MA0005 Algebra 2, 10. seminář

5. 12. 2019

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie – opakování
   - Vzájemná poloha přímky a roviny
   - Vektorový součin
2. Injektivní a surjektivní lineární zobrazení
3. Lineární zobrazení přímky a roviny

Literatura a zdroje

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7
- Konopová, J.: *Endomorfismy vektorových prostorů (bakalářská práce)*. Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, Katedra matematiky, fyziky a technické výchovy, 2014. Dostupné z: https://dspace5.zcu.cz/bitstream/11025/13029/1/bakalarska%20prace.pdf
- Čadek, M.: *Sbírka úloh z lineární algebry*. 2002. Dostupné z: http://www.math.muni.cz/~cadek/LA/sbirka.pdf
- Fiala, J. a kol. *Sbírka úloh z matematiky*. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2008. Dostupné z: https://kam.mff.cuni.cz/~sbirka
- Hladík, M.: *Vzorové cvičení z lineární algebry*. Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, 2019. Dostupné z: https://kam.mff.cuni.cz/~hladik/LA/cviceni_la_vzor_pub.pdf

Vzájemná poloha přímky a roviny

Příklad 15.4.32: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky p a roviny ϱ.

a) $p = \{[2 + t; 3 + 2t; 1 - t], t \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : x - 2y + z - 5 = 0$

b) $p = \{[1 - 2k; 5 - k; -3 + 5k], k \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : 3x - y + z - 11 = 0$

c) $p = \{[2s; 4 + s; -1], s \in \mathbb{R}\}$, $\varrho : x - 2y - 3z + 5 = 0$

Příklad 15.4.33: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky $AB, A[-2; 0; -1], B[2; 1; 4]$ a roviny ϱ, která je dána body $K[0; 0; 3], L[-2; -1; 1], M[0; 1; 4]$.

Příklad 15.4.34: Vyšetřete vzájemnou polohu přímky q a roviny σ.

$$q = \{[2+t; 3t; 1-t], t \in \mathbb{R}\}, \sigma = \{[1+s+2r; 3s+3r; 1-s-3r], s, r \in \mathbb{R}\}$$

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky příkladů

32.
a) přímka je různoběžná s rovinou, $P[0; -1; 3]$,
c) $p \parallel \varrho \wedge p \cap \varrho = \emptyset$,
d) přímka leží v rovině.

33. přímka je různoběžná s rovinou, $P[4; \frac{3}{2}; \frac{13}{2}]$.

34. $q \parallel \sigma \wedge q \cap \sigma = \emptyset$.

Vektorový součin

Uvažujme prostor $\mathbb{R}^3$. Vektorový součin $\vec{u} \times \vec{v}$ dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v}$, jejichž žádné umístění neleží na jedné přímce, je vektor $\vec{w}$ kolmý k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$, který s nimi tvoří pravotočivou bázi.

Poznámka

a) Platí $|\vec{u} \times \vec{v}| = |a| \cdot |b| \cdot \sin\alpha$, kde α je úhel svíraný vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

b) Pro souřadnice vektorového součinu $\vec{w}$ vektorů $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$ a $\vec{v} = (v_1; v_2; v_3)$ platí:

$$w = u \times v = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right).$$

c) Velikost vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

d) Normálový vektor roviny je kolmý na všechny vektory v ní ležící.

Vektorový součin

Příklad: Roviny jsou zadány parametrickými rovnicemi. Pomocí vektorového součinu najděte obecnou rovnici těchto rovin.

a) $\sigma = \{[1 + s + 2r, 3s + 3r, 1 - s - 3r], r, s \in \mathbb{R}\}$
b) $\varrho = \{[3 + t - k, 5 + t, -t + 2k], t, k \in \mathbb{R}\}$
c) $\omega = \{[1 - 2k - 2s, 2 + 3k - 2s, 1 - k + 4s], k, s \in \mathbb{R}\}$

Příklad 15.3.25: Přímka $p = \{[2 + 2t, -1 - t, 5], t \in \mathbb{R}\}$ je kolmá k rovině ϱ. Bod $M[2; 0; -3]$ leží v rovině ϱ. Napište obecnou rovnici roviny ϱ.

Příklad 15.3.29: Napište obecnou rovnici roviny ϱ, ve které leží body $A[2; 3; 0], B[-1; 2; 2]$ a rovina ϱ je kolmá k rovině $\sigma : 3x - 2y + z + 6 = 0$.

Vektorový součin

Příklad: Roviny jsou zadány parametrickými rovnicemi. Pomocí vektorového součinu najděte obecnou rovnici těchto rovin.

a) $\sigma = \{[1 + s + 2r, 3s + 3r, 1 - s - 3r], r, s \in \mathbb{R}\}$

b) $\varrho = \{[3 + t - k, 5 + t, -t + 2k], t, k \in \mathbb{R}\}$

c) $\omega = \{[1 - 2k - 2s, 2 + 3k - 2s, 1 - k + 4s], k, s \in \mathbb{R}\}$

Příklad 15.3.25: Přímka $p = \{[2 + 2t, -1 - t, 5], t \in \mathbb{R}\}$ je kolmá k rovině ϱ. Bod $M[2; 0; -3]$ leží v rovině ϱ. Napište obecnou rovnici roviny ϱ.

Příklad 15.3.29: Napište obecnou rovnici roviny ϱ, ve které leží body $A[2; 3; 0], B[-1; 2; 2]$ a rovina ϱ je kolmá k rovině $\sigma : 3x - 2y + z + 6 = 0$.

Výsledky: a) $-6x + y - 3z + 9 = 0$, b) $2x - y + z - 1 = 0$,
c) $x + y + z - 4 = 0$.
Příklad 15.3.25: $2x - y - 4 = 0$.
Příklad 15.3.29: $x + 3y + 3z - 11 = 0$.

Injektivní a surjektivní lineární zobrazení

Injektivní a surjektivní lineární zobrazení

Je dáno lineární zobrazení $\varphi : U \to V$. Nazveme jej

- injektivním, je-li $\operatorname{Ker} \varphi = \{\vec{o}\}$;
- surjektivním, je-li $\operatorname{Im} \varphi = V$.

Příklad 1

U následujících lineárních zobrazení rozhodněte, zda jsou injektivní či surjektivní.

a) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z) = (x + z, 2y + z, 2z)$

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \varphi(1, 0, 1) = (0, 1), \varphi(0, 1, 1) = (-1, 0),$
$\varphi(1, 1, 0) = (1, 0)$

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \varphi(x, y, z) = (x - 2y + z, 2x - y + z, 3y - z)$

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 1

a) φ je injektivní i surjektivní.

b) φ není injektivní, ale je surjektivní.

c) φ není injektivní, ani surjektivní.

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno pomocí svého jádra $\operatorname{Ker}\varphi$ a oboru hodnot $\operatorname{Im}\varphi$. Najděte matici zobrazení φ. *(Poznámka: není-li zobrazení φ určeno jednoznačně, najděte jedno takové zobrazení.)*

a) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((-3,-2,1,0);(-1,-1,0,1))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((1,2,-3);(0,-1,5))$.

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((1,-1,1))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((1,0);(0,1))$.

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((1,0,0);(1,1,1))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((1,0,1))$.

d) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((1,2,3,-2))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((2,1,0);(0,1,1);(0,0,1))$.

Příklad 2

Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je zadáno pomocí svého jádra $\operatorname{Ker}\varphi$ a oboru hodnot $\operatorname{Im}\varphi$. Najděte matici zobrazení φ. *(Poznámka: není-li zobrazení φ určeno jednoznačně, najděte jedno takové zobrazení.)*

a) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((-3,-2,1,0);(-1,-1,0,1))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((1,2,-3);(0,-1,5))$.

b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((1,-1,1))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((1,0);(0,1))$.

c) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((1,0,0);(1,1,1))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((1,0,1))$.

d) $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{Ker}\varphi = L((1,2,3,-2))$, $\operatorname{Im}\varphi = L((2,1,0);(0,1,1);(0,0,1))$.

Výsledky:

a) při doplnění $\operatorname{Ker}\varphi$ na bázi $\mathbb{R}^4$ vektory $(1,0,0,0);(0,1,0,0)$ je:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Výsledky Příkladu 2

b) při doplnění $\operatorname{Ker}\varphi$ na bázi $\mathbb{R}^3$ vektory $(1,0,0); (0,1,0)$ je:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) při doplnění $\operatorname{Ker}\varphi$ na bázi $\mathbb{R}^3$ vektorem $(0,1,0)$ je:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

d) při doplnění $\operatorname{Ker}\varphi$ na bázi $\mathbb{R}^4$ vektory $(1,0,0,0); (0,1,0,0)$ je:

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Příklad 3

Jsou dána tři lineární zobrazení:

- $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\; \varphi(x, y, z) = (y + z, x - z, -x - y)$,
- $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\; \psi(x, y) = (2x + y, y, y - x)$,
- $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\; \omega(x, y, z) = (x + y, y + z)$.

Úkoly:

a) Nalezněte $\varphi(p), \varphi(\sigma)$, je-li $p = \{[2 + t, 3 + 2t; 1 - t], t \in \mathbb{R}\}$ přímka a $\sigma = \{[1 + s + 2r, 3s + 3r, 1 - s - 3r], r, s \in \mathbb{R}\}$ rovina.

b) Nalezněte $\psi(q)$, je-li $q = \{[1 + 2t, 2 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ přímka.

c) Nalezněte $\omega(p), \omega(\sigma)$, je-li $p = \{[2 + t, 3 + 2t; 1 - t], t \in \mathbb{R}\}$ přímka a $\sigma = \{[1 + s + 2r, 3s + 3r, 1 - s - 3r], r, s \in \mathbb{R}\}$ rovina.

Výsledky: na dalším slajdu.

Výsledky Příkladu 3

a) $\varphi(p) = \{[4 + t, 1 + 2t, -5 - 3t], t \in \mathbb{R}\}$ – přímka v prostoru,
$\varphi(\sigma) = \{[1 + 2s, 2s + 5r, -1 - 4s - 5r], s, r \in \mathbb{R}\}$ – rovina.

b) $\psi(q) = \{[4 + t, 2 - 3t, 1 - 5t], t \in \mathbb{R}\}$ – přímka v prostoru.

c) $\omega(p) = \{[5 + 3t, 4 + t], t \in \mathbb{R}\}$ – přímka v rovině,
$\omega(\sigma) = \{[1 + 4s + 5r, 1 + 2s], s, r \in \mathbb{R}\}$ – rovina $\mathbb{R}^2$.