Množiny [1]

Základní pojmy

Podmnožina. Množina B se nazývá podmnožinou množiny A, jestliže je každý prvek množiny B současně prvkem množiny A, píšeme $B \subseteq A$ a hovoříme o tzv množinové *inkluzi*. V opačném případě říkáme, že B není podmnožinou A a píšeme $B \nsubseteq A$.

Každá neprázdná množina M má dvě tzv. *nevlastní* (též triviální) podmnožiny: $\emptyset$ a M. Ostatní její podmnožiny nazýváme *vlastní*.

Rovnost množin. Říkáme, že množiny A a B se rovnají, pokud $A \subseteq B$ a také $B \subseteq A$. Píšeme $A = B$. V opačném případě říkáme, že se množiny A a B nerovnají, což zapisujeme $A \neq B$.

Chceme-li zdůraznit skutečnost, že množina B je podmnožinou množiny A a přitom $A \neq B$, píšeme $B \subset A$.

Číselné množiny.

Přirozená čísla $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots\}$, celá čísla $\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \ldots\}$, racionální čísla („zlomky") $\mathbb{Q}$, reálná čísla $\mathbb{R}$.

Platí $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Intervaly. Jedná se o podmnožiny množiny reálných čísel. Např. *otevřený* interval $(a; b)$ je množinou všech reálných čísel větších než a a současně menších než b, pro *uzavřený* interval $\langle a; b\rangle$ platí $\langle a; b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$, atd.

Operace s množinami

Sjednocení Sjednocením množin A a B rozumíme množinu, která obsahuje všechny prvky ležící v alespoň jedné z množin A, B. Píšeme $A \cup B$.

Průnik Průnikem množin A a B rozumíme množinu, která obsahuje všechny prvky ležící v každé z množin A, B. Píšeme $A \cap B$.
Pokud $A \cap B = \emptyset$ nazývají se množiny A a B *disjunktní*.

Rozdíl Rozdílem množin A a B rozumíme množinu, která obsahuje všechny ty prvky, které leží v množině A a přitom neleží v množině B. Píšeme $A - B$.

Doplněk Nechť $B \subseteq A \neq \emptyset$. Doplňkem množiny B v množině A rozumíme množinu, která obsahuje všechny ty prvky množiny A, které neleží v množině B. Píšeme B'_A.
V případě, kdy máme na mysli doplněk v největší množině A, která v dané situaci připadá v úvahu, píšeme místo B'_A pouze stručněji B'. Například $(-1; \infty)'$ znamená $(-1; \infty)'_{\mathbb{R}}$, tedy $(-1; \infty)' = (-\infty; -1\rangle$.

Symetrický rozdíl Symetrickým rozdílem množin A a B rozumíme množinu, která obsahuje všechny ty prvky, které leží v právě jedné z množin A, B. Píšeme $A \div B$.
Platí tedy $A \div B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) = (A \cap B)'_{A \cup B}$.

[1]Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

Úlohy

Zadání

1. Udejte příklad množin tak, aby platilo

   (a) $A \cap B = A \cup B$,

   (b) $B'_A \neq A - B$,

   (c) $\emptyset \neq A \div B = A$.

   Dále učiňte obecný závěr o tom, co musí být v daném případě splněno, aby požadovaná vlastnost platila.

2. Nechť jsou dány množiny $A = (-2; 3\rangle$, $B = \langle 1; 5)$. Určete

$$A \cap B\,, \quad A \cup B'\,, \quad A' \cap B\,, \quad (A - B)'\,, \quad A \div B\,.$$

3. Nechť jsou dány množiny

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N}; \frac{12}{n} \in \mathbb{N} \right\} \quad \text{a} \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^2 - 2x = 0 \right\}\,.$$

   Určete

$$A \cup B\,, \quad A \cap B\,, \quad B - A\,, \quad B'_A\,, \quad B'_{A \cup B}\,.$$

4. Následující množiny zapište intervalem

$$A = \{ x \in \mathbb{R}; |x + 3| \leq 1 \}\,, \quad B = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^2 - 1 < 0 \right\}\,,$$

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^2 - 2x + 4 > 0 \right\}\,, \quad D = \left\{ x \in \mathbb{R}; x^3 - x^2 + x - 1 \geq 0 \right\}\,.$$

5. Najděte všechna $k \in \mathbb{Z}$ taková, aby pro intervaly $A = \langle k - 1; k + 1)$ a $B = (2k; 3k + 5)$ platilo $A \subseteq B$.

6. Uvažujme intervaly

$$I = (k - 2; k + 3\rangle \quad \text{a} \quad J = \langle 2; 9)\,.$$

   Najděte všechna $k \in \mathbb{Z}$ taková, aby platilo

   (a) $I \subseteq J$,

   (b) $I \cap J = \emptyset$,

   (c) $\emptyset \neq I \cap J \neq I$.

7. Dokažte, že pro libovolné množiny A a B platí tzv. De Morganovy [2] zákony

$$(A \cup B)' = A' \cap B' \quad \text{a} \quad (A \cap B)' = A' \cup B'\,.$$

---

[2] Augustus De Morgan (1806 - 1871) britský matematik

Výsledky

1. Např.

   (a) $A = B = \{1\}$ (pro splnění požadované vlastnosti musí platit $A = B$),

   (b) $A = \{1\}$, $B = \{2\}$ (pro splnění požadované vlastnosti musí platit $B \nsubseteq A$, doplněk B v A pak není definován; pokud je $B \subseteq A$, potom $B'_A = A - B$),

   (c) $A = \{1; 2\}$, $B = \emptyset$ (pro splnění požadované vlastnosti musí platit $A \neq \emptyset$ a $B = \emptyset$).

2. Platí

$$A \cap B = \langle 1; 3\rangle \ , \quad A \cup B' = (\infty; 3\rangle \cup \langle 5; \infty) \ , \quad A' \cap B = (3; 5) \ ,$$
$$(A - B)' = (-\infty; -2\rangle \cup \langle 1; \infty) \ , \quad A \div B = (-2; 1) \cup (3; 5) \ .$$

3. Platí

$$A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\} \ , \quad B = \{0; 2\} \ , \quad A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 6; 12\} \ ,$$
$$A \cap B = \{2\} \ , \quad B - A = \{0\} \ , \quad B'_A \text{ nedefinováno}, \quad B'_{A \cup B} = \{1; 3; 4; 6; 12\} \ .$$

4. Návody: $x^2 - 2x + 4 = (x-1)^2 + 3 > 0$, $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + (x-1) = (x^2+1)(x-1)$, přičemž $x^2 + 1 > 0$. Platí

$$A = \langle -4; -2\rangle \ , \quad B = (-1; 1) \ , \quad C = \mathbb{R} = (-\infty; \infty) \ , \quad D = \langle 1; \infty) \ .$$

5. Je třeba, aby $k - 1 > 2k$ a $k + 1 \leq 3k + 5$. Odtud vychází $k = -2$.

6. Je třeba, aby

   (a) $k - 2 \geq 2$ a $k + 3 < 9$, výsledek $k \in \{4; 5\}$,

   (b) $k - 2 \geq 9$ nebo $k + 3 < 2$, výsledek $k \in \{\ldots; -3; -2; 11; 12; \ldots\}$,

   (c) vzhledem k (a) a (b) platilo, že $k \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 6; 7; 8; 9; 10\}$.

7. Důkaz provedeme tak, že ukážeme, že množina na levé straně rovnosti je podmnožinou množiny z pravé strany rovnosti a opačně. V případě prvního z uvedených pravidel dostáváme.

$$x \in (A \cup B)' \quad \Rightarrow \quad x \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad (x \notin A \text{ a } x \notin B) \quad \Rightarrow \quad (x \in A' \text{ a } x \in B') \quad \Rightarrow \quad x \in A' \cap B' \ ,$$

$$x \in A' \cap B' \quad \Rightarrow \quad (x \in A' \text{ a } x \in B') \quad \Rightarrow \quad (x \notin A \text{ a } x \notin B) \quad \Rightarrow \quad x \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad x \in (A \cup B)' \ .$$

   Druhý zákon se dokáže analogicky.