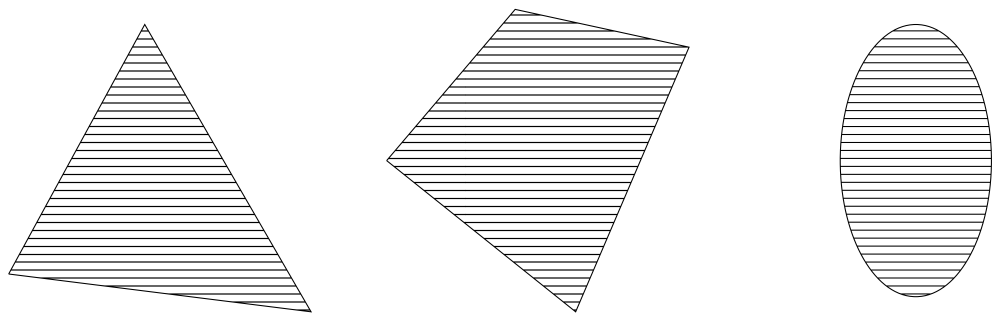
0.1 Konvexní a nekonvexní množiny bodů

Definice 0.1 Množina bodů se nazývá ***konvexní***, jestliže pro každé dva její body X, Y platí, že úsečka XY je její podmnožinou. Prázdnou množinu a jednobodové množiny považujeme také za konvexní.
Symbolicky zapsáno:

$$M \text{ je konvexní množina} \Leftrightarrow (\forall X, Y \in M)[XY \subset M \vee M = \emptyset \vee M = \{X\}].$$

Množina bodů, která není konvexní se nazývá *nekonvexní*.

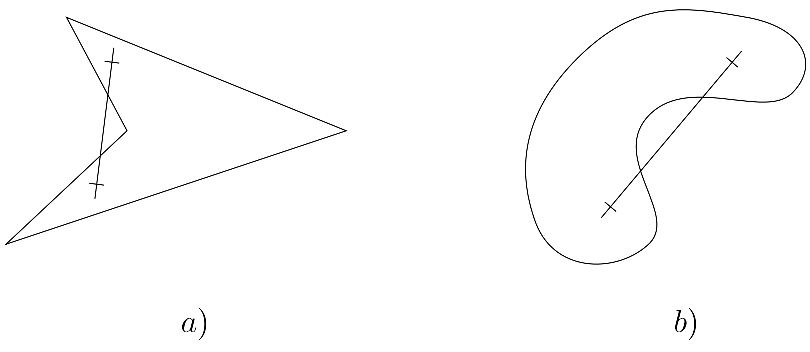
Příklad 0.1 Příklady konvexních množin bodů jsou znázorněny na obrázku 1. Příkladem



a) *b*) *c*)

Obr. 1

konvexní množiny bodů je také přímka, rovina, úsečka, polopřímka, polorovina a poloprostor.
Příklady nekonvexních množin bodů jsou znázorněny na obrázku 2.



a) *b*)

Obr. 2

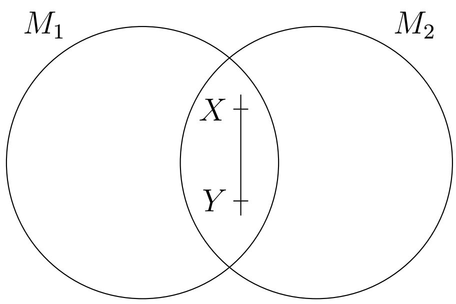
Abychom dokázali, že daný geometrický útvar U je nekonvexní, stačí nalézt jedinou jeho dvojici bodů X, Y takových, že úsečka XY není podmnožinou útvaru U, tj. symbolicky zapsáno

$$U \text{ je nekonvexní množina bodů} \Leftrightarrow (\exists\, X, Y \in U)[XY \not\subseteq U].$$

Dokázat konvexnost útvaru bývá obtížnější. Někdy lze s výhodou užít následující větu:

Věta 0.1 *Průnik dvou konvexních množin bodů je konvexní množina bodů.*

Důkaz: *Označme uvažované množiny* M_1, M_2. *Je-li* $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ *nebo je* $M_1 \cap M_2$ *jednoprvková množina, je zřejmé, že věta platí. Nechť tedy* $M_1 \cap M_2$ *obsahuje alespoň dva různé body (viz obr. 3). Pak pro každé dva různé body* $X, Y \in M_1 \cap M_2$ *platí:* $X \in M_1$, $Y \in M_1$, $X \in M_2$, $Y \in M_2$. *Množiny* M_1, M_2 *jsou konvexní a tedy* $XY \subset M_1$ *a* $XY \subset M_2$. *Odtud plyne, že úsečka* $XY \subset M_1 \cap M_2$. *Množina* $M_1 \cap M_2$ *je tedy konvexní.*



Obr. 3

Užitím věty 0.1 lze indukcí snadno dokázat, že průnik konečného počtu konvexních množin je konvexní množina bodů.

0.2 Úhel, trojúhelník, čtyřstěn

V souladu s axiomatickou výstavbou geometrie užijeme dosud zavedených pojmů k definicím konvexního a nekonvexního úhlu, trojúhelníku a čtyřstěnu.

Na střední škole jsme třídili úhly většinou podle jejich velikosti. Rozlišovali jsme např. úhly duté, jejichž velikost byla větší než $0°$ a menší než $180°$, úhly přímé, úhly o velikosti větší než $180°$ a menší než $360°$. Charakteristickými pojmy spojenými s úhlem byly vrchol úhlu a ramena úhlu, pomocí nichž se úhel obvykle intuitivně zavádí.

V další textu budeme definovat konvexní a nekonvexní úhel a poznáme, že všechny úhly patřící k některému dříve poznanému typu lze zařadit buď mezi konvexní nebo mezi nekonvexní úhly.

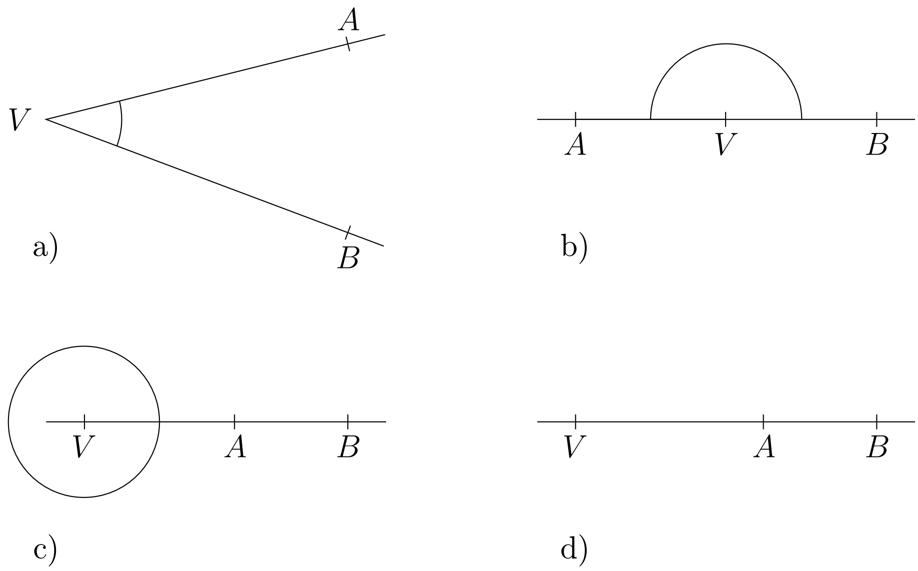
Definice 0.2 Nechť A, V, B jsou tři libovolné navzájem různé body. ***Konvexním úhlem AVB*** pak nazýváme:

a. Průnik polorovnin AVB a BVA v případě, že body A, V, B neleží v přímce (viz obr. 4 a).[1]

b. Leží-li body A, V, B v přímce a bod V leží mezi body A, B, lze za množinu všech bodů konvexního úhlu AVB považovat každou polorovinu s hraniční přímkou AB (viz obr. 4 b).[2]

c. Leží-li body A, V, B v přímce a bod V neleleží mezi body A, B, lze za množinu všech bodů konvexního úhlu AVB považovat každou rovinu obsahující přímku AB (viz obr. 4 c) i každou polopřímku VA (viz obr. 4 d).

Vrcholem konvexního úhlu AVB nazýváme ve všech případech bod V, *rameny* konvexního úhlu nazýváme ve všech případech polopřímky VA, VB.



Obr. 4

Pro konvexní úhel AVB užíváme označení $\sphericalangle AVB$.

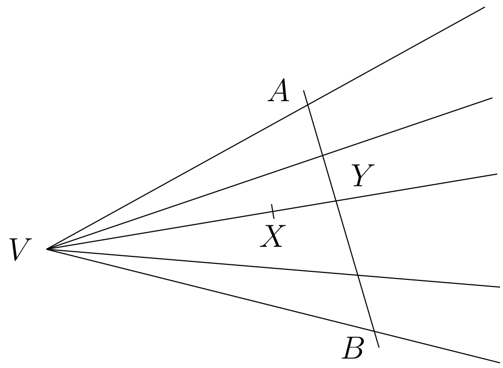
Konvexní úhly definované ve všech případech jsou konvexními množinami bodů, což plyne z konvexnosti roviny, poloroviny, polopřímky a věty 0.1. Název konvexní úhel tedy vyjadřuje, že se jedná o konvexní geometrický útvar.

Poznámka 0.1 Uvědomíme si, že v definici konvexního úhlu je obsažen *úhel dutý* – viz případ a), *úhel přímý* – viz případ b), *úhel plný* – viz případ c) i úhel nulový – viz případ d).

[1] Je zřejmé, že takto lze definovat úhly ostré, pravé a tupé.

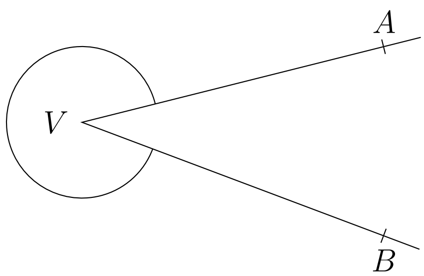
[2] Je zřejmé, že v tomto případě jde o přímý úhel s vrcholem V a rameny VA, VB.

Poznámka 0.2 Konvexní úhel AVB, který je definován v případě a) definice 0.2, tj. úhel dutý, jehož ramena leží v různoběžných přímkách, lze definovat také takto: Neleží-li body A, V, B v přímce, nazýváme konvexním úhlem AVB množinu všech bodů X roviny AVB, k nimž existuje bod Y úsečky AB takový, že X patří polopřímce VY (viz obr. 5).



Obr. 5

Definice 0.3 Nechť A, V, B jsou tři body, které neleží v přímce. Potom sjednocení doplňku konvexního úhlu AVB v rovině AVB a polopřímek VA a VB nazýváme ***nekonvexním úhlem*** AVB (viz obr. 6).



Obr. 6

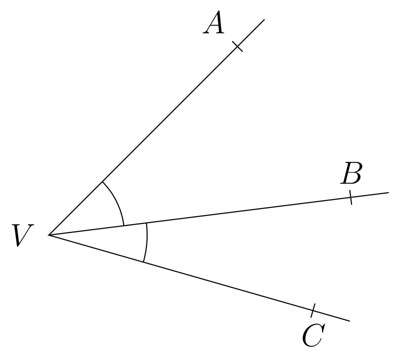
Pro nekonvexní úhel AVB užíváme označení $\sphericalangle AVB$.

Poznámka 0.3 Název ***nekonvexní*** úhel AVB vyjadřuje, že jde o nekonvexní množinu bodů, což vyplývá např. z toho, že $A \in \sphericalangle AVB$, $B \in \sphericalangle AVB$ a $AB \not\subset \sphericalangle AVB$.

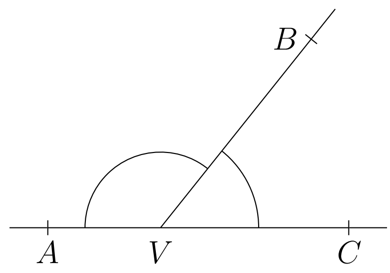
Sjednocením množiny všech konvexních a množiny všech nekonvexních úhlů je ***množina všech úhlů***.

Definice 0.4 Úhly AVB, BVC nazýváme ***styčné*** právě tehdy, když jejich průnikem je polopřímka VB a zároveň leží oba v téže rovině (viz obr. 7).

Definice 0.5 Dva styčné úhly, jejichž sjednocením je přímý úhel, nazýváme ***vedlejší*** úhly (viz obr. 8).



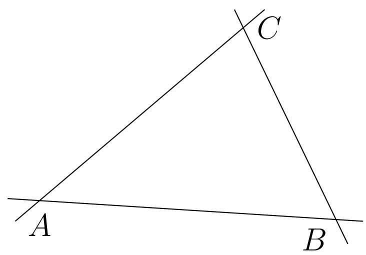
Obr. 7



Obr. 8

Definice 0.6 Nechť A, B, C jsou tři libovolné body neležící v přímce. ***Trojúhelníkem*** ABC nazveme průnik polorovin ABC, ACB, BCA (viz obr. 9).
Symbolicky zapsáno:

$$\triangle ABC = \mapsto ABC \cap \mapsto ACB \cap \mapsto BCA.$$



Obr. 9

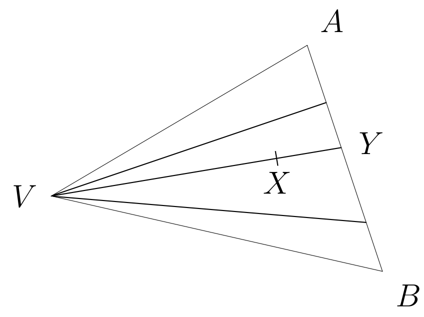
Body A, B, C nazýváme *vrcholy* trojúhelníka ABC, úsečky AB, BC, CA nazýváme *strany* trojúhelníka ABC a úhly $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle ACB$ nazýváme *vnitřní úhly* trojúhelníka ABC.

Poznámka 0.4 Z definice 0.6 a věty 0.1 vyplývá, že trojúhelník je konvexní útvar, neboť je definován jako průnik polorovin, což jsou konvexní množiny.

Uvedeme nyní ještě jinou možnost, jak definovat trojúhelník pomocí pojmů dříve zavedených:

Definice 0.7 Nechť A, B, C jsou tři libovolné navzájem různé body neležící v přímce. ***Trojúhelníkem*** ABC nazveme množinu všech bodů X prostoru, které patří všem úsečkám AY, kde Y patří úsečce BC (viz obr. 10).
Symbolicky zapsáno:

$$\triangle ABC = \{X \in Z;\ X \in AY \wedge Y \in BC\}.$$



Obr. 10

Definice 0.6 a 0.7 jsou příklady ekvivalentních definic jednoho a téhož pojmu. Při zavedení trojúhelníku definicí 0.7 je užito pouze pojmů bod, úsečka a vztahu bod patřící úsečce. Tento princip určení bodů náležících trojúhelníku může být užit k prohloubení intuitivního chápání trojúhelníku na 1. stupni základních škol.

Trojúhelník je rovinný mnohoúhelník s nejmenším počtem vrcholů. V prostoru je mnohostěn s nejmenším počtem vrcholů čtyřstěn. Jde tu o jistou analogii mezi těmito dvěma útvary, která je patrná i při porovnání následujících dvou definic s definicemi 0.6 a 0.7 trojúhelníka.

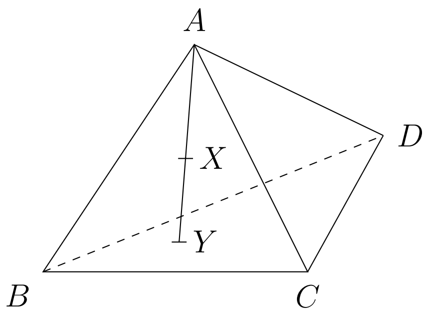
Definice 0.8 Nechť A, B, C, D jsou čtyři body neležící v jedné rovině. ***Čtyřstěnem*** $ABCD$ nazveme průnik poloprostorů $ABCD$, $ABDC$, $ACDB$, $CDBA$.
Symbolicky zapsáno:

$$\text{čtyřstěn } ABCD = \mapsto ABCD \cap \mapsto ABDC \cap \mapsto ACDB \cap \mapsto CDBA.$$

Body A, B, C, D nazýváme *vrcholy* čtyřstěnu $ABCD$, úsečky AB, BC, CA, AD, BD, CD nazýváme *hrany* čtyřstěnu $ABCD$ a trojúhelníky $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CDA$, $\triangle ABD$ nazýváme *stěny* čtyřstěnu $ABCD$.

Definice 0.9 Nechť A, B, C, D jsou čtyři body neležící v jedné rovině. ***Čtyřstěnem*** $ABCD$ nazveme množinu všech bodů X prostoru, které patří všem úsečkám AY, kde Y patří trojúhelníku BCD (viz obr. 11).
Symbolicky zapsáno:

$$\text{čtyřstěn } ABCD = \{X \in Z;\ X \in AY \wedge Y \in \triangle BCD\}.$$



Obr. 11

Poznámka 0.5 Z definice 0.8 a věty 0.1 vyplývá, že čtyřstěn je konvexní množina bodů, neboť je definován jako průnik poloprostorů, což jsou konvexní množiny.

Princip určení bodů náležejících čtyřstěnu v definici 0.9 může být užit k prohloubení intuitivního chápání čtyřstěnu na 1. stupni základních škol (podobně jako definice 0.7 k intuitivnímu chápání pojmu trojúhelník). Neznamená to však, že by se žáci seznamovali s těmito definicemi právě v této podobě.

Cvičení:

■ **0.1** Srovnejte zavedenou definici úhlu s definicí úhlu z Eukleidových základů na straně **??**, definice VIII. V čem se tyto definice liší?

■ **0.2** Načrtněte dva konvexní rovinné útvary takové, že jejich
a) sjednocení je množina konvexní,
b) sjednocení je množina nekonvexní,
c) průnik je množina konvexní,
d) průnik je množina nekonvexní.
Totéž zadání a) – d) proveďte pro dva nekonvexní rovinné útvary.

■ **0.3** Načrtněte a rozhodněte, zda se jedná o konvexní bodovou množinu:
a) trojúhelník ABC bez svých vrcholů,
b) trojúhelník KLM bez jednoho vnitřního bodu jedné své strany,
c) sjednocení vnitřku libovolného trojúhelníka a dvou různých bodů jeho obvodu,
d) rozdíl konvexního úhlu AVB a jeho ramene VA,
e) rozdíl čtverce $ABCD$ a sjednocení dvou jeho stran,
f) sjednocení vnitřku čtverce $ABCD$ a dvou jeho stran,
g) kružnice,
h) kruh.

■ **0.4** Vyšetřete všechny geometrické útvary, které mohou vzniknout jako průnik dvou trojúhelníků. Znázorněte a popište.

■ **0.5** Volte dvojice konvexních úhlů (nikoliv úhly plné nebo nulové). Vyšetřete, které geometrické útvary mohou vzniknout jako průnik těchto úhlů? všechny případy znázorněte a popište.

■ **0.6** Zopakujte si definici nekonvexního úhlu AVB a nekonvexní úhel AVB definujte ještě jiným způsobem (ekvivalentní definicí). Lze definovat nekonvexní úhel jako sjednocení nebo průnik dvou polorovin? Odpověď zdůvodněte.

■ **0.7** Definujte trojúhelník KLM jako a) průnik tří polorovin,
b) průnik konvexního úhlu a poloroviny.
Znázorněte a definice symbolicky zapište.

■ **0.8** V trojúhelníku ABC vyznačte vnitřní úhly. Ke každému z vnitřních úhlů určete úhel vedlejší, tzv. *vnější úhel trojúhelníku*. Kolik existuje v každém trojúhelníku jeho vnějších úhlů?

■ **0.9** Zvolte různoběžné přímky p, q, jejich průsečík označte V. Na přímce p zvolte bod P, na přmce q, bod Q. Každou z dvojic vrcholových a vedlejších úhlů určených různoběžkami p, q definujte pomocí polorovin pQ, qP nebo polorovin k nim opačných. Zapište symbolickým zápisem.

■ **0.10** Na základě znalostí ze střední školy zobrazte: a) rovnoramenný trojúhelník, b) rovnostranný trojúhelník, c) čtverec, d) pravidelný šestiúhelník, e) pravidelný pětiúhelník.

■ **0.11** Načrtněte pravidelný šestiúhelník $ABCDEF$ se středem S a na obrázku vyznačte dvojice úhlů a) styčných (nikoliv vedlejších), b) vedlejších, c) vrcholových, d) souhlasných, e) střídavých, f) přilehlých.

■ **0.12** Zobrazte čtyřstěn $ABCD$ a určete jeho průnik s poloprostorem $EFGH$, jestliže bod A leží mezi body E, C, bod B mezi body F, C a bod G mezi body D, C.

Literatura

[1] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum UJEP, Brno 1985.

[2] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Sbírka úloh z elementární geometrie*, skriptum MU, Brno 1996.

[3] Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka*, Scintilla Svazek 3, Brno 2007

[4] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*, Academia, Praha 1989

[5] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*, Praha 1963. (z angl. originálu *A concise History of Mathematics*, G. Bell and Sons Ltd., London 1956, přeložili Nový, L. - Folta, J.)

[6] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[7] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.

[8] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady* Dějiny matematiky, svazek 20. Prometheus, Praha, 2001.