Zápočtová písemka - Metody řešení matematických úloh I.

26. ledna 2019

- Čas na vypracování: 90 minut.
- Maximální počet bodů: 20 bodů.
- Minimální potřebný počet bodů pro udělení zápočtu: 12 bodů.

Příklad 1. (3 body)

Určete všechna celá čísla x, y taková, že

$$x^2 - y^2 - 2y = 2.$$

Příklad 2. (3 body)

Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí, že

$$9 \nmid (n^2 + 5n + 13) \;\Rightarrow\; 3 \nmid (n - 2).$$

Příklad 3. (2 body)

Rozhodněte, zda pro libovolné množiny A, B, C platí, že

$$A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C).$$

Své tvrzení řádně zdůvodněte.

Příklad 4. (2 body)

Znegujte uvedený výrok (bez použití sousloví *Není pravda, že...*):

Pokud dnes Kometa, která již tři zápasy v řadě neprohrála, porazí Spartu, skončí v tabulce nejhůře pátá a zároveň odsune svého dnešního soupeře do druhé poloviny tabulky.

Příklad 5. (3 body)

Je dáno přirozené číslo $m = 24^5 \cdot 45^7$.

1. Určete počet všech přirozených dělitelů čísla m.
2. Určete největší dělitel d čísla m takový, že i číslo d^3 je dělitelem čísla m.
3. Určete nejmenší přirozené číslo n takové, že $m|n$ a zároveň n bude druhou mocninou nějakého přirozeného čísla.

Výsledky je možné nechat ve tvaru součinu prvočísel.

Příklad 6. (4 body)

V oboru reálných čísel řešte rovnici:

$$\log_6 \sqrt{x-4} + \log_6 \sqrt{x+1} = \log_9 3.$$

Příklad 7. (3 body)

Určete všechna reálná čísla a taková, aby ani jedna z uvedených kvadratických nerovnic (s neznámou x) neměla žádné reálné řešení:

$$x^2 - 2ax + 4 \leq 0, \qquad x^2 + x + a \leq 0.$$