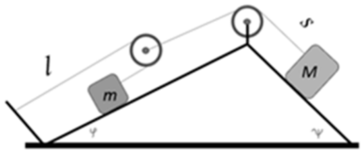
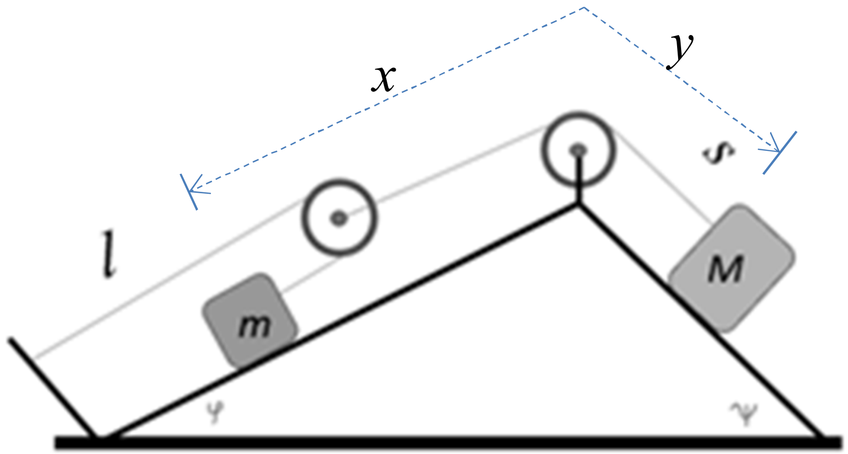


Úlohy z TM

Určete zrychlení těles soustavy, (tj. bodů *M*, *m*) různými metodami



$l, s - délky\ lan$

vazebné podmínky

$$y + x = s$$
$$x + l - 2a = d$$
$$\Rightarrow x = -2y + konst$$

$R, P\ napětí\ lan$

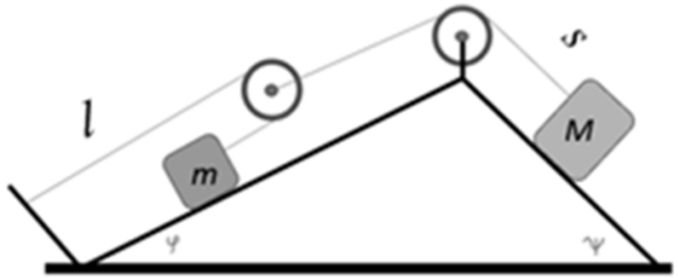
Newtonovy rce:

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi - R$$
$$M\ddot{y} = mg\sin\psi - P$$
$$2R = P$$
$$\ddot{x} = -2\ddot{y}$$

$$\ddot{x} = \frac{2g}{4m+M}(2m\sin\varphi - M\sin\psi)$$
$$\ddot{y} = \frac{g}{4m+M}(M\sin\psi - 2m\sin\varphi)$$
$$P = \frac{2Mg}{4m+M}(2\sin\psi + \sin\varphi) = 2R$$

K čemu jsme došli?

D' Alembertův princip



$$\delta x = -2\delta y\,,\ \ddot{x} = -2\ddot{y}$$

$$(mg\sin\varphi - m\ddot{x})\,\delta x + (Mg\sin\psi - M\ddot{y})\,\delta y = 0$$

$$\left[-2(mg\sin\varphi + 2m\ddot{y}) + Mg\sin\psi - M\,\ddot{y}\right]\delta y = 0$$

$$\left[-2(mg\sin\varphi + 2m\ddot{y}) + Mg\sin\psi - M\,\ddot{y}\right] = 0$$

$$\ddot{y} = \frac{g}{4m+M}(M\sin\psi - 2m\sin\varphi)$$

Lagrangeovy rce I.druhu

$$m\ddot{x} = mg\sin\varphi + \lambda$$

$$M\,\ddot{y} = Mg\sin\psi + 2\lambda$$

$$\ddot{x} = -2\ddot{y}$$

$$\left(srovn.\quad \lambda = -R = -\frac{P}{2}\right)$$

Lagrangeovy rce II.druhu

$$L = T - U$$

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}M\dot{y}^2 + mgx\sin\varphi + Mgy\sin\psi$$

$$L = \dot{y}^2\left(2m + \frac{M}{2}\right) + yg(M\sin\psi - 2m\sin\varphi)$$

$$g(M\sin\psi - 2m\sin\varphi) - 2\ddot{y}\left(2m + \frac{M}{2}\right) = 0$$

Zákon zachování energie

↓↓

$$\dot{y}^2\left(2m+\frac{M}{2}\right)-yg\left(M\sin\psi-2m\sin\varphi\right)=E=konst.$$

$$2\ddot{y}\dot{y}\;\left(2m+\frac{M}{2}\right)-\dot{y}g\left(M\sin\psi-2m\sin\varphi\right)=0$$

$$\ddot{y}=\frac{g}{4m+M}\left(M\sin\psi-2m\sin\varphi\right)$$

D'Alembertův princip

V předchozí kapitole jsme se seznámili s principem virtuální práce. Ten je však použitelný jen v případě rovnováhy, kdy síla na každý hmotný bod je rovna nule. V případě, kdy se hmotné body pohybují, je ale síla obecně *nenulová*. Víme, že souvisí se zrychlením podle **2. Newtonova zákona**:

$$m_{(n)}\ddot{\vec{r}}_{(n)} = \vec{F}_{(n)} \ .$$

Zde index n čísluje hmotné body, $n = 1, \ldots N$, kde N je počet hmotných bodů[2].

Existuje ale trik, který nám umožní použít to, co jsme zvládli v první kapitole, tedy virtuální posunutí a virtuální práci. Ve vztazích (2.1) převedeme vše na jednu stranu:

$$\vec{F}_{(n)} - m_{(n)}\ddot{\vec{r}}_{(n)} = 0 \ .$$

Výraz na levé straně (2.2) má rozměr síly, můžeme ho tedy celý chápat jako sílu. Používá se pro něj název ***ztracená síla***[3]. Podstatné je, že tyto ztracené síly se pro každý hmotný bod rovnají nule. Lze na ně tedy aplikovat stejný postup, jako jsme v kap. 1 aplikovali na normální síly: Vztah pro každé n vynásobíme virtuálním posunutím $\delta\vec{r}_{(n)}$ a sečteme pro všechna n od 1 do N:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\vec{F}_{(n)} - m_{(n)}\ddot{\vec{r}}_{(n)}\right)\cdot\delta\vec{r}_{(n)} = 0 \ .$$

Síla na každý bod se skládá ze síly aktivní a vazbové, $\vec{F}_{(n)} = \vec{F}^{(\mathrm{a})}_{(n)} + \vec{F}^{(\mathrm{v})}_{(n)}$.[4] Podobně jako ve statickém případě popsaném v předchozí kapitole je virtuální práce *vazbových* sil rovna nule: $\sum_{n=1}^{N}\vec{F}^{(\mathrm{v})}_{(n)}\cdot\delta\vec{r}_{(n)} = 0$.[5] Vazbové síly tedy vypadnou a můžeme říci, že za pohybu soustavy hmotných bodů platí:

$$L = T - V$$

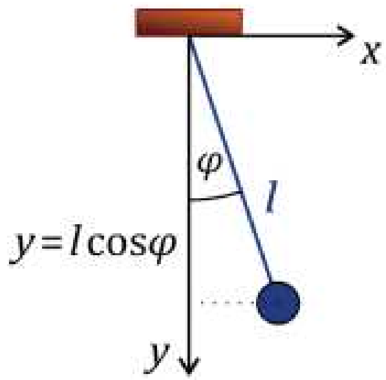
Nazýváme ji **Lagrangeova funkce** nebo jedním slovem **lagrangián[31].**

Výsledné rovnice, které jsme odvodili, mají velmi jednoduchý tvar:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$$

A právě toto jsou **Lagrangeovy rovnice druhého druhu** pro případ konzervativních sil.

Matematické kyvadlo



Naším cílem je vyřešit pohyb kyvadla s délkou závěsu l. Jako zobecněnou souřadnici zvolíme úhel φ (viz obrázek).

Nejprve musíme sestavit lagrangián. K tomu potřebujeme kinetickou a potenciální energii – a potřebujeme tyto energie vyjádřit pomocí zobecněné souřadnice φ a zobecněné rychlosti $\dot{\varphi}$.

Počítat kinetickou energii přes kartézské složky rychlosti $\dot{x}$ a $\dot{y}$ by bylo zbytečně složité. Půjdeme na to jednodušeji. Hmotný bod se pohybuje po kružnici, takže jeho rychlost je $v = l \cdot \omega = l \cdot \dot{\varphi}$. Kinetická energie je tedy $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2$.

Potenciální energii spočteme podle „klasického“ vzorce mgh, kde výška $h = -y = -l\cos\varphi$, takže $V = -mgl\cos\varphi$.

Lagrangián je tedy $$L = T - V = \tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

a jeho derivace

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{d\dot{\varphi}}\left(\tfrac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2\right) = m l^2 \dot{\varphi}\,, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(mgl\cos\varphi\right) = -mgl\sin\varphi\,.$$

Lagrangeova rovnice (jen jedna, protože úloha má jen jeden stupeň volnosti) je obecně

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Lagrangeova rovnice (jen jedna, protože úloha má jen jeden stupeň volnosti) je obecně

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

a po dosazení konkrétně:

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}\right) + mgl\sin\varphi = 0\,,$$

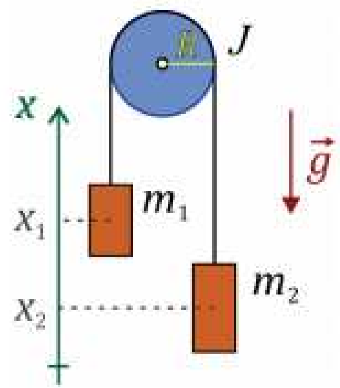
což po vydělení ml^2 dává

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0\ .$$

Tuto rovnici už řešíme známým způsobem: pro malé výchylky je $\sin\varphi \doteq \varphi$, rovnice je tedy $\ddot{\varphi} + \Omega^2\varphi = 0$, kde $\Omega = \sqrt{g/l}$; její řešení je $\varphi = \varphi_{\max}\cdot\cos\left(\Omega\, t + \phi\right)$. Vidíme, že lagrangeovský formalismus za nás rovnici nevyřeší – umožní ji však systematickým způsobem sestavit. Postup je

1. Zvolit vhodné zobecněné souřadnice
2. Vyjádřit kinetickou energii a potenciální energii pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí
3. Sestavit lagrangián (a případně si „bokem“ vypočítat jeho potřebné derivace)
4. Sestavit Lagrangeovy rovnice

Dvě závaží na kladce



Opět půjde o problém známý už z úvodního kurzu mechaniky. Na pevné kladce s momentem setrvačnost J a poloměrem R visí na lanku (zanedbatelné hmotnosti) dvě závaží, nalevo hmotnosti m_1, napravo hmotnosti m_2. Jak se budou závaží pohybovat?[33]

Rychlosti obou závaží jsou stejné, $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \overset{\text{ozn.}}{=} \dot{x}$. (Místo x_1 budeme psát prostě x.) Úhlová rychlost kladky je $\omega = \dot{x}/R$. Celková kinetická energie je tedy

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1{}^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2{}^2 + \tfrac{1}{2} J\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_1 + \left(J/R^2\right)\right)\dot{x}^2 .$$

Potenciální energie je $V = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 = (m_1 - m_2) g x + \text{konst.}$ [34] Lagrangián je

$$L = T - V = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_1 + \left(J/R^2\right)\right)\dot{x}^2 - (m_1 - m_2) g x$$

Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

tedy dají

$$\frac{d}{dt}\left(\left(m_1 + m_1 + \left(J/R^2\right)\right)\dot{x}\right) + (m_1 - m_2)\,g \;=\; 0\,.$$

Odtud dostaneme pro zrychlení závaží výsledek

$$\ddot{x} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_1 + \left(J/R^2\right)}\,g\,.$$

Vidíme, že oproti řešení tohoto problému pomocí druhého Newtonova zákona a druhé věty impulsové (jak se to dělalo v úvodním kurzu klasické mechaniky) je řešení pomocí Lagrangeových rovnic výrazně jednodušší. Nemusíme uvažovat tahy v lanku nalevo a napravo a místo tří rovnic máme rovnou rovnici jedinou.