

Množiny - Vennovy diagramy ¹

Množiny často znázorňujeme pomocí tzv. Vennových ² diagramů. Tato schémata umožňují výhodně řešit řadu úloh o množinách.

Zadání úloh

S využitím Vennových diagramů řešte následující úlohy.

1. Zjednodušte množinové zápisy

(a)

$$\left[(A \cup B)' \cap (B \cup C)' \right]' - (A \cup C) ,$$

(b)

$$[(B \div C) \cup (A \cap B)] \cup A'_{A \cup B \cup C} .$$

2. Rozhodněte, zda pro libovolné množiny A , B a C platí

(a)

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) ,$$

(b)

$$(A' \div B') \cap C = (A \cap B)'_{A \cup B \cup C} ,$$

(c)

$$(A - C) \cup B = (A \cap B) \cup C .$$

V případě, že nikoliv

- i. uveďte konkrétní příklad množin, pro něž tato rovnost neplatí,
- ii. zdůvodněte, zda je místo symbolu $=$ možné použít vhodný symbol množinové inkluze ($\subset, \subseteq, \supset, \supseteq$) tak, aby uvedený zápis byl pravdivý.

3. Ze 129 posluchačů 1. ročníku přírodovědecké fakulty chodí do menzy na obědy nebo večere 116 studentů. Nejvýše na jedno jídlo chodí 62 studentů a na obědy chodí o 47 studentů více než na večere.

- Kolik studentů chodí jen na oběd?
- Kolik studentů chodí na obě jídla?
- Kolik studentů chodí na večeri?

4. O letních prázdninách bylo ze třídy, která má 35 žáků, na dovolené v Itálii 7 žáků, v Německu 7 studentů a Francii navštívilo 5 studentů. V žádné z těchto zemí nebylo 21 žáků. Do Německa i Francie cestovali 2 žáci, ve Francii a Itálii byl 1 student. Všechny tři uvedené státy navštívil jeden žák.

- Kolik studentů se rekreovalo jen v Itálii?
- Kolik studentů bylo v právě jednom z uvedených států?
- Kolik studentů cestovalo do Německa nebo Itálie?

¹Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

²John Venn (1834 - 1923) britský matematik

5. Okolo nižšího gymnázia jezdí tři tramvajové linky. Linkou číslo 5 jezdí 55, linkou číslo 3 jezdí 65 a linkou číslo 9 jezdí 135 studentů. Žádnou z těchto linek nepoužívá 80 studentů, všechny tři linky využívá jediný student. Linkou 3 a 9 jezdí současně 40 studentů, linkou 3 i 5 jezdí 5 studentů, linkou 5 nebo 9 jezdí 155 studentů.
- Kolik studentů navštěvuje nižší gymnázium?
 - Kolik studentů používá právě 2 uvedené tramvajové linky?
 - Kolik studentů jezdí pouze linkou číslo 9?
6. Při podrobné kontrole součástí bylo zjištěno, že z 240 kusů bylo 72 rezavých, 16 pokřivených a 24 naražených. Všechny naražené byly též rezavé. Polovina pokřivených byla rezavá a čtvrtina z celkového počtu pokřivených byla nejen rezavá ale také naražená.
- Kolik součástí bylo bez vady?
 - Kolik součástí bylo jen rezavých?
 - Kolik procent součástí mělo alespoň jednu vadu?
 - Kolik procent součástí mělo právě dvě vady?

Návody a výsledky

1. Situaci rozkreslete, vhodné je barevné rozlišení při vyznačování jednotlivých množin ve Vennových diagramech.

(a) $B - (A \cup C) = (B - A) - C$,

(b) $B \cup C$.

2. Tvrzení

(a) obecně platí (jedná se o tzv. distributivní zákon),

(b) o rovnosti obecně neplatí (např. pro množiny $A = \{1; 2\}$, $B = \{2; 3; 4\}$, $C = \{1; 3; 5\}$ je levá strana rovnosti $\{1; 3\}$ zatímco pravá $\{1; 3; 4; 5\}$), obecně však platí

$$(A' \div B') \cap C \subseteq (A \cap B)'_{A \cup B \cup C} \quad \text{i} \quad (A' \div B') \cap C \subset (A \cap B)'_{A \cup B \cup C},$$

(c) obecně neplatí a neplatí ani žádná inkluze, což je vidět též z příkladu množin $A = \{1; 2\}$, $B = \{3; 4\}$, $C = \{1; 3; 5\}$, kdy je levá strana rovnosti $\{1; 2; 3; 4\}$, zatímco pravá $\{1; 3; 5\}$.

3. Jen na oběd chodí 48 studentů, na obě jídla 67 a na večeře 68.
4. Uvědomte si, že ten student, který navštívil všechny tři uvedené země, je také jediným ze třídy, který byl v Itálii i Francii. Jen v Itálii byli 4 studenti, právě jeden ze zmíněných států navštívil 10 studentů a do Německa nebo Itálie cestovalo 11 žáků.
5. Nižší gymnázium navštěvuje 256 studentů, z nichž 77 využívá právě dvě z uvedených linek. Pouze linkou 9 cestuje 61 studentů.
6. Bez vady bylo 160 součástí, zbytek (tj. třetina tedy $33\frac{1}{3}\%$) měla alespoň jednu vadu. Jen rezavých bylo 44 součástí. Právě dvě vady mělo 10% součástí.