1. LINEÁRNÍ ALGEBRA

1.1. Vektory

1.1.1. Operace s vektory

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočítejte součet $\vec{a}+\vec{b}$ a rozdíl $\vec{a}-\vec{b}$ a $\vec{b}-\vec{a}$ vektorů:

a) $\vec{a}=(2,3,5), \vec{b}=(-8,3,9)$, b) $\vec{a}=(1,1,0,-5), \vec{b}=(3,-6,8,-11)$,

c) $\vec{a}=(7,-8,0,15), \vec{b}=(-1,4,9,9)$, d) $\vec{a}=(-4,9,2), \vec{b}=(3,3,-9,7)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Vypočítejte souřadnice vektoru $\vec{x}$, pro který platí:

a) $\vec{x}+2\vec{a}-4\vec{b}=\vec{o}, \vec{a}=(8,7,11), \vec{b}=(9,3,-5)$,

b) $4\vec{x}-8\vec{a}-2\vec{b}=\vec{o}, \vec{a}=(-5,-13,8,4), \vec{b}=(6,8,-14,6)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.1.2. Lineární závislost a nezávislost vektorů

Úlohy k samostatnému řešení

3. Určete konstantu m tak, aby vektory $\vec{a},\vec{b}$ byly lineárně závislé, (kolineární):

a) $\vec{a}=(-4,m,5), \vec{b}=(-8,6,10)$, b) $\vec{a}=(1,m,0,m), \vec{b}=(3,-6,0,-6)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

4. Určete konstanty m,r tak, aby vektory $\vec{a},\vec{b}$ byly lineárně závislé, (kolineární):

a) $\vec{a}=(12,m,16), \vec{b}=(9,3,r)$, b) $\vec{a}=(4,m,8,4), \vec{b}=(6,9,r,6)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

5. Zjistěte, jak jsou vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ závislé:

a) $\vec{a}=(1,0,1), \vec{b}=(2,3,5), \vec{c}=(0,3,3)$,

b) $\vec{a}=(-4,3,2,5), \vec{b}=(-1,0,1,0), \vec{c}=(0,3,-2,5)$,

c) $\vec{a}=(2,7,4,2), \vec{b}=(-12,-16,12,-8), \vec{c}=(1,-3,-7,0)$,

d) $\vec{a}=(1,2,3), \vec{b}=(1,0,1), \vec{c}=(3,4,7)$,

e) $\vec{a}=(5,1,1), \vec{b}=(2,1,0), \vec{c}=(3,0,4)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

6. Zapište vektor $\vec{d}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

a) $\vec{a}=(1,0,1), \vec{b}=(2,3,5), \vec{c}=(0,3,-3), \vec{d}=(5,12,5)$,

b) $\vec{a}=(-4,3,2,5), \vec{b}=(-1,0,1,0), \vec{c}=(0,3,-3,5), \vec{d}=(2,6,-9,10)$,

c) $\vec{a}=(1,7,4,2), \vec{b}=(-3,7,4,-8), \vec{c}=(3,-8,-1,6), \vec{d}=(0,-1,3,-2)$,

d) $\vec{a}=(2,1,2), \vec{b}=(-1,0,3), \vec{c}=(1,1,0), \vec{d}=(0,1,13)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.1.3. Báze vektorového prostoru

Úlohy k samostatnému řešení

7. Dokažte,že vektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tvoří bázi vektorového prostoru a zapište souřadnice vektoru $\vec{d}$ v této bázi:

a) $\vec{a}=(1,0,1), \vec{b}=(2,-4,7), \vec{c}=(0,3,-1), \vec{d}=(1,19,-9)$,

b) $\vec{a}=(-4,3,2), \vec{b}=(-1,1,0), \vec{c}=(0,3,4), \vec{d}=(-12,29,36)$,

c) $\vec{a}=(6,5,4), \vec{b}=(-5,2,4), \vec{c}=(1,0,-4), \vec{d}=(-17,-1,8)$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.2. Determinant

Úlohy k samostatnému řešení

8. Vypočítejte determinant:

a) $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 4 & -8 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

9. Vypočítejte determinant Sarrusovým pravidlem:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

10. Vypočítejte determinant, determinant upravte a použijte rozvoj podle některého řádku nebo sloupce:

a) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 6 & 7 \\ -4 & -5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$, e) $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

11. Vypočtěte determinant úpravou na trojúhelníkový tvar:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$, c) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & -2 & -10 \\ -6 & 11 & 13 & 8 \\ 6 & 21 & 2 & 14 \end{vmatrix}$,

d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.3. Matice

1.3.1. Operace s maticemi

Úlohy k samostatnému řešení

12. Vypočítejte $2\cdot\mathbf{A}+3\cdot\mathbf{B}-\mathbf{C}$, kde:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & 10 \end{pmatrix},$

b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & -7 & 2\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}6 & 9 & 11\\ -5 & -1 & -3\\ 4 & -8 & -4\end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

13. Vypočítejte $\mathbf{A}+2\cdot\mathbf{E}-2\cdot\mathbf{B}$, kde:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 9 & -4\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 6 & 9\end{pmatrix},$ b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\\ -2 & 8 & -3\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 4 & -5 & -6\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

14. Vynásobte matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 9 & -4\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}8 & -2\\ 6 & 9\end{pmatrix},$ b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\\ -2 & 8 & -3\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}9 & 8 & 7\\ 4 & -5 & -6\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},$

c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$ d) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}7 & 4 & -3\\ 1 & 2 & 5\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\\ 3 & 3\end{pmatrix},$

e) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2\\ 5\\ -4\\ 3\end{pmatrix},$ f) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0 & 5\\ 7 & 8 & 4 & -9\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}7 & 2\\ 5 & 5\\ -1 & 0\\ 3 & 8\end{pmatrix},$

g) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -4 & 2\\ 6 & 1 & 1\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix},$ h) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\\ 9 & -1\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},$

i) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}3\\ 1\\ -3\\ 2\end{pmatrix},$ j) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 6 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix},$

k) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\\ 6 & 0\\ 1 & -2\end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix}9 & 3\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, matice lze násobit více způsoby.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.3.2. Hodnost matice

Úlohy k samostatnému řešení

15. Vypočítejte hodnost matice:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-3\\2&4&6\\4&4&0\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&-1&3\\1&1&0\end{pmatrix}$ c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\-1&1&2&1\\0&1&3&1\\3&3&2&2\\2&4&4&3\end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&3&-2&4\\4&5&0&3\\-2&-4&5&1\\6&8&1&1\end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3&5&7&-5&2\\2&-4&1&1&0&6\\3&-1&6&8&-5&8\\5&5&16&22&-15&12\end{pmatrix}$,

f) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&1&-1\\-1&2&-2&1&1\\1&-2&3&2&2\\1&1&2&-1&1\\-1&1&2&1&1\end{pmatrix}$ g) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&6&1\\1&0&1&1\\-1&2&1&4\\2&1&7&2\\-2&2&0&3\\-3&4&1&7\end{pmatrix}$,

h) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&1&1\\1&1&0&1&1\\2&1&1&2&2\\1&1&1&1&0\\1&2&0&0&1\\-1&2&0&1&0\\-1&1&1&1&-1\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

16. Doplňte parametry a, b tak, aby matice měla danou hodnost:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&2\\a&4&2\\4&4&b\end{pmatrix}, h(\mathbf{A})=2$, b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5&7&-2\\a&-7&2\\4&b&4\end{pmatrix}, h(\mathbf{A})=2$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.3.3. Inverzní matice

Úlohy k samostatnému řešení

17. Najděte inverzní matici:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ -2 & 1\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 12 & -7\end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -3 & -8\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

18. Najděte inverzní matici:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 7 & 1\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 1\\ -5 & 2 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}$, c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 11 & 12 & 13\\ -2 & -3 & -4\end{pmatrix}$,

d) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, e) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-2 & 5 & -4\\ 0 & -3 & 0\\ 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

19. Najděte inverzní matici:

a) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & -3\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & -1 & 2\\ -3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 1 & 0\\ -3 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}4 & 5 & 6 & 7\\ -1 & -2 & -3 & -4\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2 & -4\end{pmatrix}$, d) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.3.4. Maticové rovnice

Úlohy k samostatnému řešení

20. Řešte rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix}2 & -4\\ 2 & -7\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 18 & -6\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&2\end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix}4&1\\6&2\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2&1\\4&-2\end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix}11&5\\2&1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}12&-5\\4&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&5\\1&3\end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix}1&1\\2&0\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\3&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&4\\3&6\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

21. Řešte rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix}1&0&2\\4&1&5\\5&3&-1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\2&1\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}3&-2\\3&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&-8\\2&4\\1&0\end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\3&1&0\\2&2&1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\\2&-1\end{pmatrix}$, d) $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}1&2\\2&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1\\1&0\\-2&3\end{pmatrix}$,

e) $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}0&3&1\\1&1&1\\-2&-2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&1&3\\-4&2&0\\5&5&9\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

22. Řešte rovnici s neznámou maticí $\mathbf{X}$:

a) $\begin{pmatrix}2&5&-9\\1&2&1\\1&3&-4\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix}$, b) $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&3\\1&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-13&-3\end{pmatrix}$,

c) $\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix}-5&4\\-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&10\\-12&10\\-6&4\\-25&18\end{pmatrix}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

23. Řešte soustavu maticových rovnic s neznámými maticemi $\mathbf{X},\mathbf{Y}$:

a) $\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}18&8\\6&11\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}\cdot\begin{pmatrix}6&1\\0&5\end{pmatrix}=\mathbf{X}$, b) $\begin{pmatrix}3&3\\5&1\end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}=\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4&-2\\3&-4\end{pmatrix}\cdot\mathbf{Y}=\mathbf{X}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1.4. Soustavy lineárních rovnic

Úlohy k samostatnému řešení

24. Řešte soustavu lineárních rovnic GEM a Cramerovým pravidlem:

a) $\begin{aligned} x+y+z&=4\\ 2x-3y+z&=-3\\ -x+2y-2z&=1 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} 2x+3y-2z&=-4\\ 4x-3y+3z&=10\\ 6x-4y-2z&=14 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} -x+y+2z&=6\\ 2x-y-4z&=-16\\ 5x+y+z&=12 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} 2x+3y+4z&=9\\ 5x-3y+4z&=-6\\ 4x+3y-4z&=-21 \end{aligned}$, e) $\begin{aligned} 6x+y-z&=7\\ x-6y+z&=17\\ -x+y+6z&=14 \end{aligned}$, f) $\begin{aligned} x+y-z&=5\\ x-2y+z&=0\\ -x+y-z&=-5 \end{aligned}$,

g) $\begin{aligned} x+2y-z&=9\\ x+y+z&=3\\ 2x-y-z&=6 \end{aligned}$, h) $\begin{aligned} 2x+y-2z&=7\\ -x+2y+z&=-1\\ 2x+3y+z&=0 \end{aligned}$, i) $\begin{aligned} -2x+3y-4z&=4\\ 5x-3y+7z&=2\\ -9x+4y-12z&=1 \end{aligned}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

25. Řešte soustavu lineárních rovnic GEM:

a) $\begin{aligned} x+y-4z&=9\\ x+y+2z&=3\\ x+y-z&=6 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x+y+z+u&=4\\ x-2y+3z-u&=2\\ 2x-y+4z&=6\\ 3x+5z+u&=11 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 3x_1+2x_2+x_3-x_4&=5\\ -3x_1+x_2+4x_3+x_4&=4\\ 2x_1-x_2+3x_3-x_4&=3\\ -2x_1+x_2+5x_3+x_4&=2 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+3x_4-2x_5&=4\\ 2x_1+2x_2-3x_3+3x_4-x_5&=5\\ -2x_2-x_3-3x_4+3x_5&=-3\\ -x_1+2x_3-2x_4+x_5&=3\\ x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5&=6 \end{aligned}$, e) $\begin{aligned} x_1+2x_2+4x_3-x_5&=1\\ x_1-x_2+5x_3-x_4-2x_5&=4\\ 3x_2-x_3+x_4+x_5&=-6\\ x_1-2x_2+2x_3+2x_4+4x_5&=8 \end{aligned}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

26. Řešte homogenní soustavu lineárních rovnic:

a) $\begin{aligned} x+y-4z&=0\\ x+y+2z&=0\\ x+y-z&=0 \end{aligned}$, b) $\begin{aligned} x+y+z+u&=0\\ 3x-2y+z&=0\\ 2x+2y+z+2u&=0\\ 6x+y+3z-3u&=0 \end{aligned}$, c) $\begin{aligned} 2x_1+x_2+x_4&=0\\ -3x_1-x_2+2x_3+2x_4&=0\\ 4x_1+x_2+2x_3+5x_4&=0\\ 3x_3+5x_4&=0 \end{aligned}$,

d) $\begin{aligned} 2x_1-3x_2+x_3-x_4+x_5&=0\\ 2x_1+x_2-3x_3+x_4+x_5&=0\\ x_1-x_2+3x_3-x_4-x_5&=0\\ 4x_1-2x_2-2x_3+2x_5&=0\\ 7x_1-2x_2-2x_3+2x_5&=0 \end{aligned}$, e) $\begin{aligned} x_1+2x_2-x_3+4x_4-x_5&=0\\ 2x_1+4x_2-4x_3+6x_4-3x_5&=0\\ x_1+2x_2-3x_3+2x_4-2x_5&=0\\ -x_1-2x_2+x_3-4x_4+x_5&=0 \end{aligned}$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $\vec{a}+\vec{b}=(-6,6,14)$, $\vec{a}-\vec{b}=(10,0,-4)$, $\vec{b}-\vec{a}=(-10,0,4)$; **b)** $\vec{a}+\vec{b}=(4,-5,8,-16)$, $\vec{a}-\vec{b}=(-2,7,-8,6)$, $\vec{b}-\vec{a}=(2,-7,8,-6)$; **c)** $\vec{a}+\vec{b}=(6,-4,9,24)$, $\vec{a}-\vec{b}=(8,-12,-9,6)$, $\vec{b}-\vec{a}=(-8,12,9,-6)$; **d)** nelze sčítat ani odčítat. **2. a)** $\vec{x}=(20,-2,-42)$; **b)** $\vec{x}=(-7,-22,9,11)$. **3. a)** $m=3$; **b)** $m=-2$. **4. a)** $m=4, r=12$; **b)** $m=6, r=12$.

5. a) $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=\vec{o}$; **b)** $\vec{a}-4\vec{b}-\vec{c}=\vec{o}$; **c)** $4\vec{a}+\vec{b}+4\vec{c}=\vec{o}$; **d)** $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=\vec{o}$; **e)** LNZ. **6. a)** $\vec{d}=\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}$; **b)** $\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$; **c)** $\vec{d}=\vec{b}+\vec{c}$; **d)** $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

7. a) $\det\begin{bmatrix}1&0&1\\2&-4&7\\0&3&-1\end{bmatrix}=-11\neq 0\Rightarrow$ tvoří bázi, $\vec{d}_{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}=(3,-1,5)$;

b) $\det\begin{bmatrix}-4&3&2\\-1&1&0\\0&3&4\end{bmatrix}=-10\neq 0\Rightarrow$ tvoří bázi, $\vec{d}_{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}=(4,-4,7)$;

c) $\det\begin{bmatrix}6&5&4\\-5&2&4\\1&0&-4\end{bmatrix}=-136\neq 0\Rightarrow$ tvoří bázi, $\vec{d}_{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}=(-1,2,-1)$.

8. a) 3; **b)** 12; **c)** 0; **d)** 1; **e)** -11. **9. a)** 7; **b)** -41; **c)** 0, **d)** -24; **e)** 0. **10. a)** 20; **b)** 7; **c)** 0, **d)** 20; **e)** -44. **11. a)** -3; **b)** 27; **c)** 800, **d)** 8.

12. a) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}7&-9\\0&11\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}27&29&29\\-9&-10&-9\\13&-39&-11\end{pmatrix}$. **13. a)** $\begin{pmatrix}-9&7\\-3&-20\end{pmatrix}$; **b)** $\begin{pmatrix}-15&-16&-12\\-5&16&12\\-8&4&-3\end{pmatrix}$.

14. a) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}58&17\\48&-54\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}22&32\\111&-18\end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}15&12&9\\43&4&-3\\5&-62&-65\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}19&88&-3\\1&-68&26\\7&16&3\end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&4\\4&13\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}14&4&0\\0&1&7\\1&0&-2\end{pmatrix}$; **d)** $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}5&-5\\17&17\\7&11\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$ nelze násobit;

e) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(1),\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-4&0&6\\5&-10&0&15\\-4&8&0&-12\\3&-6&0&9\end{pmatrix}$;

f) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-4&31\\58&-18\end{pmatrix},\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&9&8&17\\25&35&20&-20\\2&1&0&-5\\50&61&32&-57\end{pmatrix}$;

g) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}16&2\\12&19\end{pmatrix},\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}22&-5&7\\2&9&-3\\4&-8&4\end{pmatrix}$; **h)** $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ nelze násobit, $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}45&12\\37&7\\32&-3\end{pmatrix}$;

i) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=(7),\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}6&3&6&9\\2&1&2&3\\-6&-3&-6&-9\\4&2&4&6\end{pmatrix}$; **j)** $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}7&7\\3&7\end{pmatrix},\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}8&3&1&2\\7&2&-1&3\\12&6&6&0\\-4&-1&1&-2\end{pmatrix}$;

k) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}=\begin{pmatrix}56&49\\20&37\end{pmatrix},\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=\begin{pmatrix}72&84\\5&21\end{pmatrix},\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}=\begin{pmatrix}47&18&7&11\\3&-3&-12&9\\162&72&54&18\\7&6&11&-5\end{pmatrix}$.

15. a) $h(A)=2$; **b)** $h(A)=3$; **c)** $h(A)=3$; **d)** $h(A)=4$; **e)** $h(A)=2$.; **f)** $h(A)=5$; **g)** $h(A)=3$; **h)** $h(A)=5$. **16. a)** $(a=4\wedge b=2),\left(a=4-\frac{1}{k},b=2+\frac{2}{k},k\neq 0\right)$;

b) $a=-5,b\in\mathbf{R}$.

17. a) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-3\\2&-4\end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-2&1\\7&-2\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{11}\begin{pmatrix}7&-2\\12&-5\end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1\\-1&-2\end{pmatrix}$; **e)** $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}2&1\\-\frac{3}{4}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

18. a) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}30&-5&-10\\-1&0&1\\-23&5&8\end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{32}\begin{pmatrix}4&-6&1\\12&-2&-5\\-4&6&15\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{A}^{-1}$ neexistuje;

d) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}-2&7&1\\4&-6&-2\\-2&3&5\end{pmatrix}$; **e)** $\mathbf{A}^{-1}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3&3&-12\\0&2&0\\3&1&6\end{pmatrix}$.

19. a) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&3&2&-1\\3&12&0&-3\\2&0&2&2\\-1&-3&2&2\end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}6&-12&-3&3\\16&8&-4&-4\\-26&-4&5&11\\18&-12&3&-3\end{pmatrix}$;

c) $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}8&11&-21&3\\12&30&36&-9\\-12&-30&-9&9\\1&-2&-6&-3\end{pmatrix}$; **d)** $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-4&-5&7&-3\\2&2&-3&1\\1&1&-1&1\\3&3&-5&2\end{pmatrix}$. **20. a)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-5&4\\-4&2\end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-1&0\\-\frac{31}{5}&-\frac{14}{5}\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{X}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-2\\2&-1\end{pmatrix}$; **d)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}0&2\\2&-7\end{pmatrix}$; **e)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}-8&1\\\frac{49}{2}&-\frac{241}{4}\end{pmatrix}$;

f) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}12&-\frac{15}{2}\\4&-\frac{5}{2}\end{pmatrix}$. **21. a)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&5\\-1&-\frac{17}{2}\\0&-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$; **b)** $\mathbf{X}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}29&-34\\-14&16\\-1&2\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\frac{1}{9}&\frac{5}{9}\\\frac{2}{9}&-\frac{4}{9}\\\frac{4}{9}&-\frac{7}{9}\end{pmatrix}$;

d) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}23&-9\\5&-2\\-16&7\end{pmatrix}$; **e)** $\mathbf{X}=-\frac{1}{9}\begin{pmatrix}12&-41&2\\-18&24&-6\\0&-69&-12\end{pmatrix}$. **22. a)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\frac{70}{3}\\-\frac{31}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}3&-2&-3\end{pmatrix}$; **c)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2&1\\3&-1\\0&2\\2&5\end{pmatrix}$. **23. a)** $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}12&7\\-6&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}2&1\\-1&0\end{pmatrix}$;

b) $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$. **24. a)** $(1,2,1)^T$, **b)** $(1,-2,0)^T$, **c)** $(2,-4,6)^T$, **d)** $(-3,1,3)^T$,

e) $(2,-2,3)^T$, **f)** $(5,5,5)^T$; **g)** $(3,2,-2)^T$; **h)** $(0,1,-3)^T$;

i) $(27,-14,25)^T$. **25. a)** $(5-t,t,t,-1)^T$; **b)** nemá řešení; **c)** $\left(-\frac{21}{8},\frac{47}{24},\frac{5}{8},-\frac{25}{3}\right)^T$;

d) $(17-t-4s,s,9-2s,t,2+t)^T$ **e)** nemá řešení. **26. a)** $(-t,t,0)^T$; **b)** $(0,0,0,0)^T$;

c) $(t,t,5t,-3t)^T$; **d)** $(0,t-s,s,4s-2t,t)^T$ **e)** $(-9t-14s-2r,r,t,s,-2t-2s)^T$.