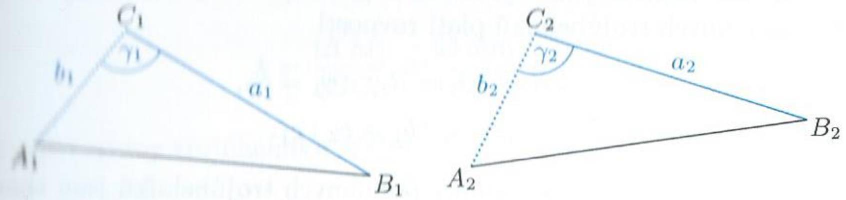
$$a_1 = a_2, \quad b_1 = b_2, \quad c_1 = c_2$$
$$\alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2, \quad \gamma_1 = \gamma_2$$

Představme si opačnou situaci. Máme rozhodnout o shodnosti dvou daných trojúhelníků. Přitom víme, že pro ně platí pouze *některé* z uvedených šesti rovností. Kdy máme zaručeno, že trojúhelníky jsou skutečně shodné? Víme, že je to v případech, kdy platí *tři* vhodně vybrané rovnosti:

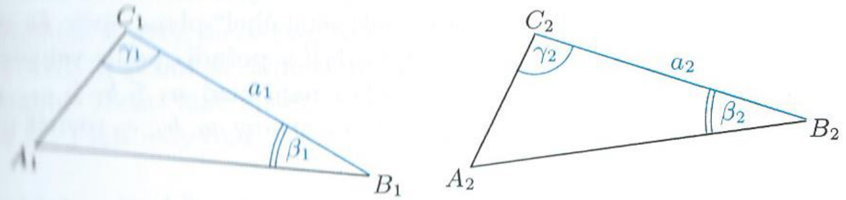
- $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$ (věta **sss**)



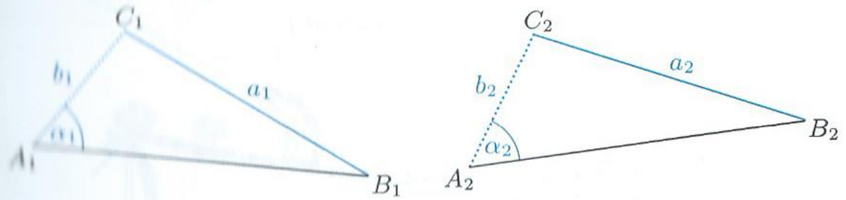
- $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ (věta **sus**)



- $a_1 = a_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$ (věta **usu**)

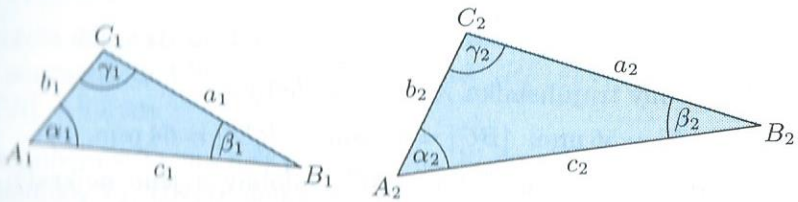


- $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, jestliže navíc $a_1 > b_1$ (věta **Ssu**)



11. Každou z vět o shodnosti trojúhelníků vyslovte, aniž použijete označení stran a úhlů (pomozte si výrazy „sevřený úhel“ apod.).

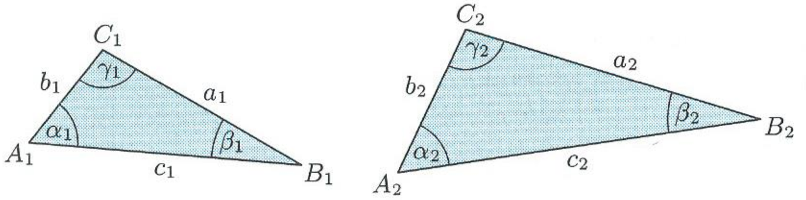
? Jaké vlastnosti mají strany a úhly podobných trojúhelníků?



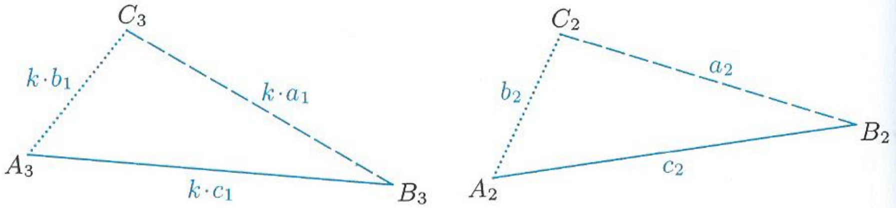
Narýsovali jsme dva podobné trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. I když jsme dosud mluvili pouze o odpovídajících si *bodech* podobných trojúhelníků, budeme také říkat, že si odpovídají jejich *strany* a *vnitřní úhly*. Například

? Co stačí k podobnosti trojúhelníků?

Nyní budeme hledat podmínky, které zaručují podobnost dvou trojúhelníků $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$. Jejich strany a vnitřní úhly označíme běžným způsobem:



Budeme postupovat tak, že jeden z trojúhelníků, například $A_1B_1C_1$, nejprve zvětšíme nebo zmenšíme s jistým koeficientem k, který určíme později. (Číslo k bude rovno koeficientu podobnosti trojúhelníku $A_2B_2C_2$ vzhledem k trojúhelníku $A_1B_1C_1$, pokud to vůbec jsou podobné trojúhelníky.) Získáme tak „pomocný“ trojúhelník $A_3B_3C_3$ podobný trojúhelníku $A_1B_1C_1$ ($\triangle A_3B_3C_3 \sim \triangle A_1B_1C_1$). Poté budeme vypisovat různé podmínky, kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$. Tehdy totiž bude platit $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$. Použijeme k tomu postupně známé věty o shodnosti trojúhelníků – větu *sss*, větu *usu* a větu *sus*.



- Kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$ podle věty *sss*?

Víme, že je to v případě, kdy současně platí tři rovnosti:

$$ka_1 = a_2, \quad kb_1 = b_2, \quad kc_1 = c_2$$

Pro číslo k odtud dostáváme podmínky:

$$k = \frac{a_2}{a_1}, \quad k = \frac{b_2}{b_1}, \quad k = \frac{c_2}{c_1}$$

To lze splnit pouze v případě, kdy platí

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}\,.$$

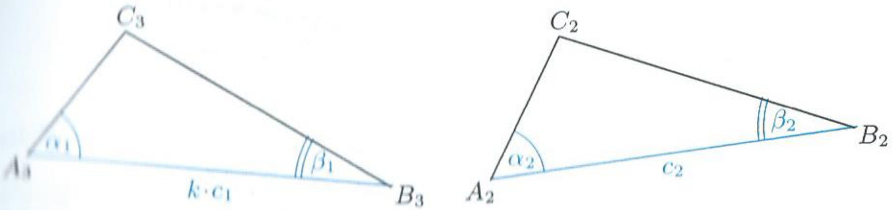
Za této podmínky jsou trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ podobné.

Odvodili jsme tak tvrzení, které se nazývá **věta *sss* o podobnosti trojúhelníků**.

> Jestliže pro trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ platí rovnosti
>
> $$\frac{|A_2B_2|}{|A_1B_1|} = \frac{|B_2C_2|}{|B_1C_1|} = \frac{|C_2A_2|}{|C_1A_1|}\,,$$
>
> pak jsou tyto trojúhelníky podobné: $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2$

- Kdy platí $\triangle A_3B_3C_3 \cong \triangle A_2B_2C_2$ podle věty *usu*?

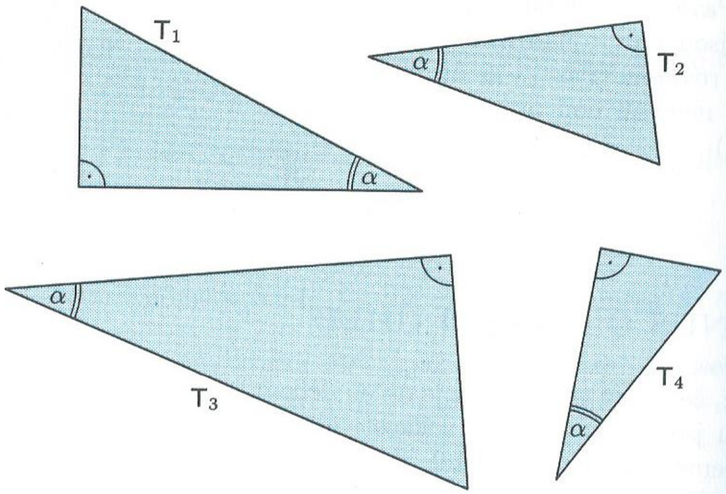
Je to tehdy, když se oba trojúhelníky shodují v jedné straně a obou k ní přilehlých vnitřních úhlech, například:



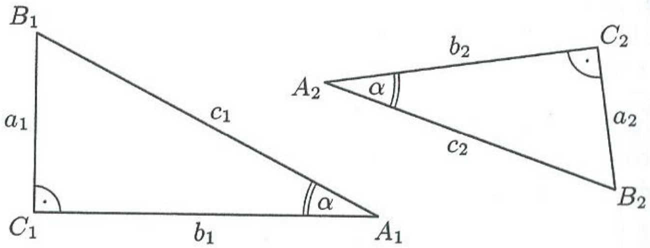
$$kc_1 = c_2, \quad \alpha_1 = \alpha_2, \quad \beta_1 = \beta_2$$

? Co je *sinus* ostrého úhlu?

Na obrázku vidíte čtyři pravoúhlé trojúhelníky T_1, T_2, T_3 a T_4 se shodným vnitřním úhlem α:



Podle věty *uu* jsou všechny čtyři trojúhelníky T_1, T_2, T_3 a T_4 navzájem podobné. Vyberme libovolné dva z nich, např. T_1 a T_2, a popišme obvyklým způsobem jejich strany a vrcholy:



Víme, že poměry odpovídajících si stran jsou stejné:

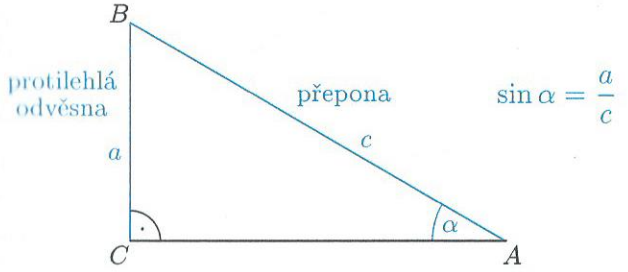
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Rovnost „krajních“ zlomků $\frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2}$ můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2}.$$

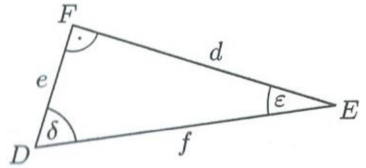
Na levé straně této rovnosti je poměr délek dvou stran trojúhelníku T_1, na pravé straně poměr délek dvou stran trojúhelníku T_2. V obou případech jde o poměr odvěsny protilehlé úhlu α a přepony.

Zjistili jsme, že ve všech pravoúhlých trojúhelnících se stejným ostrým vnitřním úhlem α má *poměr odvěsny protilehlé úhlu α a přepony* stejnou hodnotu. Tato hodnota tedy závisí pouze na velikosti úhlu α. Říkáme jí **sinus úhlu α** a značíme $\sin\alpha$ (čti „sinus alfa“).



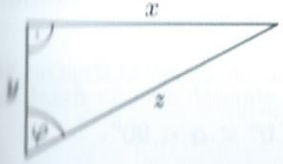
Jak vysvětluje původ názvu *sinus* většina historiků matematiky? Staří Indové používali pro tětivu luku nebo kružnice slovo *džíva*. Od Indů ho převzali Arabové, kteří toto cizí slovo zapisovali ve svých spisech stejně jako arabské slovo *džajb* (v arabštině se totiž nezapisují samohlásky), které má více významů: záliv, ňadra, výstřih, vypuklost apod. Jeden z těchto významů má i latinské slovo *sinus*, které tak při překladu arabských textů do latiny uplatnil *Robert z Chesteru* kolem r. 1145. Podle jiného názoru vzniklo slovo sinus z latinské zkratky *s.ins.* pro spojení *semis inscripta* znamenající *půl tětivy*.

1. Zapište sinus úhlů δ a ε pomocí délek stran trojúhelníku DEF:

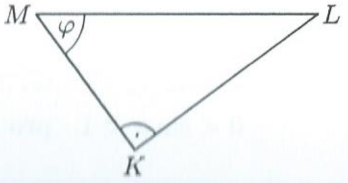


2. Zapište sinus úhlu φ pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a)



b)



5 KOSINUS OSTRÉHO ÚHLU

V minulé kapitole jsme se seznámili se sinem ostrého úhlu jako s poměrem odvěsny protilehlé tomuto úhlu a přepony pravoúhlého trojúhelníku.

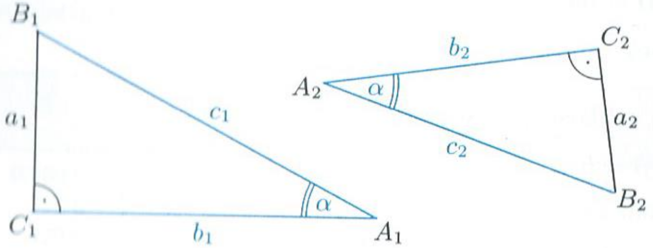
Takovou funkci ostrého úhlu jsme mohli definovat díky tomu, že každé dva pravoúhlé trojúhelníky se stejným ostrým vnitřním úhlem jsou podobné.

Významnou úlohu v matematice hrají i funkce úhlu určené jinými poměry stran pravoúhlého trojúhelníku. V této kapitole se budeme zabývat poměrem přilehlé odvěsny a přepony, v následující kapitole pak poměrem odvěsen. Výklad v obou kapitolách povedeme obdobně jako v kapitole předchozí, proto budeme místy stručnější.

?

Co je *kosinus* ostrého úhlu?

Na obrázku jsou pravoúhlé trojúhelníky $A_1B_1C_1$ a $A_2B_2C_2$ se stejným vnitřním úhlem α. Kromě úhlu α jsou v obou trojúhelnících modře vyznačeny přilehlé odvěsny a přepony.



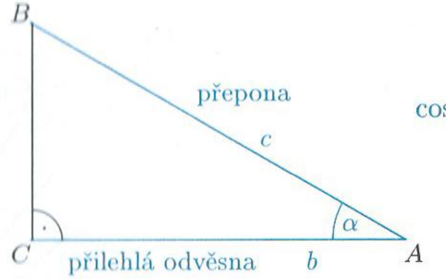
Z podobnosti obou trojúhelníků plyne rovnost

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2},$$

kterou přepíšeme do tvaru

$$\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2}.$$

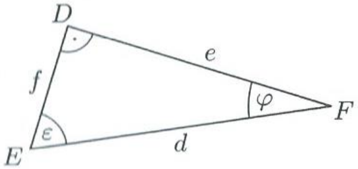
Znamená to, že v obou trojúhelnících má *poměr odvěsny přilehlé úhlu α a přepony* stejnou hodnotu, která závisí pouze na velikosti úhlu α. Říkáme mu **kosinus úhlu α** a značíme $\cos\alpha$ (čti „kosinus alfa“).



$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

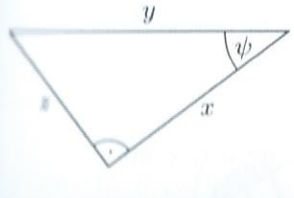
Staří Indové nazývali kosinus slovem *kótidživa* (předpona *kóti* znamená *zbytek*, v tomto případě doplněk do 90°). Podle toho se v Evropě v 15. století ujal pro kosinus latinský název *sinus complementi*, tj. sinus doplňku. Změnou pořadí obou slov a zkrácením vznikl termín *cosinus*. Setkáváme se s ním poprvé v roce v r. 1620 u anglického astronoma E. Guntera.

1. Zapište kosinus úhlů ε a φ pomocí délek stran trojúhelníku DEF:



2. Zapište kosinus úhlu ψ pomocí délek stran trojúhelníku z obrázku:

a)



b)