RNDr. Jiří HERMAN
PaedDr. Vítězslava CHRÁPAVÁ
Mgr. Eva JANČOVIČOVÁ
Doc. RNDr. Jaromír ŠIMŠA, CSc.

PROMETHEUS

Prima
Sekunda
Tercie

Matematika

Osová a středová souměrnost

JČ
m+f

ÚVOD

Víme již, jak vypadají a čím jsou určeny základní geometrické *útvary*, jako jsou přímka, úsečka, trojúhelník, čtverec, kruh, krychle, jehlan apod. Považujeme je za *množiny bodů* příslušné roviny nebo prostoru.

V tomto a několika dalších sešitech se postupně seznámíme s důležitými vzájemnými vztahy, jaké vznikají mezi několika útvary ležícími v jedné rovině. Takové vztahy pro nás nejsou úplnou novinkou: víme už například, co znamená, že dvě přímky jsou rovnoběžné, že dva úhly jsou vrcholové apod.

Není pochyb o tom, že při „pozorování" útvarů a při jejich srovnávání považujeme za základní zjištění, že dva útvary ležící na různých místech roviny jsou „stejné". V geometrii jim říkáme *shodné útvary.* Takové jsou ty dvojice útvarů, které můžeme vhodným *pohybem* přemístit tak, aby se kryly.

Můžeme rozhodnout o shodnosti dvou útvarů, aniž bychom je přemísťovali? Jinými slovy, jaké podmínky zaručují, že dva útvary jsou shodné? S trochou nadsázky můžeme říci, že odpovědi na tuto otázku tvoří hlavní náplň geometrie starého Řecka, kterou podle jejího tvůrce Eukleida nazýváme *eukleidovskou geometrií.*

Abychom dovedli se shodnými útvary dobře pracovat, musíme vědět, jaké základní *pohyby v rovině* existují a jaké vlastnosti tyto pohyby mají. V tomto sešitě se seznámíme se dvěma z nich – s osovou a středovou souměrností. Začneme vždy s pozorováním *souměrných* útvarů, teprve pak vyložíme *souměrnost* jako přemístění v rovině. Přitom se naučíme konstruovat obrazy základních útvarů v těchto souměrnostech.

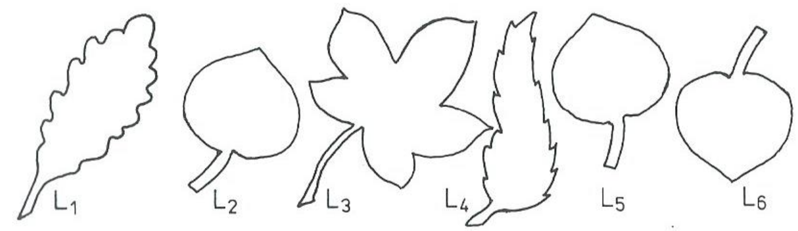
Dodejme ještě, že osová i středová souměrnost se uplatňují i mimo matematiku v řadě praktických oborů. Obě souměrnosti využívají chemici při popisu krystalů různých prvků a nerostů. Prvky souměrnosti uplatňují ve svých projektech architekti, malíři i jiní výtvarní umělci, můžeme je pozorovat v přírodě u některých rostlin a živočichů.

1 SHODNOST V ROVINĚ

V této kapitole vysvětlíme, co v matematice znamená, že dva **rovinné** geometrické útvary jsou shodné.

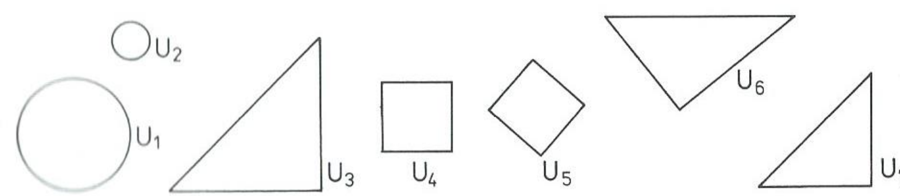
Co jsou *shodné útvary*?

Prohlédněte si pozorně obrázky několika listů stromů:



Některé listy jsou „stejné" – mají stejný „tvar" i „velikost", liší se pouze svým umístěním. O takových listech říkáme, že jsou **shodné**. Na obrázku jsou to listy L_2, L_5 a L_6. Můžeme si představit, že obrysy všech tří vznikly „obkreslením" jediného listu.

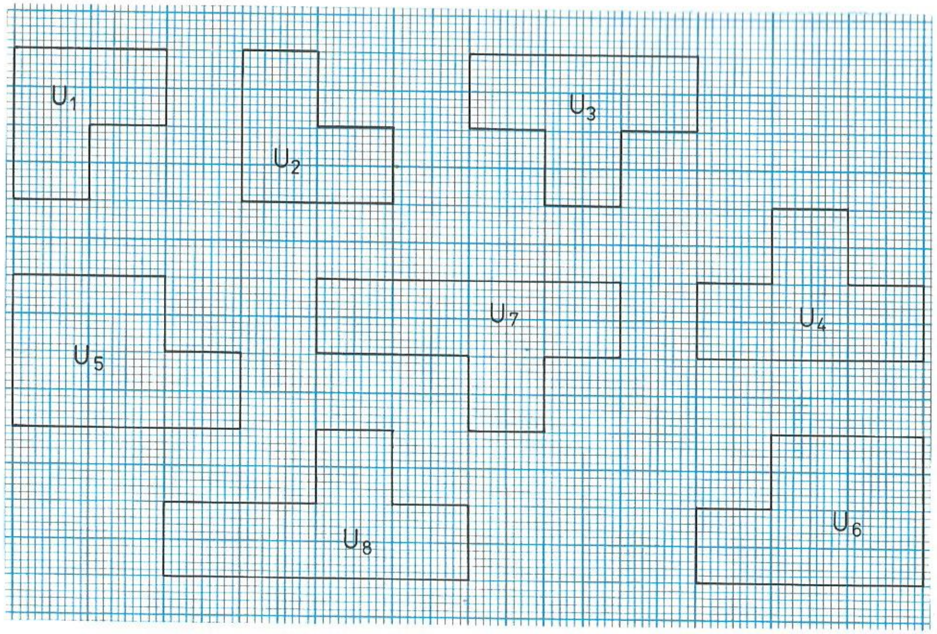
Na dalším obrázku je několik geometrických útvarů:



Sami jistě snadno usoudíte, že shodné by mohly být pouze čtverce U_4 a U_5. Jak se o tom přesvědčíte? Zatím jen tak, že pomocí průsvitného papíru porovnáte jejich obrysy. Vyzkoušejte to.

Jinou metodu pro zjišťování shodnosti útvarů uplatníte při řešení této úlohy:

Nakreslete na milimetrový papír útvary podle obrázku:



Vystřihněte je a přikládejte k sobě. Zjistíte, že shodné jsou pouze tyto útvary:

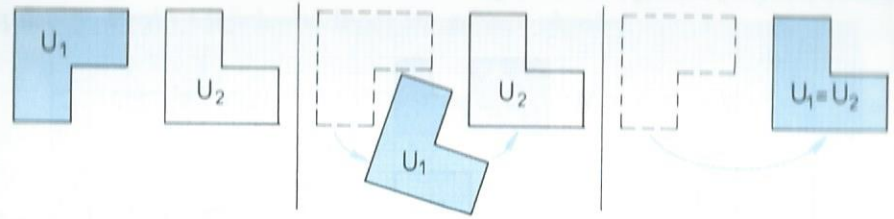
U_1 a U_2; U_3 a U_4; U_5 a U_6; U_7 a U_8.

> Dva rovinné útvary jsou shodné, jestliže je můžeme přemístit tak, aby se kryly. Několik útvarů je shodných, jsou-li každé dva z nich shodné.

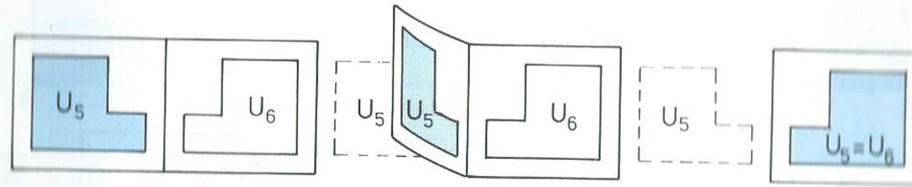
Máme-li rozhodnout, zda dva útvary jsou shodné, stačí obkreslit a vystřihnout jen jeden z nich a zkoušet ho přiložit k druhému útvaru tak, aby s ním splynul.

Některé útvary stačí při takovém přemístění pouze „posunout“ a „natočit“ v rovině. V takovém případě hovoříme o **přímo shodných** útvarech.

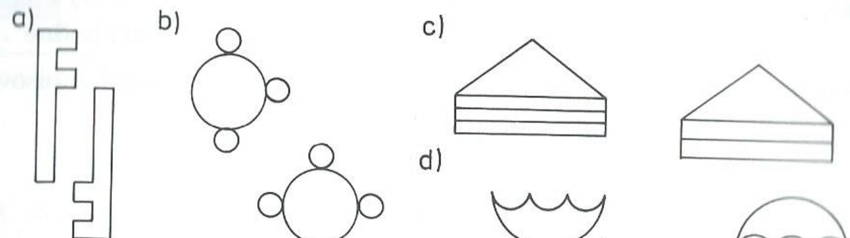
Příkladem jsou útvary U_1 a U_2 z předchozího obrázku.



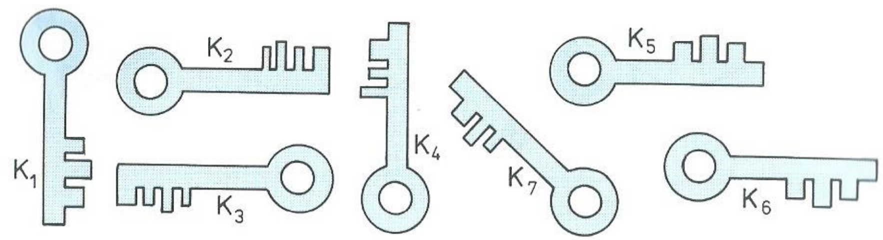
Přemísťováním v rovině však nikdy nedosáhneme toho, aby se kryly shod útvary U_5 a U_6. K tomu potřebujeme navíc jeden útvar (např. U_5) „př klopit“ v prostoru, jak je naznačeno na obrázku. Takovým útvarům říkám **nepřímo shodné**.



□ **1.** Mezi dvojicemi útvarů na obrázku najděte ty, které tvoří útvary, j nejsou shodné.



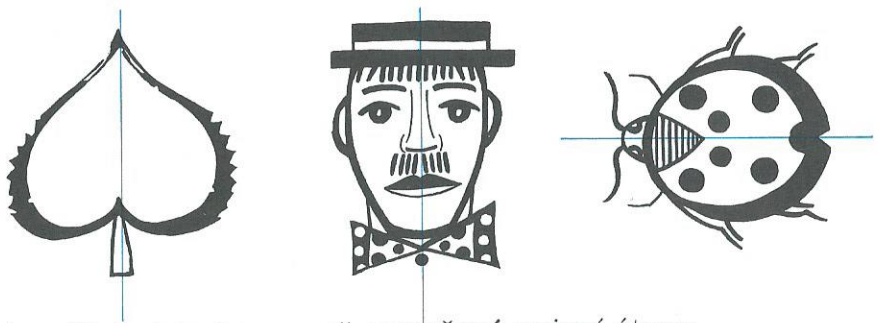
2. Mezi klíči na obrázku najděte shodné.



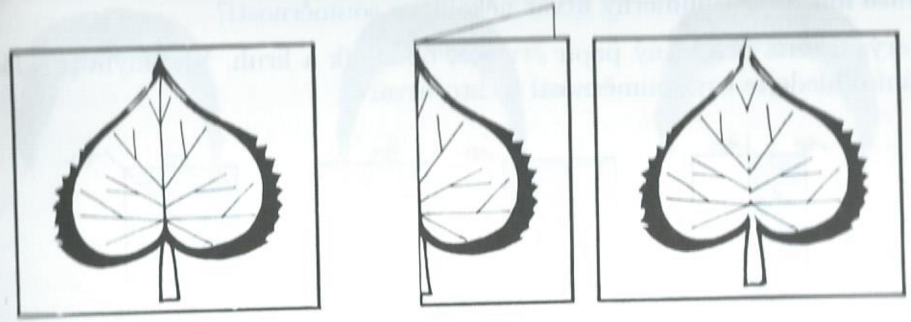
Co je osově souměrný útvar?

Následující obrázky si prohlížejte pomocí zrcátka. Přiložte je ke každému z nich tak, abyste celý obrázek sestavili z jeho nezakryté části a obrazu této části v zrcátku.

Zrcátko se dotýká roviny, ve které obrázek leží, v části přímky, které říkáme **osa souměrnosti** tohoto obrázku. Osy souměrnosti jsou na dalším obrázku vyznačeny modře.



Všechny tři obrázky jsou **osově souměrné** rovinné útvary.
Přesvědčit se o tom můžeme i bez zrcátka, jen pomocí průsvitného papíru. Obkreslete na něj postupně všechny útvary. Překládejte průsvitku tak, abyste přeložením „rozdělili" obkreslený útvar na dvě části, které se po přeložení kryjí. Zkontrolujte, že tímto přeložením jste na průsvitce vyznačili přímku, která je osou souměrnosti daného útvaru.



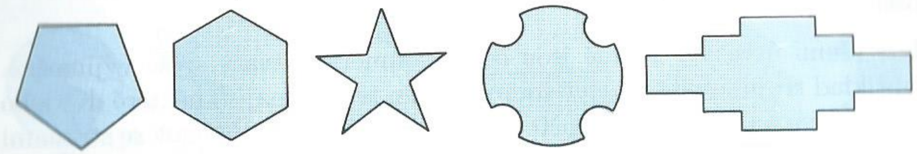
Osově souměrný útvar se skládá ze dvou shodných částí oddělených přímkou – **osou souměrnosti**. „Přehneme-li" rovinu podle této přímky, obě shodné části se kryjí.

Souměrnost se cizím slovem řekne *symetrie* (slovo řeckého původu, které znamená také soulad mezi částmi celku). Proto se také někdy hovoří o *osově symetrických* útvarech. Ose souměrnosti se říká *osa symetrie*.

Opakem symetrie je *asymetrie* – nesouměrnost, nesoulad.

□ **1.** Rozhlédněte se kolem sebe a jmenujte příklady předmětů, které by na fotografii měly osově souměrný tvar.

□ **2.** Pomocí zrcátka najděte aspoň jednu osu souměrnosti každého útvaru z obrázku.

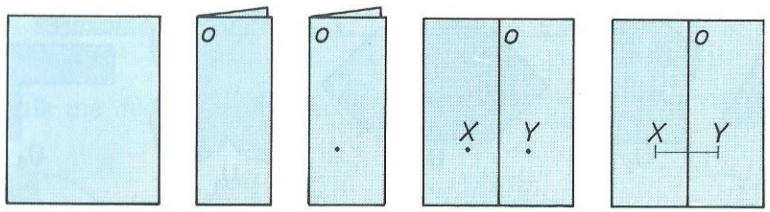


4 OSOVÁ SOUMĚRNOST

V minulé kapitole jsme vysvětlili, že osově souměrný útvar se skládá ze dvou „stejných“ částí, které se po „přeložení“ roviny podle osy souměrnosti překryjí. Každé dva body, které se při tomto překrytí ztotožní, tvoří tzv. dvojici *bodů souměrně sdružených podle osy.* Naučíme se nyní, jak takové dvojice určovat, aniž bychom museli rovinu „přehýbat“.

? Co platí pro dvojici bodů souměrně sdružených podle osy?

Narýsujte na průsvitný papír obdélník a vyznačte jeho osu souměrnosti o. Pomocí hrotu kružítka nebo špendlíku vyznačte jednu dvojici souměrně sdružených bodů X a Y podle osy o. Zkoumejte polohu úsečky XY a osy o.

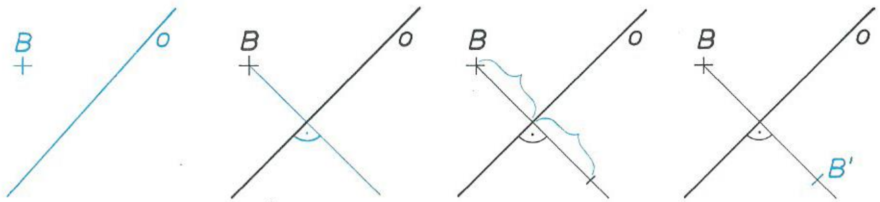


Je vidět, že úsečka XY je kolmá k ose o a osa o prochází středem této úsečky. Proto je osa o také osou úsečky XY.

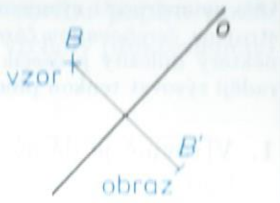
Objevili jsme základní vlastnost osové souměrnosti, která nám umožňuje jednoduše konstruovat dvojice souměrně sdružených bodů.

Příklad 1. V rovině je dána přímka o a bod B, který na ní neleží. Sestrojte bod B', který je s bodem B souměrně sdružený podle osy o.

Řešení. Protože osa o je osou úsečky BB', leží bod B' na polopřímce s počátkem B, která osu o protíná a je k ní kolmá. Zároveň průsečík této polopřímky a osy o je středem úsečky BB'. Postup konstrukce je patrný z obrázků:



Bod B' nazýváme *obrazem* bodu B v osové souměrnosti s osou o. Bod B se nazývá *vzor* bodu B' v této osové souměrnosti. Symbolicky zapisujeme:



$$O(o):\ B \mapsto B'$$

a někdy také čteme: „V osové souměrnosti s osou o se bod B zobrazí do bodu B'.“

Určíme ještě obraz bodu B' v této osové souměrnosti. Je jím bod B (vysvětlete). Zapíšeme to takto:

$$O(o):\ B' \mapsto B$$

Pro osovou souměrnost tedy platí: je-li bod Y obrazem bodu X, je také bod X obrazem bodu Y. Proto stručně hovoříme o souměrně sdružených bodech X, Y a nerozlišujeme, který z nich je vzor a který obraz.

Zjistíme ještě, kde leží obraz C' bodu C v případě, kdy bod C leží na ose souměrnosti. Přeložením průsvitného papíru s vyznačenou osou souměrnosti a libovolným bodem C této osy ověřte, že body C a C' splynou: $C = C'$.

Každý bod, který splývá se svým obrazem, se nazývá **samodružný bod** dané osové souměrnosti.

Zjistili jsme, že *každý* bod osy o je samodružným bodem osové souměrnosti s osou o. Žádné jiné samodružné body osová souměrnost nemá.

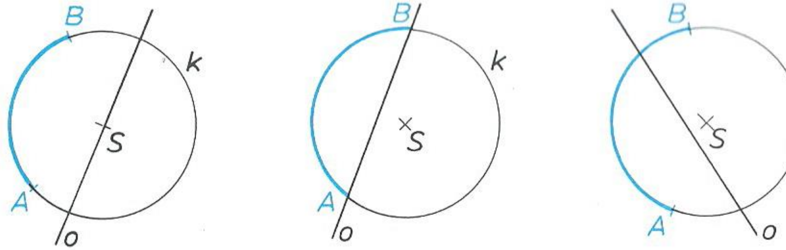
Vysvětlili jsme, jak k libovolnému bodu roviny určit jeho obraz v osové souměrnosti. Naše poznatky shrneme:

Osová souměrnost v rovině je určena přímkou o – osou souměrnosti.
Pro obraz Y libovolného bodu X roviny platí:

- Pokud bod X leží na ose o, pak Y splývá s X. Všechny body osy o jsou samodružné.
- Pokud bod X neleží na ose o, je přímka XY kolmá k ose o a střed úsečky XY leží na ose o.

Body X a Y se nazývají souměrně sdružené podle osy o.

8. Narýsujte kružnici k a barevně na ní vyznačte oblouk AB. Sestrojte obraz oblouku AB v osové souměrnosti s osou o. Vzájemnou polohu oblouku AB a osy o volte podle obrázku.



9. Narýsujte dvě různoběžky p, q. Útvar $p \cup q$ má dvě osy souměrnosti. Sestrojte je a určete, jaký úhel svírají.

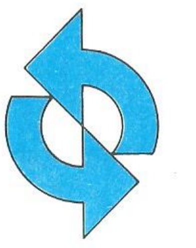
∗10. Narýsujte osově souměrný
a) trojúhelník, b) pětiúhelník, c) sedmiúhelník.

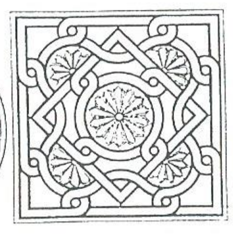
∗11. Kolik os souměrnosti má každá
a) úsečka, b) polopřímka, c) přímka?

∗12. Z papíru vystřihněte obrazec, který má
a) právě jednu osu souměrnosti,
b) právě dvě osy souměrnosti, a není to obdélník,
c) právě tři osy souměrnosti.

6 STŘEDOVĚ SOUMĚRNÉ ÚTVARY

Některé útvary nám připadají souměrné, i když nemají žádnou osu souměrnosti. Prohlédněte si následující obrázky karty, značky a dvou ornamentů.





Budete-li je pozorovat se zrcátkem, zjistíte, že osově souměrné nejsou, i kdy je každý z nich složen ze dvou stejných polovin. Jsou to příklady *středo souměrných* útvarů. Vysvětlíme, v čem spočívá jejich souměrnost.

Co je středově souměrný útvar?

Překreslete si na průsvitný papír jednu ze šipek z obrázku značky a papírem pohybujte tak, aby splynula s druhou šipkou. Dokážete vyjádřit, jaký jednoduchý pohyb k tomu stačí?

Je to otočení o 180° kolem středu obrázku.

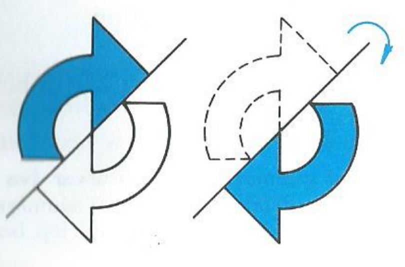
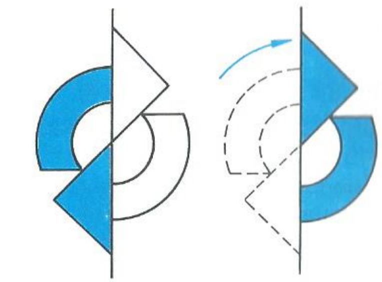
Podobnou vlastnost mají i útvary na ostatních obrázcích. Otočíte-li učeb nici „vzhůru nohama“, uvidíte stejné obrázky jako před otočením. Aby oto čený obrázek byl přesně na místě původního, musíte učebnici otočit kole bodu, který nazveme *středem* daného útvaru.

Útvarům s touto vlastností říkáme *středově souměrné.*

Útvar U nazveme **středově souměrným**, pokud existuje takový bod S, že při otočení o 180° kolem bodu S přejde útvar U sám v sebe. Bod S se nazývá **střed souměrnosti** útvaru U.

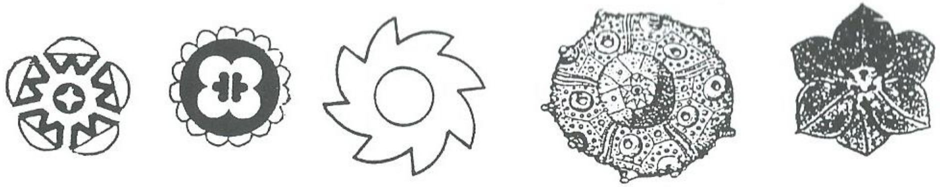
Vzpomeňte si, že *osově souměrný* útvar se skládá ze dvou shodných částí oddělený osou souměrnosti, které po „přehnutí“ roviny splynou.

Rozdělení *středově souměrného* útvaru na dvě shodné části, které splynou po otočení k lem středu souměrnosti, je možné nekonečně mnoha způsoby. Za „dělicí“ přímku můžen totiž vzít libovolnou přímku procházející středem souměrnosti:

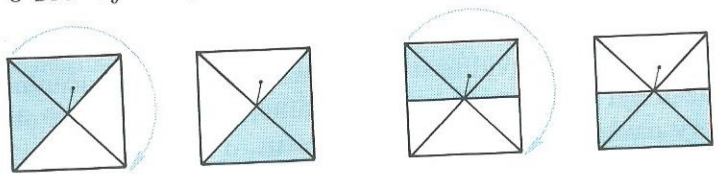
□1. Které z následujících obrázků jsou středově souměrné?

a) b) c) d) e)

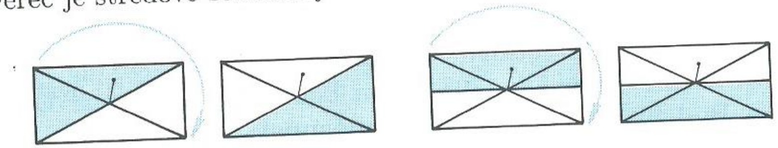


? Které útvary jsou středově souměrné?

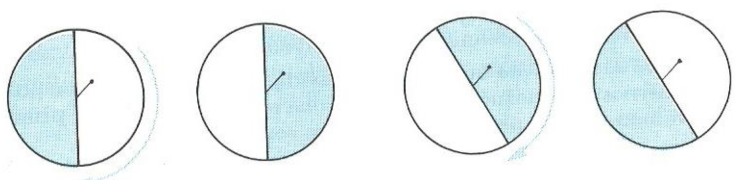
Narýsujte na papír čtverec, obdélník, kruh a trojúhelník se stejně dlouhými stranami. Obkreslete je na průsvitný papír a pomocí špendlíku a otáčení průsvitky o 180° zjistěte, zda jsou středově souměrné.



- Čtverec je středově souměrný. Střed souměrnosti je průsečík úhlopříček.



- Obdélník je středově souměrný. Střed souměrnosti je průsečík úhlopříček.



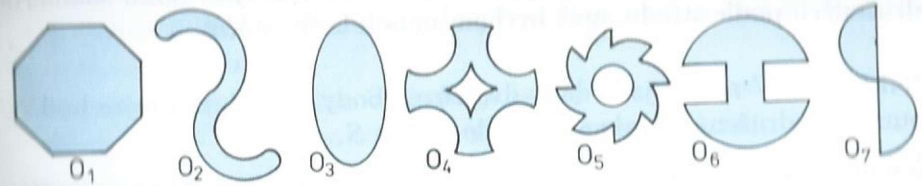
- Kruh je středově souměrný. Střed souměrnosti je střed kruhu.

Trojúhelník se vám požadovaným způsobem otočit nepodaří. Trojúhelník je příkladem útvaru, který středově souměrný není.

Většina středově souměrných útvarů má *jediný* střed souměrnosti. Má-li útvar dva různé středy souměrnosti, pak jich má *nekonečně mnoho*. Příkladem středově souměrného útvaru, který má nekonečně mnoho středů souměrnosti, je *přímka*. Každý její bod je totiž jejím středem souměrnosti.

□2. Najděte ve svém okolí předměty, které by na fotografii měly středově souměrný tvar.

□3. Pomocí průsvitky zjistěte, které z následujících útvarů jsou středově souměrné.



4. Které z následujících útvarů jsou středově souměrné?
   a) úsečka b) polopřímka c) rovina d) polorovina

5. Která z velkých tiskacích písmen A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y, Z lze nakreslit tak, aby měla středově souměrný tvar?

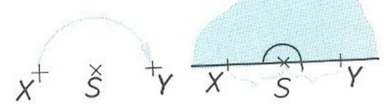
7 STŘEDOVÁ SOUMĚRNOST

Víme již, že středově souměrný útvar lze přímkou, která prochází středem souměrnosti, rozdělit na dvě části. Otočíme-li jednu část kolem středu souměrnosti o 180°, splyne s částí neotočenou. Prohlédněme si znovu obrázek s dvojicí šipek.

V otáčené části je vyznačen bod X, který otočením přešel do vyznačeného bodu Y. Říkáme, že body X a Y tvoří dvojici *bodů souměrně sdružených podle středu*. Naučíme se nyní takové dvojice hledat bez otáčení roviny.

Co platí pro dvojici bodů souměrně sdružených podle středu?

Překresleme znovu z předchozího obrázku to, co nás zajímá: dvojici souměrně sdružených bodů X, Y a střed souměrnosti S. Ještě jednou si připomeňme, že bod Y vznikl otočením bodu X kolem středu S o úhel 180°.

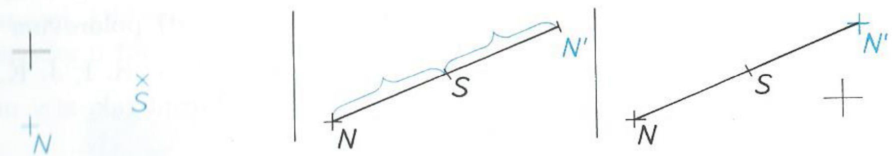


Protože úhel XSY má velikost 180°, tzn. je přímý, leží bod S na úsečce XY. Protože při otáčení se vzdálenost bodu od středu otáčení nemění, mají úsečky SX a SY stejnou délku. Znamená to, že bod S je středem úsečky XY.

Tato vlastnost nám umožňuje jednoduše určovat dvojice bodů souměrně sdružených podle středu, aniž bychom museli body otáčet.

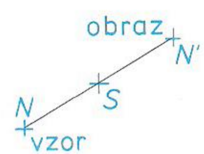
Příklad 1. V rovině jsou dány dva různé body N a S. Sestrojte bod N' souměrně sdružený s bodem N podle středu S.

Řešení. Protože střed S je středem úsečky NN', leží bod N' na polopřímce NS a $|NS| = |SN'|$. Postup konstrukce je patrný z obrázků:



Bod N' nazýváme *obrazem* bodu N ve středové souměrnosti se středem S. Bod N se pak nazývá *vzor* bodu N' v této středové souměrnosti. Symbolicky zapisujeme:

$$S(S):\ N \mapsto N'$$



a někdy také čteme: „Ve středové souměrnosti se středem S se bod N zobrazí do bodu N'."

Je jasné, že obrazem bodu N' v této středové souměrnosti je bod N:

$$S(S):\ N' \mapsto N$$

Podobně jako pro osovou souměrnost platí i pro souměrnost středovou: je-li bod Y obrazem bodu X, je bod X obrazem bodu Y. Proto stručně hovoříme o souměrně sdružených bodech X, Y a nerozlišujeme, který z nich je vzor a který obraz.

Zjistíme ještě obraz středu souměrnosti S. Protože při otáčení kolem středu S bod S zůstává na místě, je obrazem bodu S tentýž bod S. Je to tedy *samodružný* bod. Sami vysvětlete, že žádné jiné samodružné body středová souměrnost nemá.

Shrneme naše poznatky o středové souměrnosti:

Středová souměrnost v rovině je určena bodem S – středem souměrnosti. Pro obraz Y libovolného bodu X roviny platí:

- Pokud bod X splývá se středem S, splývá s ním i bod Y. Bod S je samodružný.
- Pokud jsou body X a S různé, je bod S středem úsečky XY.

Body X a Y se nazývají souměrně sdružené podle středu S.

1. V rovině zvolte dva různé body C a S. Sestrojte obraz D bodu C ve středové souměrnosti se středem S. Zapište symbolicky, že body C a D jsou souměrně sdružené podle středu S.

2. Jsou dány dva různé body U a V. Kde leží střed A souměrnosti, ve které platí $S(A):\ U \mapsto V$?

3. V rovině jsou dány čtyři různé body O, P, Q a R. Najděte obrazy bodů P, Q a R ve středové souměrnosti se středem O.

4. Platí $S(X):\ A \mapsto B$. Doplňte zápisy:
a) $S(X):\ B \mapsto \ldots$ b) $S(X):\ X \mapsto \ldots$