Kapitola 1

Shodnost

V této kapitole zavedeme další axiomatický pojem – shodnost úseček. Tento pojem je zaveden axiomy shodnosti a jeho užitím dále definujeme shodnost úhlů, shodnost trojúhelníků i pojem shodného zobrazení v rovině a v prostoru. Shodná zobrazení, pak umožní definovat pojem shodných geometrických útvarů.

1.1 Shodnost úseček a axiomy shodnosti

Jak již bylo řečeno, zavádějí axiomy shodnosti do geometrie vztah shodnosti úseček. Jsou-li AB, CD úsečky, budeme jejich shodnost zapisovat $AB \cong CD$.

$\boldsymbol{S_1}$: Je-li $AB \cong CD$, je $A \neq B$ a $C \neq D$. Pro každé dva různé body A, B platí $AB \cong BA$.

$\boldsymbol{S_2}$: Nechť AB je úsečka, CD polopřímka. Pak existuje jediný bod E polopřímky CD, pro který platí $AB \cong CE$.

$\boldsymbol{S_3}$: Je-li $AB \cong CD$ a $CD \cong EF$, pak je $AB \cong EF$.

$\boldsymbol{S_4}$: Leží-li bod C mezi body A, B, bod C' mezi body A', B' a platí-li $AC \cong A'C'$, $BC \cong B'C'$, pak platí $AB \cong A'B'$.

$\boldsymbol{S_5}$: Nechť A, B, C a A', B', K jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť $AB \cong A'B'$. Pak existuje jediný bod C' poloroviny $A'B'K$, pro který platí $AC \cong A'C'$ a $BC \cong B'C'$.

$\boldsymbol{S_6}$: Nechť A, B, C a A', B', C' jsou dvě trojice bodů neležících v přímce a nechť platí $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$ a $CA \cong C'A'$. Leží-li bod P mezi body A, B, bod P' mezi body A', B' a platí-li, že $AP \cong A'P'$, je $CP \cong C'P'$.

Axiom S_1 vyjadřuje, že shodnost se týká jen dvojic různých bodů. Pro úplnost našich úvah zavedme ještě tzv. *nulovou úsečku*, což bude úsečka, jejíž krajní body splývají. Tato úsečka vyhovuje definici **??** v případě, že $A = B$. Každé dvě nulové úsečky budeme také považovat za shodné.

Užitím axiomů shodnosti se dá vcelku snadno dokázat, že relace ***shodnost dvou úseček*** je reflexivní a symetrická v množině všech úseček. Protože z axiomu S_3 je zřejmá tranzitivnost tohoto vztahu, je relace shodnost dvou úseček relací ekvivalence na množině všech úseček.

Axiomu S_2 využíváme při nanášení úsečky na danou polopřímku. Axiom S_4 je východiskem k zavedené pojmů grafický součet a grafický rozdíl úseček a násobek úsečky. Jednoznačnost přenesení trojúhelníka k dané polopřímce do dané poloroviny vyjadřuje axiom S_5 a axiom S_6 pak vyjadřuje základní vlastnost přeneseného trojúhelníka.

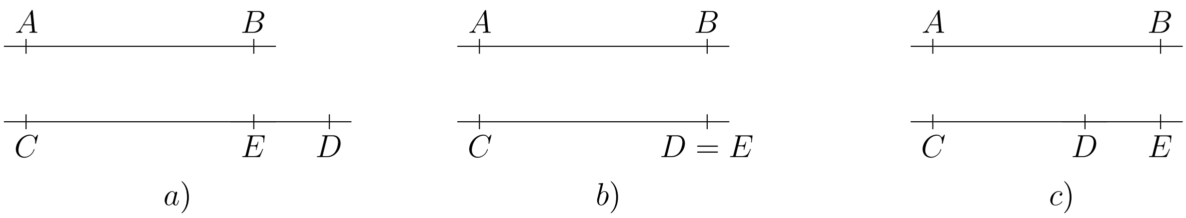
1.2 Porovnávání úseček, grafický součet a rozdíl dvou úseček, násobek úsečky

Axiomy shodnosti nám umožňují zavést porovnávání úseček a pojmy grafický součet, grafický rozdíl a grafický násobek úsečky. Tyto pojmy patří mezi základní pojmy elementární geometrie a jsou též zařazeny do učiva matematiky na 1. stupni základní školy.

Porovnávání úseček

Při porovnávání úseček AB a CD postupujeme takto: Na polopřímce CD sestrojíme bod E tak, že $CE = AB$. Leží-li bod E mezi body C, D, říkáme, že úsečka AB je menší než úsečka CD a píšeme $AB < CD$ (viz obr. 1.1a).

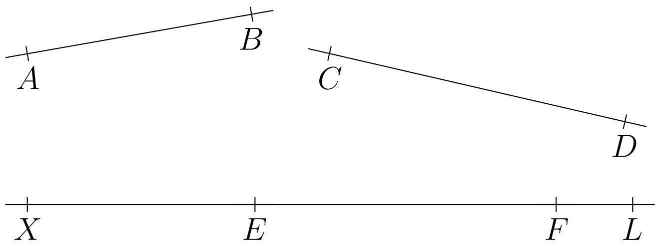
Je-li $E = D$, je $AB \cong CD$ (viz obr. 1.1b) a leží-li bod D mezi body C, E, říkáme, že úsečka AB je větší než úsečka CD a píšeme $AB > CD$ (viz obr. 1.1c).



Obr. 1.1

Grafický součet úseček

Nechť jsou dány úsečky AB a CD. Zvolme polopřímku KL a sestrojme na ní bod E tak, že $AB \cong KE$. Pak sestrojíme bod F na polopřímce opačné k polopřímce EK tak, aby $EF \cong CD$. Úsečka KF se nazývá grafický součet úseček AB a CD (viz obr. 1.2). Zapisujeme: $AB + CD = KF$.



Obr. 1.2

Grafický rozdíl úseček

Úsečku CD nazýváme grafický rozdíl úseček KF a AB právě tehdy, když úsečka KF je grafickým součtem úseček AB a CD (viz obr. 1.2).
Zapisujeme: $CD = KF - AB$.

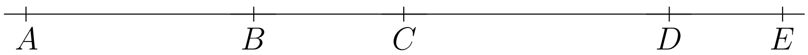
Grafický násobek úsečky

Platí-li, že $KL = AB + AB$, nazývá se úsečka KL dvojnásobkem úsečky AB, což zapisujeme $KL = 2AB$. Dále lze určit součet úseček $2AB + AB = PQ$, kde úsečku PQ nazýváme trojnásobkem úsečky AB. Je tedy:

$$\begin{aligned} AB + AB &= 2AB, \\ 2AB + AB &= 3AB, \\ 3AB + AB &= 4AB \text{ atd.} \end{aligned}$$

n-násobek úsečky AB se pak pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ definuje jako grafický součet $n-1$ násobku úsečky AB a úsečky AB. přitom jednonásobkem úsečky AB je úsečka AB, tj. $1AB = AB$.

Poznámka 1.1 Zavedený pojem grafického součtu dvou úseček lze snadno rozšířit na grafický součet více než dvou úseček. Např. na obrázku 1.3 je úsečka $AE = AB + BC + CD + DE$. Pak lze např. pětinásobek úsečky AB vyjádřit takto: $5AB = AB + AB + AB + AB + AB$, což odpovídá naší názorné představě.



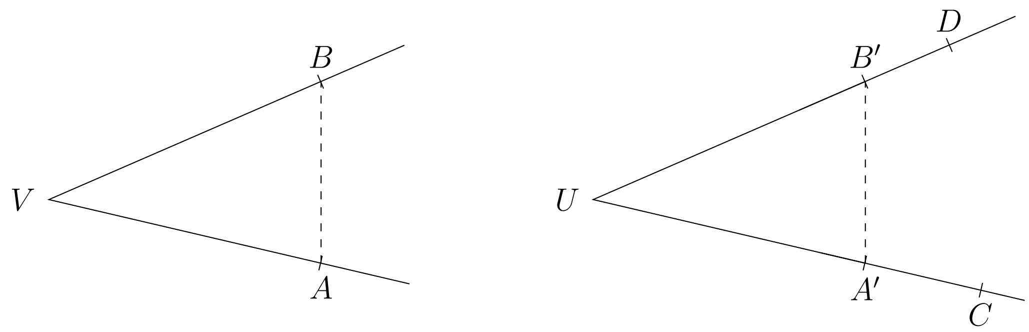
Obr. 1.3

1.3 Shodnost úhlů

Užitím shodnosti úseček budeme nyní definovat shodnost úhlů.

Definice 1.1 Konvexní úhel AVB je shodný s konvexním úhlem CUD právě tehdy, když na polopřímkách UC, UD existují takové body A', B', že platí

$$UA' \cong VA,\ UB' \cong VB \text{ a } A'B' \cong AB.$$



Obr. 1.4

Pro úplnost je třeba ještě dokázat, že shodnost konvexních úhlů AVB a CUD nezávisí na volbě bodů A, B na ramenech $\sphericalangle AVB$. Tento důkaz však nebudeme provádět.

Z definice 1.1 a vlastností vztahu shodnosti úseček vyplývá, že každé dva přímé, každé dva plné a každé dva nulové úhly jsou shodné.

Definice 1.2 Nekonvexní úhel AVB je shodný s nekonvexním úhlem CUD právě tehdy, jsou-li shodné konvexní úhly AVB a CUD.

Cvičení:

■ **1.1** Zdůvodněte, proč nelze v definici 1.1 vynechat přívlastek *konvexní* u úhlů AVB a CDU.

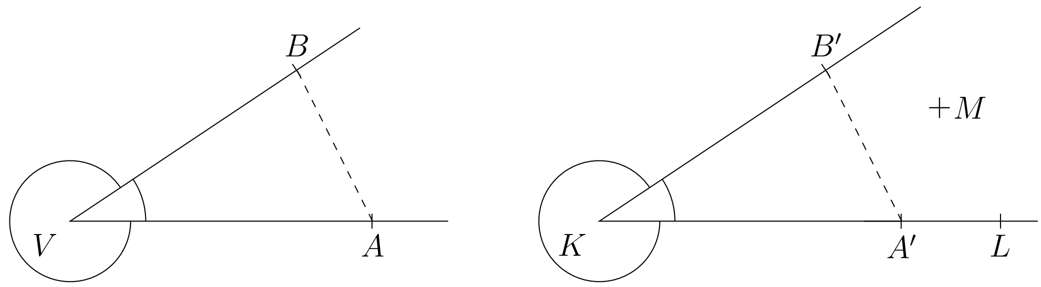
■ **1.2** Uvažujte o binární relaci *shodnost úhlů* v množině všech úhlů a určete její vlastnosti.

1.4 Porovnávání dvou úhlů, grafický součet a rozdíl dvou úhlů

Máme-li zaveden pojem shodných úhlů, můžeme definovat porovnávání, grafický součet a grafický rozdíl dvou úhlů. Tyto pojmy patří také k základním pojmům elementární geometrie a jsou zařazeny do geometrie 5. ročníku základní školy jako rozšiřující učivo.

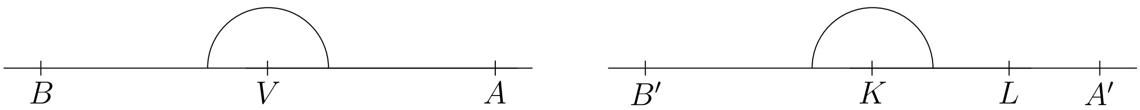
Při porovnávání dvou úhlů a při určení úhlu, který je grafickým součtem nebo rozdílem dvou úhlů, je základem úloha přenést daný úhel k dané polopřímce do dané poloroviny. Přitom jde o následující konstrukci úhlu shodného s daným konvexním úhlem:

Nechť je dán $\sphericalangle AVB$ a polorovina KLM. Na polopřímce KL sestrojíme bod A' tak, že $KA' \cong VA$. V polorovině KLM sestrojíme bod B' tak, že $KB' \cong VB$ a $AB \cong A'B'$ (viz obr. 1.5).



Obr. 1.5

Podle definice shodnosti dvou konvexních úhlů je $\sphericalangle A'KB' \cong \sphericalangle AVB$. Sestrojení $\sphericalangle A'KB'$ nazýváme *přenesením* $\sphericalangle AVB$ k polopřímce KL do poloroviny KLM. Přitom, je-li úhel AVB přímý, splývá $\sphericalangle A'KB'$ s polorovinou KLM (viz obr. 1.6).



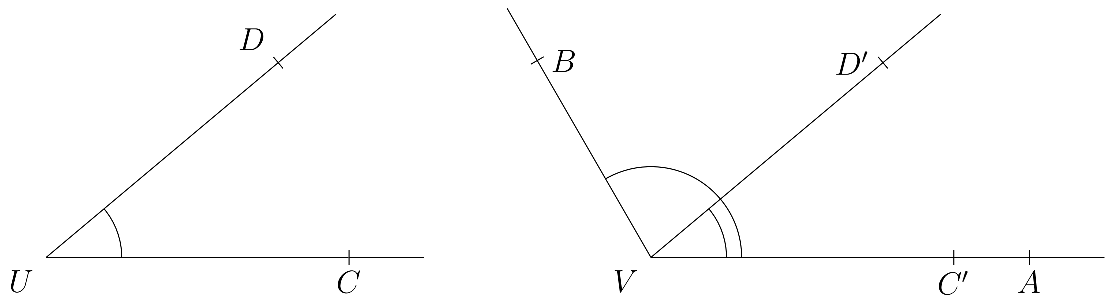
Obr. 1.6

Uvedená konstrukce nám umožňuje též přenesení nekonvexního úhlu. Na obrázku 1.5 je $\not\sphericalangle A'KB' \cong \not\sphericalangle AVB$. Konstrukce nekonvexního úhlu $A'KB'$ je shodná s konstrukcí konvexního úhlu $A'KB'$. Přenášíme-li však nekonvexní úhel, je třeba formulovat úlohu např. takto: Přenést daný úhel k dané polopřímce KL tak, aby obě jeho ramena patřila dané polorovině KLM. Tato formulace úlohy vyhovuje i pro přenášení konvexních úhlů. Přitom je však třeba mít na zřeteli, že úhel daný a přenesený musejí být shodné. Přenést daný úhel tedy především znamená sestrojit úhel shodný s daným úhlem.

Porovnávání úhlů

Při porovnávání dvou úhlů využíváme přenášení úhlů. Postupujeme při tom takto: Nechť jsou dány dva úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, které nejsou shodné. Je-li možné přenést daný úhel CUD tak, že rameno $U'C'$ přeneseného úhlu $C'U'D'$ splývá s ramenem VA úhlu AVB a průnikem tohoto přeneseného úhlu s daným úhlem AVB je tento přenesený úhel, je daný úhel CUD menší než daný úhel AVB (viz obr. 1.7). Je-li možné úhel CUD přenést tak, že rameno $U'C'$ úhlu $C'U'D'$ splývá s ramenem VA

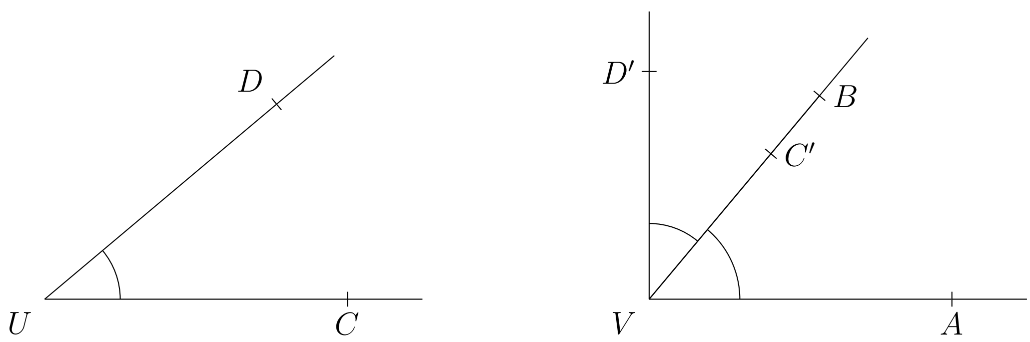
úhlu AVB tak, že $\sphericalangle AVB \cap \sphericalangle C'U'D'$ je $\sphericalangle AVB$, je úhel CUD větší než daný úhel AVB.



Obr. 1.7

Grafický součet dvou konvexních úhlů

Nechť jsou dány dva konvexní úhly $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$, z nichž žádný není plný. Sestrojíme úhel $\sphericalangle C'VD' \cong \sphericalangle CUD$ tak, že $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle C'VD'$ jsou úhly styčné. Úhel, který je sjednocením těchto dvou styčných úhlů nazýváme *grafický součet úhlů* $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$.



Obr. 1.8

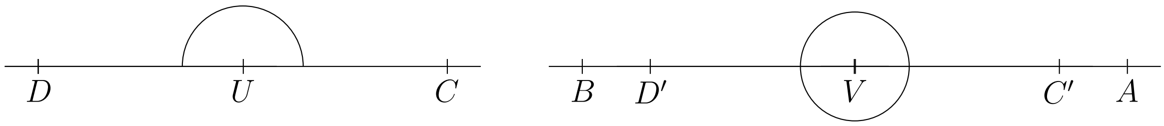
V obrázku 1.8 je úhel $\sphericalangle AVD'$ grafickým součtem $\sphericalangle AVB$ a $\sphericalangle CUD$. Zapisujeme:

$$\sphericalangle AVD' = \sphericalangle AVB + \sphericalangle CUD.$$

Poznámka 1.2 Uvědomme si, že při sestrojení $\sphericalangle C'VD'$ jde o přenesení $\sphericalangle CUD$ k polopřímce VB do poloroviny opačné k polorovině, v níž leží $\sphericalangle AVB$.

Jsou-li oba úhly $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ přímé, je jejich grafickým součtem úhel plný. V obrázku 1.9 je součtem daných přímých úhlů $\sphericalangle AVB$, $\sphericalangle CUD$ plný úhel $\sphericalangle AVD'$.

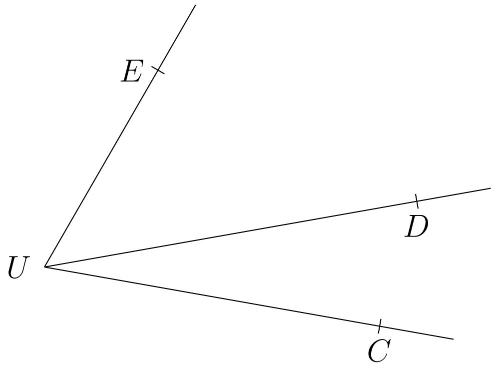
Je zřejmé, že grafickým součtem dvou konvexních úhlů nemusí být konvexní úhel.



Obr. 1.9

Grafický rozdíl dvou konvexních úhlů

Úhel $\sphericalangle DUE$ nazýváme *grafickým rozdílem* konvexních úhlů β, α právě tehdy, když $\alpha + \sphericalangle DUE = \beta$.
Zapisujeme: $\sphericalangle DUE = \beta - \alpha$ (viz obr. 1.10).



$\sphericalangle CUD \cong \alpha$
$\sphericalangle CUE \cong \beta$
$\sphericalangle DUD \cong \beta - \alpha$

Obr. 1.10

Poznámka 1.3 Platí-li, že $\alpha + \alpha = \beta$, nazýváme úhel β dvojnásobkem úhlu α, což zapisujeme $\beta = 2\alpha$. Analogicky jako při násobku úsečky definujeme trojnásobek úhlu α jako grafický součet dvojnásobku úhlu α a úhlu α, tj. $3\alpha = 2\alpha + \alpha$ atd.
Je zřejmé, že existence n-násobku daného úhlu není zaručena ani pro $n = 2$, $n \in \mathbb{N}$.

Cvičení:

■ **1.3** Uvažujte o operaci grafické sčítání dvou úhlů v množině všech konvexních úhlů a určete její vlastnosti.

■ **1.4** Uvažujte o operaci grafické sčítání dvou úhlů v množině všech úhlů a určete zde její vlastnosti. Jak se budou lišit vzhledem k vlastnostem operace ze cvičení ?

1.5 Shodnost trojúhelníků

Shodnost úseček umožňuje též definovat shodnost trojúhelníků.

Definice 1.3 Trojúhelníky ABC, $A'B'C'$ se nazývají ***shodné*** (v tomto pořadí vrcholů), jestliže platí $AB \cong A'B'$, $BC \cong B'C'$, $CA \cong C'A'$.

Shodnost trojúhelníků ABC, $A'B'C'$ zapisujeme $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$. Dvojice vrcholů A, A'; B, B'; C, C' nazýváme vrcholy *k sobě příslušné*. Termín *k sobě příslušné* používáme též pro strany, vnitřní úhly, příčky atd. obou trojúhelníků. Definice shodnosti dvou trojúhelníků vyžaduje shodnost všech dvojic k sobě příslušných stran.

Z definice 1.1 shodnosti konvexních úhlů plyne, že také dvojice k sobě příslušných vnitřních úhlů obou trojúhelníků jsou dvojice shodných úhlů, tj. $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$, $\sphericalangle BCA \cong \sphericalangle B'C'A'$ a $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$.

V učebnicích elementární geometrie se někdy v definici shodných trojúhelníků požaduje shodnost všech k sobě příslušných stran i vnitřních úhlů. Při našem postupu však je zřejmé, že by šlo o nadbytečnou definici.

Strany a vnitřní úhly trojúhelníka (případně jejich velikosti) nazýváme *základní prvky* trojúhelníka. Ze střední školy víme, že pro zjištění shodnosti trojúhelníků stačí zjistit shodnost jen některých základních prvků těchto trojúhelníků. Tyto postačující podmínky pro shodnost dvou trojúhelníků vyjadřují věty, které nazýváme **věty o shodnosti trojúhelníků**. Stručně se označují **sss**, **sus**, **usu**, **Ssu**, přičemž věta sss je vlastně definicí 1.3. V rámci cvičení 1.5 si všechny věty důsledně zopakujte.

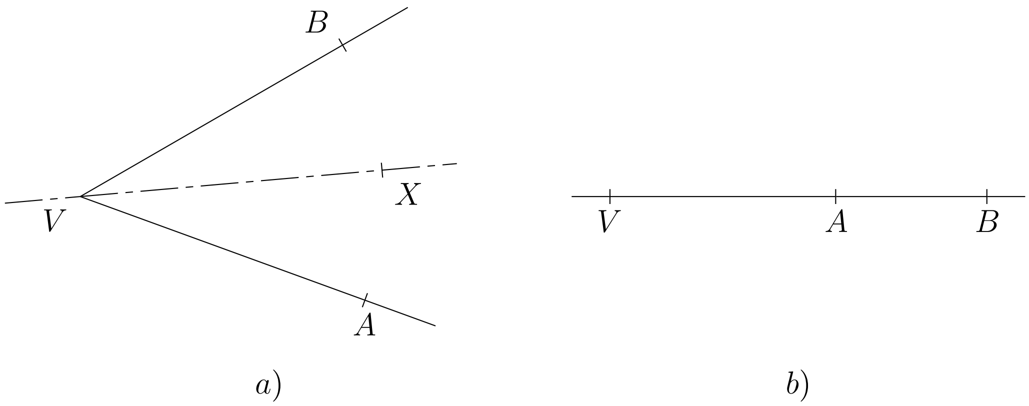
Věty o shodnosti trojúhelníků se v elementární geometrii velmi často využívají k důkazům a jsou základem pro většinu metrických vztahů elementární geometrie (viz např. důkazy vět 1.1, **??**, **??**).

1.6 Osa úhlu, pravý úhel, střed a osa úsečky

Užitím shodnosti úseček a úhlů budeme nyní definovat další geometrické pojmy: osu úhlu, pravý úhel, kolmost přímek a rovin, střed a osu úsečky. I když nejsou tyto pojmy pro absolventa střední školy nové, jde o to, abychom vyslovili a osvojili si jejich přesné definice. Tyto definice jsou také ukázkou systematického budování nových pojmů v geometrii užitím pojmů dříve zavedených.

Definice 1.4 Nechť AVB je úhel, který není plný ani nulový. Pak ***osou úhlu*** AVB nazýváme přímku VX právě tehdy, když bod X leží v téže rovině jako úhel AVB a platí, že konvexní úhel AVX je shodný s konvexním úhlem BVX (viz obr. 1.11a). Osou plného nebo nulového úhlu AVB rozumíme přímku VA, resp. VB (viz obr. 1.11b).

Definice 1.5 (1.4*) Nechť AVB je úhel, který není plný ani nulový. Pak ***osou úhlu*** AVB nazýváme polopřímku VX právě tehdy, když bod X je bodem úhlu AVB a platí, že konvexní úhel AVX je shodný s konvexním úhlem BVX. Osou nulového úhlu AVB je pak polo přímka VA, resp. VB, osou plného úhlu je polopřímka opačná k polopřímce VA, resp. VB (viz obr. 1.11b).



Obr. 1.11

Poznámka 1.4 Přímka VX v definici 1.4 je osou jak konvexního, tak i nekonvexního úhlu AVB.

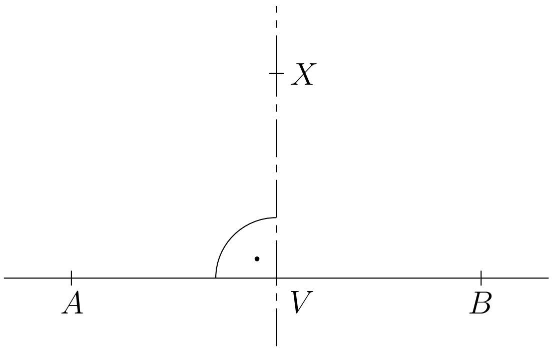
Osy konvexního a nekonvexního úhlu AVB jsou dle 1.5 navzájem opačné polopřímky.

Definice 1.6 Úhel, který je shodný s úhlem k němu vedlejším, nazýváme ***pravý úhel***.

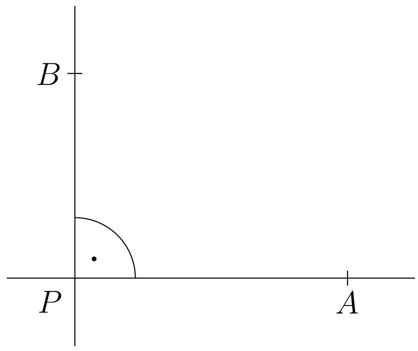
Uvědomme si, že k definici pravého úhlu není třeba užít jeho velikost. Je-li přímka VX osou přímého úhlu AVB, jsou úhly AVX a XVB shodné vedlejší úhly a tedy jsou oba pravé (viz obr. 1.12). Tato skutečnost bývá často vyjadřována takto: ***Osa přímého úhlu dělí tento úhel na dva úhly pravé.***

Definice 1.7 Dvě různoběžné přímky AP a BP nazýváme ***kolmé*** právě tehdy, když úhel APB je pravý (viz obr. 1.13).

O dvou kolmých různoběžných přímkách říkáme, že svírají pravý úhel. Vztah kolmosti je definován i pro mimoběžné přímky.



Obr. 1.12



Obr. 1.13

Definice 1.8 *Mimoběžné přímky* a, b jsou *kolmé* právě tehdy, když existuje taková přímka a', $a' \parallel a$, že přímky a', b jsou kolmé různoběžky.

Jsou-li a, b kolmé přímky, říkáme též, že přímka a je kolmá k přímce b nebo že přímka b je kolmá k přímce a. Jde o symetrický vztah, což je patrno i z obvyklého vyjádření: přímky a, b jsou ***k sobě kolmé*** nebo ***navzájem kolmé***.

Definice 1.9 ***Středem*** S ***úsečky*** AB nazýváme takový bod úsečky AB, pro který platí $AS \cong SB$.

Definice 1.10 Přímku o nazýváme ***osa úsečky*** $AB(A \neq B)$ právě tehdy, když jsou přímky AB a o navzájem kolmé a přímka o prochází středem úsečky AB.
Symbolicky:

$$o \text{ je osa úsečky } AB \Leftrightarrow A \neq B \wedge o \perp AB \wedge o \cap AB = \{S\} \wedge SA \cong BS.$$

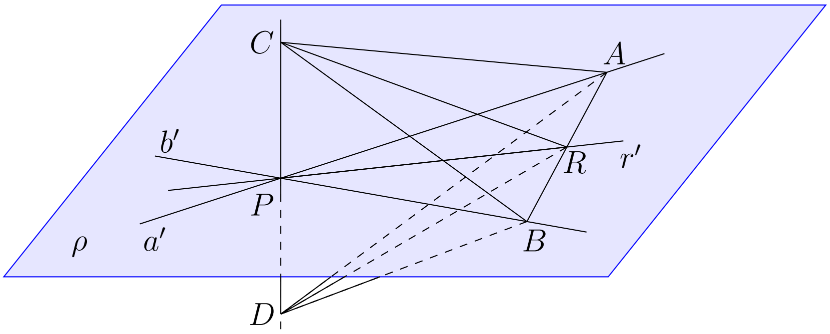
Z definice 1.10 je zřejmé, že osa úsečky je definována jen pro nenulové úsečky. (Zdůvodněte proč!) V definici 1.9 středu úsečky toto omezení není. Který bod je středem nulové úsečky?
Definicemi 1.7 a 1.8 jsme zavedli kolmost dvou přímek. Tento pojem je východiskem i k zavedení pojmu *kolmost přímky a roviny.*

Definice 1.11 Přímka p a rovina ρ se nazývají ***navzájem kolmé***, jestliže je přímka p kolmá ke všem přímkám roviny ρ.

Termín *navzájem kolmé* znamená, že přímka p je kolmá k rovině ρ a také, že rovina ρ je kolmá k přímce p. Při zjišťování kolmosti přímky p a roviny ρ nelze prakticky prověřit kolmost přímky p ke všem přímkám roviny ρ. Ke zjištění kolmosti přímky p a roviny ρ, případně k určení roviny kolmé k přímce p, užíváme kritérium kolmosti přímky a roviny uvedené ve větě 1.1.

Věta 1.1 ***(Kriterium kolmosti přímky a roviny)***
Je-li přímka p kolmá ke dvěma různoběžkám a, b roviny ρ, pak je kolmá k rovině ρ.

Důkaz: *Označme P průsečík přímky p s rovinou ρ. Bodem P veďme přímky $a' \parallel a$, $b' \parallel b$. Přímky a', b' zřejmě leží v rovině ρ a $p \perp a'$, $p \perp b'$. Zvolme dále libovolnou přímku $r \subset \rho$ a ukažme, že $p \perp r$. Sestrojíme přímku r' tak, že $P \in r'$ a $r' \parallel r$ a nechť $r' \neq a'$, $r' \neq b'$ (viz obr. 1.14). Na přímce p zvolme body C, D tak, že P je střed CD. Na přímce a' zvolme bod A, na přímce b' bod B tak, aby body A, B byly odděleny přímkou r'. Označme $R \in AB \cap r'$.*
Platí: $CB \cong DB$, $CA \cong AD \Rightarrow \triangle CBA \cong \triangle DBA$ podle věty sss. Ze shodnosti těchto



Obr. 1.14

trojúhelníků plyne shodnost jejich příček RD, RC, tj. $RD \cong RC$. Vzhledem k tomu, že $CP \cong DP$, $RD \cong RC$ a $RP \cong RP$, je $\triangle PDR \cong \triangle PCR$ podle věty sss. Ze shodností těchto trojúhelníků plyne, že $\sphericalangle CPR \cong \sphericalangle DPR$. Protože se jedná o vedlejší úhly, jsou oba pravé. Z toho plyne, že přímka p je kolmá k přímce r', a tedy také k přímce r. $\square$

Užitím vztahu kolmosti přímky a roviny je možné též definovat kolmost dvou rovin.

Definice 1.12 Dvě roviny jsou ***k sobě kolmé*** právě tehdy, když v jedné z těchto dvou rovin existuje přímka, která je kolmá ke druhé z těchto rovin.

Cvičení:

■ **1.5** Zopakujte si věty o shodnosti trojúhelníků, důsledně je sformulujte a pokuste se je symbolicky zapsat.

■ **1.6** Uvažujte relaci *přímka x je kolmá k přímce y* v množině všech přímek a určete vlastnosti této relace.

■ **1.7** Nad stranami ostroúhlého trojúhelníku ABC jsou setrojeny rovnostranné trojúhelníky ABH a ACK. Dokožte shodnost úseček CH a BK.

■ **1.8** Je dán trojúhelník ABC. Nad jeho stranami AB, AC jsou vně setrojeny čtverce $ABGF$ a $ACDE$. Dokožte shodnost úseček EB a CF.

■ **1.9** Uvnitř trojúhelníku ABC zvolte bod S. Dokažte, že součet úseček SA, SB, SC je větší než poloviční součet stran daného trojúhelníku, tj. že

$$SA + SB + SC > \frac{1}{2}(AB + BC + CA).$$

■ **1.10** Dakažte, že součet úseček, které spojují vnitřní bod P trojúhelníku s krajními body jedné jeho strany, je menší než součet zbývajících dvou stran daného trojúhelníku.

■ **1.11** Přímka o je osou úsečky AB. Bod X je libovolný vnitřní bod poloroviny oA. Dokažte, že platí: $AX < BX$.

■ **1.12** Bod U je vnitřním bodem trojúhelníku ABC.
Dokažte, že platí: $\sphericalangle AUB > \sphericalangle ACB$, $\sphericalangle BUC > \sphericalangle BAC$ a $\sphericalangle AUC > \sphericalangle ABC$.

Literatura

[1] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Texty k základům elementární geometrie pro studium učitelství 1. stupně základní školy*, skriptum UJEP, Brno 1985.

[2] Francová, M., Matoušková, K., Vaňurová, M. *Sbírka úloh z elementární geometrie*, skriptum MU, Brno 1996.

[3] Lomtatidze, L. *Historický vývoj pojmu křivka*, Scintilla Svazek 3, Brno 2007

[4] Vopěnka, P. *Rozpravy s geometrií*, Academia, Praha 1989

[5] Struik, D. J. *Dějiny matematiky*, Praha 1963. (z angl. originálu *A concise History of Mathematics*, G. Bell and Sons Ltd., London 1956, přeložili Nový, L. - Folta, J.)

[6] Katz, V. J. *A history of mathematics: an introduction*, Addison-Wesley Educational Publishers, Inc., 2. vydání, 1998.

[7] Servít, F. *Eukleidovy Základy (Elementa).* Nákladem Jednoty českých matematiků a fyziků, Praha, 1907.

[8] Bečvářová M., *Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady* Dějiny matematiky, svazek 20. Prometheus, Praha, 2001.