MA0005 Algebra 2, 11. seminář

12. 12. 2019

Náplň cvičení

1. Analytická geometrie – opakování
   - Velikost vektoru
   - Úhel dvou vektorů
   - Kolmost vektorů
   - Aplikace vektorového součinu
2. Využití jiné báze a matice přechodu
3. Lineární zobrazení jednotkové kružnice

Literatura a zdroje

- Petáková, J.: *Matematika – příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy*. 1. vydání. Prometheus, 1998. ISBN 978-80-7196-099-7
- Isibalo.com: *Matematika – Lineární algebra*. Dostupné z: `https://isibalo.com/matematika/linearni-algebra`.

Velikost vektoru

Příklad 13.5.17: Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u} = (-4; 2)$. Výpočet ověřte obrázkem.

Příklad 13.5.18: Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u} = (4; -3; 5)$.

Příklad 13.5.20: Je dán vektor $\vec{u} = (7; -1)$. Určete vektor $\vec{v}$ tak, aby platilo $\vec{v} \parallel \vec{u} \wedge |\vec{v}| = 10$. Výpočet ověřte obrázkem.

Příklad 13.5.22: Je dán vektor $\vec{f} = (3; 2)$. Určete $m \in \mathbb{R}$ tak, aby pro vektor $\vec{g} = (6; m)$ platilo $|\vec{g} - \vec{f}| = 5$. Výpočet ověřte obrázkem.

Velikost vektoru

Příklad 13.5.17: Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u} = (-4; 2)$. Výpočet ověřte obrázkem.

Příklad 13.5.18: Vypočítejte velikost vektoru $\vec{u} = (4; -3; 5)$.

Příklad 13.5.20: Je dán vektor $\vec{u} = (7; -1)$. Určete vektor $\vec{v}$ tak, aby platilo $\vec{v} \parallel \vec{u} \wedge |\vec{v}| = 10$. Výpočet ověřte obrázkem.

Příklad 13.5.22: Je dán vektor $\vec{f} = (3; 2)$. Určete $m \in \mathbb{R}$ tak, aby pro vektor $\vec{g} = (6; m)$ platilo $|\vec{g} - \vec{f}| = 5$. Výpočet ověřte obrázkem.

Výsledky:
17. $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$,
18. $|\vec{v}| = 5\sqrt{2}$,
20. $\vec{v_1} = (7\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $\vec{v_2} = (-7\sqrt{2}; \sqrt{2})$,
22. $m_1 = -2, m_2 = 6$.

Úhel dvou vektorů

Příklad 13.6.25: Vypočítejte velikost úhlu vektorů $\vec{u_1}, \vec{u_2}$.

1. $\vec{u_1} = (3; 1),\ \vec{u_2} = (1; 2)$;
2. $\vec{u_1} = (-2; 4),\ \vec{u_2} = (6; -2)$;
3. $\vec{u_1} = (3; -2),\ \vec{u_2} = (4; 6)$;
4. $\vec{u_1} = (-1; 0),\ \vec{u_2} = (\sqrt{3}; 1)$.

Příklad 13.6.26: Vypočítejte velikost úhlu vektorů $\vec{v_1}, \vec{v_2}$.

1. $\vec{v_1} = (-1; 0; 1),\ \vec{v_2} = (-2; 2; 0)$;
2. $\vec{v_1} = (-2; 6; 3),\ \vec{v_2} = (2; 4; 4)$;
3. $\vec{v_1} = (2; -3; 3),\ \vec{v_2} = (-1; 2; -2)$;
4. $\vec{v_1} = (1; 0; 1),\ \vec{v_2} = (0; 5; 0)$.

Příklad 13.6.27: Vypočítejte velikosti úhluů vektorů α, β, γ v trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholů.

1. $A[0; 1], B[2; 3], C[4; 0]$;
2. $A[2; 3], B[3; 1], C[5; 2]$;
3. $A[1; 0; 2], B[2; -2; 4], C[3; 6; 1]$;
4. $A[1; 3; -2], B[-2; 3; 1], C[-2; 6; -2]$.

Výsledky příkladů

Příklad 13.6.25:
a) $\varphi = 45°$, b) $\varphi = 135°$, c) $\varphi = 90°$, d) $\varphi = 150°$.

Příklad 13.6.26:
a) $\varphi = 60°$, b) $\varphi = 40°22'$, c) $\varphi = 174°14'$, d) $\varphi = 90°$.

Příklad 13.6.27:
a) $\alpha = 59°02', \beta = 78°41', \gamma = 42°17'$,
b) $\alpha = 45°, \beta = 90°, \gamma = 45°$,
c) $\alpha = 128°40', \beta = 35°32', \gamma = 15°48'$,
d) $\alpha = 60°, \beta = 60°, \gamma = 60°$.

Kolmost vektorů

Příklad 13.6.33: Je dán vektor $\vec{x} = (-1; 2; 3)$. Určete $p \in \mathbb{R}$ tak, aby vektor $\vec{y} = (17; p; 3)$ byl kolmý k vektoru $\vec{x}$.

Příklad 13.6.35: Určete vektor $\vec{f}$ tak, aby platilo $\vec{f} \perp \vec{g} \wedge |\vec{f}| = 4\sqrt{5}$, kde $\vec{g} = (3; 6)$.

Příklad 13.6.37: Jsou dány body $A[2; 1], B[5; 4]$. Určete souřadnice bodů B, C, D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec.

Příklad 13.6.38: Jsou dány body $A[4; 1], S[6; 2]$. Určete souřadnice bodů B, C, D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec. (Bod S je střed čtverce.)

Příklad 13.6.41: Jsou dány body $K[-2; 2], L[6; 8]$. Na ose x určete bod X tak, aby trojúhelník KLX byl pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu X.

Kolmost vektorů

Příklad 13.6.33: Je dán vektor $\vec{x} = (-1; 2; 3)$. Určete $p \in \mathbb{R}$ tak, aby vektor $\vec{y} = (17; p; 3)$ byl kolmý k vektoru $\vec{x}$.

Příklad 13.6.35: Určete vektor $\vec{f}$ tak, aby platilo $\vec{f} \perp \vec{g} \wedge |\vec{f}| = 4\sqrt{5}$, kde $\vec{g} = (3; 6)$.

Příklad 13.6.37: Jsou dány body $A[2; 1], B[5; 4]$. Určete souřadnice bodů B, C, D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec.

Příklad 13.6.38: Jsou dány body $A[4; 1], S[6; 2]$. Určete souřadnice bodů B, C, D tak, aby čtyřúhelník $ABCD$ byl čtverec. (Bod S je střed čtverce.)

Příklad 13.6.41: Jsou dány body $K[-2; 2], L[6; 8]$. Na ose x určete bod X tak, aby trojúhelník KLX byl pravoúhlý s pravým úhlem u vrcholu X.

Výsledky: 33. $p = 4$, 35. $\vec{f_1} = (8; -4), \vec{f_2} = (-8; 4)$,
37. $C_1[2; 7], D_1[-1; 4], C_2[8; 1], D_2[5; -2]$,
38. $B[7; 0], C[8; 3], D[5; 4]$, 41. $X[2; 0]$.

Aplikace vektorového součinu

Příklad 13.7.46: Vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$, jestliže znáte souřadnice vrcholů K, L, M. Vypočítejte souřadnice vrcholu N.

1. $K[2; 0; 1], L[1; -1; 3], M[4; 2; 1];$
2. $K[1; 3], L[2; 0], M[4; -1];$

Příklad 13.7.48: Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholů A, B, C:

1. $A[4; 0; -1], B[2; 4; -1], C[5; 3; 4];$
2. $A[2; -1], B[-1; 4], C[3; -2];$
3. $A[3; -6; 5], B[4; 8; 1], C[5; 22; -3];$
4. $A[\sqrt{6}; 1-\sqrt{6}; -3+2\sqrt{6}], B[\sqrt{6}; 2-\sqrt{6}; 2\sqrt{6}], C[2+\sqrt{6}; 2+2\sqrt{6}; \sqrt{6}];$

Příklad 13.7.46: Vypočítejte obsah rovnoběžníku $KLMN$, jestliže znáte souřadnice vrcholů K, L, M. Vypočítejte souřadnice vrcholu N.

1. $K[2; 0; 1], L[1; -1; 3], M[4; 2; 1]$;
2. $K[1; 3], L[2; 0], M[4; -1]$;

Příklad 13.7.48: Vypočítejte obsah trojúhelníku ABC, znáte-li souřadnice vrcholů A, B, C:

1. $A[4; 0; -1], B[2; 4; -1], C[5; 3; 4]$;
2. $A[2; -1], B[-1; 4], C[3; -2]$;
3. $A[3; -6; 5], B[4; 8; 1], C[5; 22; -3]$;
4. $A[\sqrt{6}; 1-\sqrt{6}; -3+2\sqrt{6}], B[\sqrt{6}; 2-\sqrt{6}; 2\sqrt{6}], C[2+\sqrt{6}; 2+2\sqrt{6}; \sqrt{6}]$;

Výsledky: 47.a) $N[5; 3; -1], S = 4\sqrt{2}$.
b) pro použití vektorového součinu je nutné přidat k bodům z-tovou souřadnici, např. $z = 0$. Pak je $N[3; 2], S = 5$.
48. a) $9\sqrt{2}$, b) 1, c) body leží na přímce, d) $4\sqrt{10}$.

Využití jiné báze a matice přechodu

Příklad 1

Určete matici A_S zobrazení φ (ve standardní bázi), které překlopí vektory prostoru $\mathbb{R}^2$ podle přímky $x - 2y = 0$.

Nápověda: Zkuste najít jinou bázi α, vhodnější než standardní, pro níž bude snadné určit matici zobrazení A_α, které překlápí vektory podle zadané přímky. Pomocí matic přechodu a jejich kombinací s A_α potom snadno dostaneme matici A_S.

Lineární zobrazení jednotkové kružnice

Příklad 2 – z přednášky

Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory lineární transformace φ prostoru $\mathbb{R}^2$ zadané maticí

$$A_S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi. Následně ověřte, že body $[x, y]$ jednotkové kružnice (tj. vektory (x, y)) se pomocí zobrazení φ zobrazí na body elipsy, jejíž délky poloos budou rovny vlastním číslům.

Ukázka elipsy: viz následující slajd a interaktivně v Geogebře.

Elipsa odpovídající zobrazení jednotkové kružnice