Teorie čísel - dělitelnost 3

Příklad 1. Dokažte, že jsou čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ iracionální.

Příklad 2. Vypočítejte a výsledek vyjádřete zlomkem v základním tvaru

1. $1,8\overline{3} - 1,\overline{6} + 0,\overline{2}$
2. $0,\overline{3} \cdot (3,\overline{45} - 0,\overline{15})$

Příklad 3. Mějme číslo
$$a = 24^3 \cdot 6^5 \cdot 36^6$$

1. Napište toto číslo ve tvaru součinu mocnin prvočísel.
2. Určete, kolik má dané číslo přirozených dělitelů.
3. Určete, jaký je největší dělitel čísla a, který ve svém prvočíselném rozkladu obsahuje všechna prvočísla v nejvýše první mocnině.
4. Určete prvočíselný rozklad nejmenšího čísla b, které je dělitelné číslem a, je dělitelné pěti a navíc platí, že exponenty čísel 2, 3, 5 z prvočíselného rozkladu čísla b tvoří aritmetickou posloupnost.
5. Určete největší dvojciferný a nejmenší trojciferný dělitel čísla a.
6. Určete nejmenší čtyřciferné číslo c, které je s číslem a nesoudělné.

Příklad 4. Je dáno číslo
$$a = 1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot 4^4 \cdot \cdots \cdot 10^{10}.$$

1. Určete, které prvočíslo se v rozkladu čísla a na součin prvočísel objevuje v nejvyšší mocnině.
2. Určete, které prvočíslo se v rozkladu čísla a vyskytuje v nejnižší kladné mocnině.
3. Určete, kolika nulami končí číslo a.
4. Určete, jaký je největší dělitel čísla a, který ve svém prvočíselném rozkladu obsahuje všechna prvočísla v nejvýše první mocnině.

Příklad 5. Pišme za sebe čísla 123443211234432112...

1. Kolik nejméně čísel za sebe musíme napsat, aby bylo výsledné číslo dělitelné dvěma a devíti.
2. Kolik nejméně čísel za sebe musíme napsat, aby bylo výsledné číslo dělitelné třemi a čtyřmi.

Příklad 6. Určete počet přirozených dělitelů čísla

1. 1001
2. 1024
3. 5^n, kde $n \in \mathbb{N}$

Příklad 7. Určete největší přirozené číslo n tak, aby $3n - 8 | 5n + 1$

Příklad 8. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení

1. Je-li přirozené číslo dělitelné šesti, potom je vždy dělitelné dvěma a třemi.
2. Druhá mocnina žádného přirozeného čísla nemůže po dělení čtyřmi dávat zbytek 2.

3. Jsou-li dvě čísla nesoudělná, potom jsou nesoudělné i jejich druhé mocniny.
4. Jsou-li čísla m, n nesoudělná, potom jsou nesoudělná i čísla $m+1, n+1$.
5. Existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n, pro která jsou čísla $n, n+2, n+4$ prvočísly.

Příklad 9. Určete všechna celá čísla n, pro které je výraz $\frac{2n+1}{n+3}$ celočíselný.

Příklad 10. Jsou dána dvě přirozené čísla a, b, jejichž součin je $125^4 \cdot 49^3$. Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení. Svá tvrzení řádně zdůvodněte.

1. Obě čísla a, b jsou určitě lichá.
2. Alespoň jedno z čísel a, b je určitě druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.
3. Čísla a, b mohou být stejná.
4. Číslo a může být druhou mocninou čísla b.
5. Čísla a, b mohou být nesoudělná.
6. Jsou-li čísla a, b nesoudělná, potom je alespoň jedno z čísel a, b druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Příklad 11. Uvažujme číslo $m = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 50^6$

1. Rozložte číslo m na součin prvočísel.
2. Určete, kolik má číslo m dělitelů.
3. Určete největší dělitel čísla m, který má všechny prvočísla ve svém rozkladu ve stejné mocnině.
4. Určete největší dělitel čísla m tak, aby i jeho druhá mocnina byla dělitelem čísla m.

Příklad 12. Určete všechna celá čísla n, pro která je zlomek $\frac{5}{n^2+n+3}$ celým číslem.

Příklad 13. Pišme za sebe všechna přirozená čísla od 1 do 111. Určete, kolikrát jsme na tabuli napsali

a) cifru 0

b) cifru 1

Příklad 14. Z cifer $9, 8, 7, 6, 5, 4$ sestavme dvě trojciferná čísla.

1. Určete, jaký největší součet mohou mít tato čísla.
2. Určete, jaký nejmenší součet mohou mít tato čísla.
3. Určete, jaký největší kladný rozdíl mohou mít tato čísla.
4. Určete, jaký nejmenší kladný rozdíl mohou mít tato čísla.